This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

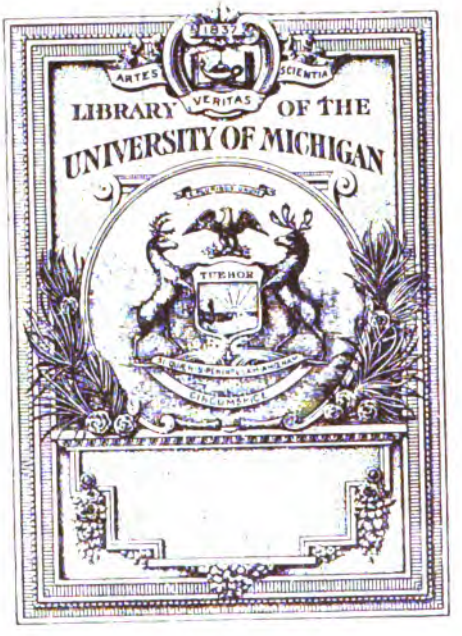
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.W8
A4

Digitized by Google

Digitized by Google

K. Bes

VERZAMELING

VAN

WISKUNSTIGE

OPGAVEN.

DOOR

DE LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

K. Bes
Tilburg.

TER SPREUKE VOERENDE:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

EERSTE DEEL.

(Gedrukt voor rekening van het Genootschap.)

Te Amsterdam, bij
WEIJTINGH en VAN DER HAART,
Boekverkoopers, in de Warmoesstraat bij de Oude
Kerksteeg, N°. 54.

1850.

Digitized by Google

Digitized by Google

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

TE AMSTERDAM,

OP DEN 1ᵉⁿ MEI *MDCCCL.*

BESTUURDERS.

F. J. STAMKART, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, Lid der 1ᵉ. Klasse van het Koninklijk Nederl. Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijbegeerte, te *Rotterdam*, van het Prov. Utrechtsch Gen. te *Utrecht*, enz. enz., Arrondissements-IJker te *Amsterdam*, *Voorzitter*. . . . . (*) 1843.

H. VAN WESSEM, JACOBUSZ. . . . . 1814.

A. VAN DER SWAN, *Amanuensis* bij het Hoofdbestuur der Maatsch.: *Tot Nut van 't Algemeen*, enz. enz., *Vice-Voorzitter* . . . . . 1818.

D. W. HINSE . . . . . 1834.

C. F. JULIUS . . . . . 1826.

JACOB SWART, Ridder van de Orde van de Eikenkroon, Examinator der Zee-Officieren, Lid der Comm. voor den Zee-Almanak, Lector in de Wis- en Zeevaartkunde, tevens belast met het beheer en de bewaring van 's Rijks Zee-Instrumenten, Lid van het Prov. Utrechtsch Gen. te *Utrecht*, Bestuurder van het Volks-Onderw. in de Wis-, Natuur-, Schei- en Werktuigkunde, opgerigt door de beide Amstd. Dept. der Maatsch.: *Tot Nut van 't Algemeen*, enz., enz. . . . . 1832.

(*) *Jaartallen van de eerste Verkiezing als Lid van het Bestuur.*

370515

Digitized by Google

J. Baron Gheijsen, Ridder van de Orde van den Nederlandschen Leeuw, Korrespondent der 1e. Klasse van het Koninkl. Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Lid van het Prov. Utrechtsch Gen. van Kunsten en Wetenschappen, te *Utrecht*, Lector in de Wiskunde aan de Koninkl. Militaire Akademie, te *Breda*, enz., enz., *Eerste Secretaris*. . . . . 1835.

H. G. Witlage, *Tweede Secretaris*. . . . . 1818.

H. Weijting, *Penningmeester*. . . . . 1825.

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET WETENSCHAPPELIJKE VAK.

J. P. Delprat, Kommandeur van de Orde van de Eikenkroon, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Luitenant-Kolonel-Ingenieur, Kommandant der Koninkl. Militaire Akademie, te *Breda*, Lid der 1e. Klasse van het Koninkl.-Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Lid der 1e. Klasse van het Koninkl. Instituut van Ingenieurs, te *Delft*, Lid van het Prov. Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, te *Utrecht*, van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te *Rotterdam*, enz., enz., *Oud-* 1e. *Secretaris* des Genootschaps, te *Breda*. . . . . (*) 1829.

J. Baron Gheijsen, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Korrespondent der 1e. Klasse van het Kon.-Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Lid van het Prov. Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, te *Utrecht*, Lector in de Wiskunde aan de Koninkl. Militaire Akademie, te *Breda*, enz., enz., *Eerste Secretaris* des Genootschaps. . . . 1835.

R. Lobatto, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Hoogleeraar in de Hoogere Wiskunde aan de Koninkl. Akademie ter opleiding van Burgerlijke Ingenieurs, enz., te *Delft*, Adviseur voor de Zaken der Maten en Gewigten bij het Ministerie van Binnenlandsche Zaken, Lid van de

(*) *Jaartallen van de benoeming tot Lid van Verdienste, enz.*

Digitized by Google

1°. Klasse van het Koninkl.-Nederl. Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., te *Delft*. . . . . 1839.

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET HUISHOUDELIJKE VAK.

H. van Wessem, Jacobusz, te *Amsterdam*. . . . . 1813.
H. G. Witlage, te *Amsterdam*, *Tweede Secretaris*. . 1828.
H. Weijting, te *Amsterdam*, *Penningmeester*. . . . 1829.
C. F. Julius, te *Amsterdam*. . . . . 1843.
A. Harrebomée, te *Heemstede*. . . . . 1848.

LEDEN VAN DE WETENSCHAPPELIJKE COMMISSIE.

J. P. Delprat, Kommandant der Koninkl. Militaire Akademie, enz., te *Breda*. (Zie boven). . . . . 1821.
J. Baron Gelissen, Lector in de Wiskunde aan de Koninkl. Militaire Akademie, enz., te *Breda*. (Zie boven) . . 1830.
G. A. van Kerkwijk, Korrespondent van de 1°. Klasse van het Koninkl. Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Eerst-Aanwezend Ingenieur te *Vlissingen*. . . . . 1840.
R. Lobatto, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, Hoogleeraar in de Hoogere Wiskunde aan de Koninkl. Militaire Akademie ter opleiding van Burgerlijke Ingenieurs, te *Delft*, enz. (Zie boven) . . . . . 1840.
F. J. Stamkart, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, enz., te *Amsterdam*. (Zie boven) . . . . . 1824.

BIBLIOTHECARIS.

H. Weijting, te *Amsterdam*. . . . . 1843.

LEDEN VAN VERDIENSTE DER TWEEDE KLASSE.

A. L. Hector, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, enz., te *Middelburg*. . . . . 1812.
A. Fock, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Directeur van de Nederl. Bank, Lid van het Hoofdbestuur der Maatsch.: *Tot Nut van 't Algemeen*, enz., te *Amsterdam*. . . . . 1812.

Digitized by Google

F. J. Stamkart, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, enz., *Amsterdam*. . . . . 1824.
W. Top, Wzn., Kostschoolhouder te *Zierikzee*. . . . 1824.
J. Barsan, Onderw. in de Wiskunde, enz., te *Amsterdam*. 1827.
J. Jonkhart, *Math. et Phil. Nat. Cand.*, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde in de Kweekschool voor de Zeevaart, te *Amsterdam*, onder *Nieuwer-Amstel*. . . 1827.
H. van Blanken, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, Stads-Lector in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, te *Zwolle*. . . . . 1833.
J. Acquoy, Onderwijzer, te *Amsterdam*. . . . . 1837.
S. Dik, Cornz., Ingenieur van den Waterstaat en 's Lands Gebouwen, in ambulante dienst, in *Neêrl. Indië*, thans te *Panaroekän*, op *Java*. . . . . 1842.
Jonkh. W. J. C. Rammelman Elsevier, te *Leijden*. . . 1846.
G. W. F. Barr, Leeraar in de Wiskunde aan het Stedelijk-Gymnasium, te *Middelburg*. . . . . 1848.

KORRESPONDENTEN.

A. Harreboer, te *Heemstede*, voor *Haarlem*. . . . . 1802.
J. G. Arson, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Lector in de Wis- en Zeevaartkunde bij de Koninkl. Marine, Lid van de Commissie tot het examineren der Zee-Officieren, enz., te *Rotterdam*, voor *Rotterdam*. . 1813.
A. L. Hector, te *Middelburg*, voor de Provincie *Zeeland*. (Zie boven) . . . . . 1827.
J. Deelman, *Oud- 2e. Secretaris*, te *Deventer*, voor de Provincie *Overijssel* en een gedeelte van *Gelderland* . 1837.
C. J. Bolten, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te *Leeuwarden*, voor de Provincie *Friesland*. . . . . 1837.
J. Tromp, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, Besturend Lid van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetensch., Hoofd-Ingenieur van den Waterstaat en van 's Lands Gebouwen in *Neêrl. Indië*, te *Batavia*; voor *Neêrl. O. Indië* . . . . . 1848.
G. ten Brummeler, Wz. Onderwijzer in de Wiskunde, te *'s Hage*, voor *'s-Hage* . . . . . 1849.

Digitized by Google

GEWONE LEDEN.

A. Harrebomée, te *Heemstede*. (Zie boven) . . . (*) 1798.
H. G. Witlage, 2e. *Secretaris*; te *Amsterdam*. (Zie boven) 1804.
A. L. Hector, Onderw., te *Middelburg*. (Zie boven) . . 1806.
A. van der Swan, *Bestuurder*, te *Amsterdam*. (Zie boven) 1807.
A. Fock, *Oud-Bestuurder*, te *Amsterdam*. (Zie boven) . 1808.
L. van Heusden, Opzigter bij de Werken van 's Rijks Droogmakerijën aan den *Uithoorn* . . . . . 1808.
D. S. Waterman, Landmeter der 1e. Klasse van het Kadaster voor de Dienst te Velde, te *Amsterdam*. . . 1808.
R. Lobatto, te *Delft*. (Zie boven). . . . . 1813.
J. Deelman, *Oud-* 2e. *Secretaris*, te *Deventer*. (Zie boven) 1813.
S. J. Mulder, Doctor in de Wijsbegeerte, Inspecteur der Nederlandsch Israëlitische Godsdienstige Scholen, Onderwijzer in de Hebreeuwsche Taal aan het Stedelijk Gymnasium, enz. enz., Beëedigd Translateur, te *Amsterdam* 1813.
H. van Wesser, Jzn., *Bestuurder*, te *Amsterdam*. (Zie boven) . . . . . 1813.
H. F. Fijnje, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te *Groningen*. . . . . 1813.
J. G. Amon, te *Rotterdam*. (Zie boven) . . . . . 1813.
C. J. Glavimans, Ridder van de Orde van den Nederl. Leeuw, *Lid der* 1e. Klasse van het Kon.-Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Lid van het Prov. Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, te *Utrecht*, van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te *Rotterdam*, Constructeur bij het Departement der Marine van de Maas, enz., enz., te *Rotterdam*. . . . . 1814.
C. J. Boltes, te *Leeuwarden*. (Zie boven) . . . . 1818.
S. F. Klijnsma, Kommandeur van de Orde van de Eikenkroon, Ridder van de Militaire Willems-Orde 4e. Klasse en van de Orde van den Nederl. Leeuw, Luit.-Kolonel; Ingenieur en Kommandant van het Bataljon Mineurs en Sappeurs, Lid van het Prov. Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetensch., te *Utrecht*, enz., enz., te *Arnhem*. 1819.
J. P. Delprat, *Oud-* 1e. *Secretaris*, te *Breda*. (Zie boven) 1819.

(*) *Jaartallen van den aanvang van het Lidmaatschap.*

Digitized by Google

W. Top, Wz., Kostschoolhouder, te *Zierikzee*. (Zie boven) 1819.
C. F. Julius, *Bestuurder*, Onderwijzer, te *Amsterdam*. (Zie boven) . . . . . 1820.
G. A. van Kerkwijk, te *Vlissingen*. (Zie boven). . . 1820.
C. van Heijnsbergen, *Art. Lib. Mag. Phil. et Med. Doctor*, eerste Hoogleeraar der Wiskunde aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te *Medemblik*. . . 1821.
H. Weijting, *Penningmeester* en *Bibliothecaris* des Genootschaps, te *Amsterdam*. (Zie boven). . . . . 1822.
J. Bassan, Onderwijzer in de Wiskunde, te *Amsterdam*. (Zie boven). . . . . 1822.
J. Acquoy, Onderwijzer, te *Amsterdam*. (Zie boven). . 1822.
F. J. Stamkart, *Bestuurder*, te *Amsterdam*. (Zie boven). 1823.
J. Jonkheer, onder *Nieuwer-Amstel*. (Zie boven). . . 1823.
P. H. van der Meulen, Kapitein der Artillerie, te *Breda*. 1824.
J. Doorman, Kapitein der Artillerie, te *Utrecht* . . . 1825.
P. Huidekoper, Staatsraad in Buitengewone Dienst, Kommandeur van de Orde van den Nederl. Leeuw, Oud-Burgemeester en thans Lid van den Raad der Stad *Amsterdam*, enz., enz., te *Amsterdam*. . . . . 1826.
G. Graafland, te *'s Gravenhage*. . . . . 1826.
E. Olivier, Dz., Eerste-Landmeter bij de Algemeene dienst van den Waterstaat, te *'s Hage*.. . . . . 1827.
Jonkh. W. J. C. Rahusman Elsevier, te *Leijden*. (Zie boven) . . . . . 1827.
W. A. Froger, Ridder van de Orde van de Eikenkroon en Oud- 1e. Luitenant Ingenieur, te *Amsterdam*. . . 1828.
J. Badon Ghijben, 1e. *Secretaris*, te *Breda*. (Zie boven). 1828.
N. I. Barends, te *Amsterdam*. . . . . 1828.
L. J. Ulman, Arrondissements-IJker, enz., enz., te *Amsterdam*. . . . . 1829.
Jacob Swart, *Bestuurder*, te *Amsterdam*. (Zie boven) . 1829.
Isaac Warnsinck, *Vaste Secretaris* van de 4e. Klasse van het Koninkl. Nederl. Instituut van Wetensch., Letterk. en Schoone Kunsten, Lid van den Raad van Bestuur der Koninkl. Akademie van Beeldende Kunsten en *Secretaris* van de Maatschappij: *Tot bevordering der Bouwkunst*, te *Amsterdam*. . . . . 1829.
R. Spruit, 1e. Leermeester bij de Diaconie Scholen, te

Digitized by Google

Amsterdam. . . . . 1829.
H. van Blanken, te *Zwolle*. (Zie boven) . . . . . 1830.
J. Kollewijn, Kostschoolhouder, te *Schoonhoven*. . . 1830.
H. L. van Hoorn, te *Zutphen*. . . . . 1831.
Mr. E. Boas, Kanton-Regter van het 1e. Kanton, te *Amsterdam*. . . . . 1831.
S. Dik, Cornsz., in *Neêrl. Oost-Indië*, te *Panarookän*, op *Java*. (Zie boven). . . . . 1831.
L. J. de Koning, te *Haarlem*. . . . . 1831.
J. Jansz. Alberda, Directeur en Onderwijzer aan de Inrigting tot Onderwijs in Koophandel en Nijverheid, ter opleiding van Jongelingen tot den Koophandel, te *Amsterdam*. 1832.
D. van Lankeren Matthes, *Math. Mag. et Phil. Nat., Doctor*, Docent in de Wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium, te *Amsterdam*. . . . . 1832.
M. A. L. Bousquet, 1e. Kapt. Ingenieur, in *N. O.-Indië*. . 1833.
H. C. Bekker, Hoofd-Onderwijzer aan het Instituut van Opvoeding van van Kinsbergen, te *Elburg*. . . . 1833.
P. G. Cromert, Ridder van het Legioen van Eer van *Frankrijk*, Kapit.-Luitenant ter Zee, bij het Koninkl. Instituut voor de Marine, te *Medemblik* . . . . 1833.
D. W. Hinse, *Bestuurder*, Onderwijzer, te *Amsterdam*. . 1833.
D. N. Gerlhord, Kostschoolhouder, te *Noordwijk*. . . 1833.
J. van Maurik, Architect en Directeur van Stads Waterwerken, te *Amsterdam*. . . . . 1833.
T. de Vet, Arrondissements-IJker, te *Delft*. . . . . 1834.
H. W. Weijtingh, Boekhandelaar, te *Amsterdam*. . . 1834.
F. Stuart, Kostschoolhouder, te *Vianen*. . . . . 1834.
G. J. Kapteijn, Kostschoolhouder, te *Barneveld*. . . 1834.
K. Dekker, Lzn., Onderwijzer, te *Nieuwendam* . . . 1834.
J. M. Obreen, Onderwijzer in het Regtlijnig en Zeevaartkundig Teekenen, bij het Koninkl. Instituut voor de Marine, te *Medemblik* . . . . . 1834.
P. J. L. Quant, Ingenieur bij de Marine, bij het Hoofd-Departement van de Zuider-Zee, te *Amsterdam*. . . 1835.
H. J. Barnekate, Openbaar Onderwijzer, te *Almelo* . . 1836.
J. C. Olivier, Instituteur, te *Vlaardingen* . . . . 1836.
J. G. Ottema, *Phil. Theor. Mag. Litt. Hum. Doctor*, Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kuns-

Digitized by Google

ten en Wetenschappen, te *Utrecht*, *Secretaris* van het Provinciaal Vriesch Genootschap: Ter Beoefening van de Vriesche Geschied-, Oudheid- en Taalkunde, Praeceptor aan het Stedelijk-Gymnasium, enz., enz., te *Leeuwarden*. 1836.

Mr. J. Herrskerk, Abrahamsz., Regter-Plaatsvervanger bij de Arrondissements-Regtbank, te *Amsterdam* . . . 1836.

P. Kron, Instituteur, te *Amsterdam* . . . . . 1837.

C. H. J. van Berghuijs, *Math. et Phil. Nat. Candidaat* en Arrondissements-IJker, te *Deventer* . . . . . 1837.

J. A. Krajenbrink, te *Batavia*. (Zie boven) . . . . 1838.

A. van der Mey, Onderwijzer aan het Instituut van Opvoeding, te *Doesborgh* . . . . . 1838.

J. A. Hansen, Onderwijzer in de Wiskunde, te *Deventer*. 1838.

A. B. Brave, Onderwijzer, te *Amsterdam*. . . . . 1838.

A. Hulscher, *Litt. Hum. Candidaat*, te *Leeuwarden*. . 1838.

H. Middelburg, Gouverneur, te *Middelburg* in *Zeeland* . 1839.

T. A. F. Delprat, Lid van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te *Rotterdam*, 1e. Luit. der Artillerie aan de Koninkl. Militaire Akademie te *Breda*. 1839.

R. Bischoffsheim, te *Parijs* . . . . . 1839.

J. H. Schäfer, 1e. Luitenant bij het Korps Mineurs en Sappeurs, Geattacheerd bij de Koninkl. Militaire Akademie, te *Delft* . . . . . 1840.

P. J. A. van Rheede van der Kloot, Adjunct-Commies bij het Departement van Financiën te *'s Hage* . . . . 1840.

A. van Otterloo, Instituteur, te *Amsterdam* . . . . 1840.

B. P. Bogaerts, Arrondissements-IJker, te *Breda* . . . 1840.

J. P. A. François, Lid van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te *Rotterdam*, Hoofdonderwijzer in de Wiskundige Wetenschappen aan het Erasmiaansch Gymnasium, te *Rotterdam* . . . . 1840.

G. ten Brummeler, Wzn., Onderwijzer in de Wiskunde, te *'s Hage*. (Zie boven) . . . . . 1840.

R. van de Weerd, Lector bij het Volks-Onderwijs in de Wis-, Natuur-, Schei- en Werktuigkunde, opgerigt door de beide Amsterd. Dept. der Maatsch.: *Tot Nut van 't Algemeen*, en Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, te *Amsterdam* . . . . . 1840.

D. Bierens de Haan, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*,

Digitized by Google

Docent in de Wiskunde aan het Stedelijk-Gymnasium, te *Deventer* . . . . . 1841.
W. Corn. Verseput, te *Amsterdam*. . . . . 1841.
C. W. Smith, 2e. Luit. der Artillerie, te *Delft*. . . . 1841.
G. L. Kepper, Instituteur, te *Amsterdam*. . . . . 1841.
K. Scholte, Onderwijzer, te *Edam*. . . . . 1841.
A. Brorns, te *Amsterdam*. . . . . 1842.
J. D. Cochebat de la Morinière, V. D. M., laatst Predikant te *Luik*, te *Amsterdam*. . . . . 1842.
J. Wertheim, te *Wageningen*. . . . . 1842.
J. G. Walker, Onderwijzer, te *Rotterdam*. . . . . 1843.
S. Botter, te *Amsterdam*. . . . . 1843.
L. Verveer, Onderwijzer, te *Kampen*. . . . . 1843.
E. B. Asscher, *Med. Doctor*, te *Amsterdam*. . . . 1843.
J. A. N. Moorrees, te *Zalk*. . . . . 1844.
W. G. C. Greil, Ingenieur der 1e. Klasse van den Waterstaat en Landsgebouwen in de 3e. Afdeeling van *Java*, te *Soerabaija*. . . . . 1844.
C. P. Burger, *Phil. Nat. Cand.*, Lector in de Wis- en Natuurkunde aan het Instituut van Opvoeding, van van Kinsbergen, te *Elburg*. . . . . 1844.
S. E. Rosen, *Med. Doctor*, te *Amsterdam*. . . . . 1844.
P. van Baak, te *Soerabaija*. . . . . 1844.
J. van den Bogert, Hoofdonderwijzer, te *Oldenzaal*. . 1845.
A. de Bruijn, Mz., Onderwijzer, te *Amsterdam*. . . . 1845.
J. Ravenek, Jr., Onderwijzer in de Wiskunde aan het Erasmiaansch Gymnasium, te *Rotterdam*. . . . . 1845.
J. H. van Koten, Onderwijzer in de Wis- en Natuurkunde, te *Amsterdam*. . . . . 1845.
E. R. Verheer, Onderwijzer in de Wiskunde, te *Amsterdam*. 1845.
H. van den Berg, Onderwijzer, te *Montfoort*. . . . 1845.
W. L. Ivanch, Kapitein der Infanterie, te *Breda*. . . 1845.
J. B. Geel, Onderwijzer en Organist in de Wester Kerk, te *Amsterdam*. . . . . 1845.
J. M. Goudsmit, te *Amsterdam*. . . . . 1845.
N. A. T. Arriëns, Controleur der Landelijke Inkomsten en Cultures, te *Kediri*, thans met verlof in *Nederland*, te *'s Hage*. . . . . 1846.
P. J. G. Beijerinck, Ingenieur van den Waterstaat en

Digitized by Google

van 's Lands-Gebouwen, te *Soerabaija* . . . . . 1846.
H. S. Cretier, Onderwijzer, te *Amsterdam*. . . . . 1846.
V. S. M. van der Willigen, *Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor*, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkunde, te *Deventer*. . . . . 1846.
J. van Varik, Onderwijzer, te *'s Graveland*. . . . . 1846.
C. Julius, C.Fz., Kostschoolhouder, te *Beverwijk*. . . 1846.
L. Horfnagel, Onderwijzer, te *Westerland* op het eiland *Wieringen*. . . . . 1846.
J. F. Gordkoop, Gezworen Landmeter der 1e. Klasse, te *Passaroewan*, op *Java*. . . . . 1846.
W. Noordijk, Onderwijzer, te *Amsterdam*. . . . . 1846.
Adrianus Bruinier, Cargadoor, te *Amsterdam*. . . . 1846.
M. E. C. Plemp, Elève van de Koninkl. Akad., te *Delft*. 1846.
J. A. Stamkart, Student in de Letteren, te *Amsterdam*. 1846.
A. A. Moll, Onderwijzer, te *Hengelo* in *Gelderland*. . 1846.
L. Cohen Stuart, Student aan de Koninkl. Akad., te *Delft*. 1847.
G. B. Heideman, te *Amsterdam*. . . . . 1847.
G. F. W. Baehr, te *Middelburg*. (Zie boven). . . . 1847.
J. Tromp, te *Batavia*. (Zie boven). . . . . 1847.
A. Gildemeester, te *Amsterdam*. . . . . 1848.
W. van Haarst, Jr., Onderwijzer in de Renswoudsche Fundatie, te *Delft*. . . . . 1848.
C. A. J. Gersink, te *Amsterdam*. . . . . 1848.
G. F. van Limborch van der Meersch, 1e. Luitenant Ingenieur, in Garnizoen te *Naarden*. . . . . 1848.
F. C. Delfos, Onderwijzer, te *Amsterdam* . . . . 1848.
P. C. de Vos, Arrondissements-IJker, te *Middelburg*. . 1848.
M. H. Pimentel, Hoofdonderwijzer bij de Klasse van Meetkunde aan de Stads-Teekenakademie, te *'s Hage*. . . 1848.
P. M. Lansberg, Onderwijzer in de Nederduitsche en Fransche Talen, te *'s Hage* . . . . . 1848.
Lodewijk Hartog, te *Amsterdam*. . . . . 1848.
Leendert Janse, Bz., Lector in de Natuurkunde en Lid van het Zeeuwsch Genootschap, te *Middelburg*, te *Middelburg*. . . . . 1849.
Mr. J. J. Teding van Berkhout, te *Amsterdam*. . . . 1849.
J. J. Abbink, Beëedigd Translateur, te *Amsterdam*. . . 1849.
H. Overmars, Jr., te *Amsterdam*. . . . . 1849.

Digitized by Google

CHRISTIAAN PIEK, Onderwijzer van den 2den. Rang op *Java*, te *Batavia*. . . . . 1849.

JAN RINGELING, Leeraar in de Wiskunde aan het Stedelijk-Gymnasium, te *'s Hertogenbosch*. . . . . 1849.

A. O. VAN DEN SANTHEUVEL, Elève aan de Koninkl. Akad., te *Delft*. . . . . 1849.

H. DE NEUFVILLE, Elève aan de Koninkl. Akad., te *Delft*. 1849.

A. J. L. LEMPT, Bijzonder Onderwijzer in de Moderne Talen, te *Bennebroek*. . . . . 1849.

F. NAGTGLAS, Arrondissements-IJker, te *Zierikzee*. . . 1849.

I. J. VAN LIMBURG BROUWER, Candidaat in de Wis- en Natuurkunde, te *Leijden*. . . . . 1849.

J. HESS, te *Amsterdam*. . . . . 1849.

M. J. VAN BUUREN, te *Amsterdam*. . . . . 1849.

J. H. VAN SILLEVOLDT; 1°. Onderwijzer in de Reken-, Stel- en Meetkunst aan het Stedelijk-Gymnasium, te *'s Gravenhage*. . . . . 1849.

F. W. VAN GENDT, te *Amsterdam*. . . . . 1850.

Z. W. VAN SCHREVEN, te *Zwolle*. . . . . 1850.

Digitized by Google

Digitized by Google

WISKUNSTIGE OPGAVEN

MET DEZELVER

ONTBINDINGEN.

I. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

Men vraagt eenige van de voornaamste eigenschappen en de vergelijkingen der kegelsneden af te leiden, uit de beschouwing van twee bollen, welke, het vlak der kegelsnede aanrakende, door het kegelvlak omhuld worden.

Opgelost *door* T. A. F. Delprat.

Oplossing *van* T. A. F. Delprat.

A. Laten O en O′ (Fig. 1) de middelpunten zijn van twee bollen, aan dezelfde zijde van den top S des omhullenden kegels gelegen; zij voorts APBQ een plat vlak, hetwelk deze bollen in F en F′ raakt, dan zal men, daar de loodlijnen OF en O′F′ op dat vlak onderling evenwijdig zijn, door deze loodlijnen en de as SO′ een vlak MSN kunnen brengen; dit vlak MSN, het omhullende kegelvlak, volgens de lijnen SM en SN snijdende, zal dan loodregt op het vlak APBQ zijn, en hetzelve snijden volgens de lijn AB, welke door de raakpunten F en F′ gaat. Van de kromme lijn APBQ, volgens welke het kegelvlak nu door het platte vlak APBQ gesneden wordt, kunnen wij dan, op eene eenvoudige wijze, de volgende belangrijke eigenschappen opsporen.

1°. Trekken wij, door eenig punt P van de kromme, de lijnen SC′, PF en PF′, dan zal SC′ eene beschrijvende lijn van het kegelvlak zijn, en dus met de cirkelomtrekken KL en MN, volgens welke de bollen omhuld worden, de punten C en C′ gemeen hebben. Daar deze cirkels loodregt op de as SO′ en dus onderling evenwijdig zijn, zoo zijn de stukken CC′, KM en LN, door hun van de beschrijvende

Digitized by Google

lijnen afgesneden, even groot. Ook is PF = PC en PF′ = PC′, als zijnde deze lijnen, twee aan twee, raaklijnen uit een zelfde punt buiten een bol aan dien bol getrokken.

Wij hebben dus

$$PF + PF' = PC + PC' = CC' = KM = LN,$$

en daar deze eigenschap doorgaat, voor elk willekeurig punt P der kromme, zoo volgt hieruit: dat deze in een plat vlak gelegene, onafgebrokene en in zich zelve wederkeerende kromme lijn, de eigenschap heeft, dat de som der lijnen, uit eenig punt P van dezelve, naar de in haar vlak gelegene punten F en F′ getrokken, overal even groot, en wel gelijk aan KM of LN zal zijn.

2°. Deze eigenschap ook plaats hebbende voor de punten A en B, zoo is

$$AF + AF' = BF + BF';$$

en hiervan aan weerszijden FF′ aftrekkende, vinden wij

$$AF' = BF.$$

De punten F en F′ liggen alzoo even ver van de uiteinden A en B, en dus ook van het midden E der lijn AB.

3°. Hieruit volgt verder, dat wij, in plaats van

$$AF + AF' = CC',$$

ook zullen mogen schrijven

$$AF + BF = CC';$$

dat is

$$AB = CC'.$$

De som der lijnen PF en PF′ is dus overal gelijk aan AB.

4°. Onderstellen wij, dat in het vlak APBQ eene lijn RV getrokken is, de kromme in eenig punt P rakende, dan zal deze raaklijn geheel gelegen zijn in een vlak, hetwelk den kegel volgens SC′, en dus de bollen in C en C′ raakt. Worden dus, uit eenig punt R der raaklijn, de lijnen RF′ en RC′ getrokken, zoo zullen deze lijnen den bol MF′N raken, en de driehoeken RF′P en RC′P zijn dan gelijk en gelijkvormig, omdat RF′ = RC′ en PF′ = PC′ is; hieruit volgt

$$\textit{hoek}\ F'PR = \textit{hoek}\ RPC'.$$

Worden evenzoo, uit eenig punt V der raaklijn, de lijnen VF en VC getrokken, zoo raken deze lijnen den bol KFL, en dus zijn dan ook weder, omdat VF = VC en PF = PC

Digitized by Google

is, de driehoeken VFP en VCP gelijk en gelijkvormig, waaruit volgt

$$\textit{hoek}\ \mathrm{FPV} = \textit{hoek}\ \mathrm{CPV}.$$

Maar de hoeken RPC' en CPV zijn als overstaande hoeken aan elkander gelijk, en derhalve is dan ook

$$\textit{hoek}\ \mathrm{FPV} = \textit{hoek}\ \mathrm{F'PR};$$

waaruit blijkt, dat de lijnen PF en PF' met de raaklijn RV gelijke hoeken maken.

5°. De in 3° bewezene eigenschap eindelijk is toereikend, om de vergelijking der kromme te vinden.

Nemen wij daartoe de lijn AB tot as der x, en haar midden E tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aan; stellen wij $AB = 2a$, $PF = v$, $PF' = v'$, $EF = EF' = e$, en laten x en y de coördinaten van het punt P zijn, dan hebben wij

$$v = \sqrt{\{y^2 + (e + x)^2\}}$$

en

$$v' = \sqrt{\{y^2 + (e - x)^2\}},$$

waaruit door optelling volgt, omdat $v + v' = 2a$ is,

$$2a = \sqrt{\{y^2 + (e + x)^2\}} + \sqrt{\{y^2 + (e - x)^2\}}$$

of

$$2a - \sqrt{\{y^2 + (e - x)^2\}} = \sqrt{\{y^2 + (e + x)^2\}};$$

deze vergelijking in het vierkant brengende, komt er na herleiding

$$a^2 - ex = a\sqrt{\{y^2 + (e - x)^2\}},$$

en zoo wij deze andermaal tot de tweede magt verheffen, gaat zij over in

$$(a^2 - e^2)(a^2 - x^2) = a^2y^2.$$

De waarde van y, welke met $x = 0$ overeenstemt, door b voorstellende, is $a^2 - e^2 = b^2$; en hierdoor wordt de gevondene vergelijking geene andere, dan de gewone vergelijking der ellips

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

B. Indien de twee bollen aan weerszijden van den top S des omhullenden kegels geplaatst zijn, zoo als in Fig. 2 is voorgesteld; en wij dan, door de bij die figuur geplaatste letters, dezelfde of de overeenkomstige lijnen en vlakken als bij Fig. 1 aanduiden, kunnen wij ook, op eene even eenvoudige wijze, de eigenschappen der kromme lijn APBQ vinden,

Digitized by Google

volgens welke het omhullende kegelvlak gesneden wordt door het platte vlak APBQ, dat de bollen in F en F' raakt.

1°. Voor eenig punt P van die kromme, hebben wij namelijk weder PF = PC en PF' = PC', waaruit volgt

$$PF - PF' = PC - PC' = CC' = KM = LN;$$

het verschil der afstanden, van eenig punt P der kromme tot de punten F en F', is alzoo standvastig gelijk aan KM of LN.

2°. Voor de punten A en B hebben wij dus ook

$$AF - AF' = BF' - BF;$$

en hiervan aan weerszijden AB aftrekkende, vinden wij

$$AF' = BF,$$

waaruit blijkt, dat ook hier de punten F en F' even ver van de uiteinden A en B, en dus ook van het midden E der lijn AB verwijderd zijn.

3°. Diensvolgens zullen wij, in plaats van

$$AF - AF' = CC',$$

wederom mogen schrijven

$$AF - BF = CC',$$

dat is

$$AB = CC';$$

zoodat nu het verschil der lijnen PF en PF' overal gelijk aan AB is.

4°. Hetgeen in *A*, onder 4°, voor de ellips gezegd is, letterlijk op Fig. 2 toepassende, vinden wij ook hier weder

hoek F'PR = *hoek* RPC' en *hoek* FPV = *hoek* CPV;

maar alsnu zijn de hoeken RPC' en CPV elkanders supplementen, en bijgevolg is dan ook de hoek FPV het supplement van den hoek F'PR, of gelijk aan den hoek F'PV, zoodat bij de kromme van Fig. 2, de raaklijn van eenig punt P, den hoek FPF' middendoordeelt.

5°. De lijn AB tot as der x, en haar midden E tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aannemende, geraken wij, even als in *A*, tot de vergelijkingen

$$v' = \sqrt{\{y^2 + (x - e)^2\}}$$

en

$$v = \sqrt{\{y^2 + (x + e)^2\}};$$

waaruit nu door aftrekking volgt

$$2a = \sqrt{\{y^2 + (x + e)^2\}} - \sqrt{\{y^2 + (x - e)^2\}};$$

na verdrijving der wortelgrootheden komt er dan, zoo wij $e^2 - a^2 = b^2$ stellen, de gewone vergelijking der hyperbool

Digitized by Google

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

C. Laat nu nog O (Fig. 3) het middelpunt van éénen bol zijn, die volgens den cirkel KCL omhuld wordt, door een kegelvlak waarvan MSN eene centrale doorsnede voorstelt; zij verder QBP een plat vlak, loodregt op het vlak MSN, evenwijdig met de beschrijvende lijn SM, en den bol in het punt F rakende, dan zal dit vlak QBP het kegelvlak, volgens eene in het oneindige voortloopende kromme lijn QBP, snijden, welker voornaamste eigenschappen op de volgende wijze kunnen gevonden worden.

1°. Trekken wij, uit eenig punt P van de kromme, de beschrijvende lijn PS, alsmede de lijn PF, zoo blijkt al dadelijk, dat PF = PC = LH is; maar BH = AB en BL = BF zijnde, zoo is LH = AB + BF, en dus ook

$$PF = AB + BF.$$

Alzoo is de afstand van elk punt P der kromme tot het punt F, gelijk aan de projectie van haren boog BP op de lijn BO', opgeteld met de standvastige BF.

2°. Brengen wij, door de beschrijvende lijn SP, een rakend vlak aan den kegel, en zij V deszelfs snijpunt met de lijn AB; indien wij dan in dat vlak de lijnen VP en VC trekken, zal VP eene raaklijn der kromme in het punt P zijn, terwijl VC den bol KLF in C zal raken. Wij hebben dan weder VF = VC, en daar ook PF = PC is, zijn alzoo de driehoeken VFP en VCP gelijk en gelijkvormig, waaruit volgt

$$\textit{hoek}\ FPV = \textit{hoek}\ CPV.$$

Brengen wij verder door het punt O', alwaar het vlak QBP de as SO' snijdt, een vlak MN loodregt op deze as, dan zal het punt P zich op het vlak MN in een punt J van den straal O'E projecteren; voorts zal eene lijn PD, evenwijdig met BO' getrokken, de gemeene doorsnede QR der vlakken QBP en MN ergens in D ontmoeten; terwijl eindelijk de doorsnede RE, van het rakende vlak SPV met het vlak MN, loodregt op den straal O'E zal staan, en de doorsnede QR in een zelfde punt R met de raaklijn VR zal ontmoeten.

Digitized by Google

Daar nu de hoeken PDR en PER beide regt zijn, en PD = MG = PE is, zijn de driehoeken PDR en PER, welke bovendien nog de zijde PR gemeen hebben, gelijk en gelijkvormig; hieruit volgt

$$\textit{hoek}\ \text{DPR} = \textit{hoek}\ \text{RPE} = \textit{hoek}\ \text{CPV},$$

maar wij vonden reeds *hoek* FPV = *hoek* CPV, en dus is ook

$$\textit{hoek}\ \text{DPR} = \textit{hoek}\ \text{FPV}.$$

De raaklijn RV maakt alzoo gelijke hoeken met de lijnen PD en PF.

3°. Wijders is ook nog *hoek* DPR = *hoek* FVP, en dus *hoek* FPV = *hoek* FVP, waaruit blijkt, dat de driehoek FPV gelijkbeenig is, en men alzoo heeft

$$\text{PF} = \text{VF}.$$

De raaklijn VR snijdt derhalve de lijn AB ergens in een punt V, dat op denzelfden afstand als het punt P van F verwijderd is.

4°. In 1° vonden wij, dat PF = AB + BF is; dus hebben wij dan mede

$$\text{VF} = \text{AB} + \text{BF} \quad \text{of} \quad \text{VF} - \text{BF} = \text{AB},$$

dat is

$$\text{BV} = \text{AB};$$

de subtangens AV is bijgevolg het dubbel van de abscis AB.

5°. Nemen wij BO′ tot as der x, en B tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aan; stellen wij BF = q, PF = v en laten x en y de coördinaten van het punt P zijn, dan hebben wij dadelijk

$$v^2 = y^2 + (x - q)^2;$$

terwijl, zoo als wij in 1° vonden

$$v = x + q$$

is. Hieruit volgt dan

$$(x + q)^2 = y^2 + (x - q)^2,$$

of na vereenvoudiging

$$y^2 = 4qx,$$

en zoo wij $4q = p$ stellen

$$y^2 = px;$$

de bekende vergelijking der parabool.

Aanmerking. Daar wij ons slechts voorstelden, om de algemeen bekende eigenschappen der kegelsneden op eene

Digitized by Google

eenvoudige wijze te vinden, hebben wij ons tot het bovenstaande bepaald, en ter bekorting opzettelijk weggelaten alle gevolgtrekkingen, welke de gedaante, de symmetrie, enz. der krommen betreffen; zoo ook de eigenschappen der brandpuntsordinaten, en der raaklijnen tot deze ordinaten behoorende; gelijk mede de beschouwing van het aantal punten, welke de snij- of raaklijnen met de kromme kunnen gemeen hebben. Al hetwelk uit de eenvoudigste eigenschappen des kegels, en naar aanleiding van de bovenverkregene uitkomsten, zeer gemakkelijk te vinden, en immers bij al onze lezers overbekend is. Wij willen dus alleen nog de volgende bijzonderheid doen opmerken, die met de voorgaande beschouwingen in een meer onmiddellijk verband staat.

Uit de vergelijking der ellips blijkt, dat deze kromme lijn geheel bepaald is, door de groote as $2a$ en de uitmiddelpuntigheid e. Nemen wij dus, op den in Fig. 1 voorgestelden straal OF, eenig punt O′ (Fig. 4) als middelpunt van eenen nieuwen bol aan, welke O′F tot straal heeft, zoo kan men dezelfde ellips APBQ ook beschouwen als de doorsnede van een kegelvlak AS′B, hetwelk dezen nieuwen bol omhult; want a en e blijven hierdoor onveranderd. De toppen nu der verschillende kegels, die op deze wijze alle dezelfde ellips APBQ gemeen hebben, liggen in eene hyperbool.

Om dit aan te toonen hebben wij

$$AS' = AK' + K'S' = AF + L'S'$$

en

$$BS' = BL' + L'S' = BF + L'S',$$

waaruit door aftrekking volgt

$$AS' - BS' = AF - BF = FF' = 2a;$$

de meetkunstige plaats der kegeltoppen S, S′, enz. is dus eene hyperbool, waarvan A en B de brandpunten, FF′ de eerste as, F en F′ de toppen zijn.

De hyperbool van Fig. 2, op eene overeenkomstige wijze, beschouwende als tot verschillende omhullende kegels te behooren, vindt men gemakkelijk voor de meetkunstige plaats dier kegeltoppen eene ellips; terwijl men desgelijks vinden zal, dat de toppen der omhullende kegels, tot de parabool van Fig. 3 behoorende, wederom in eene parabool gelegen zijn.

Digitized by Google

II. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

Twee glazen platen sluiten zoodanig aan elkander, dat zij eenen zeer kleinen tweevlakkigen hoek vormen, en worden in dien toestand zóó in een vat met water gesteld, dat de ribbe van den genoemden tweevlakkigen hoek loodregt op den waterspiegel staat. Men vraagt te bewijzen, dat het water, door de capillariteit tusschen de platen oprijzende, op dezelve eene hyperbool zal afteekenen, alsmede de vergelijking van die hyperbool te vinden.

Opgelost *door* T. A. F. Delprat, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* T. A. F. Delprat.

Laat AC (Fig. 5) de ribbe van den tweevlakkigen hoek verbeelden, gevormd door de glazen platen BC en b C, welke zoodanig in een vat met water gesteld zijn, dat de ribbe AC loodregt op den waterspiegel VW staat; dan zal de waterspiegel den genoemden tweevlakkigen hoek volgens zijnen standhoek BA b snijden. Indien nu deze hoek BA b klein genoeg genomen wordt, om door de capillaire werking der platen, het vocht tusschen deze te doen rijzen, zal op hunne binnenzijde door het vocht eene hyperbool afgebeeld worden, waarvan wij, door de volgende beschouwingen geleid, gemakkelijk de vergelijking kunnen opmaken.

De proeven en berekeningen omtrent de capillariteit hebben geleerd: *Vooreerst*, dat in de zoogenaamde capillaire- of haar-buizen de opklimming van het vocht, boven den omringenden vochtspiegel, altijd omgekeerd evenredig is met de middellijn der buis; en *ten andere*, dat bij twee concentrische cilinders AB en ab (Fig. 6), het vocht in de tusschengelegene cilinder-ruimte AB a b eene hoogte zal bereiken, gelijk aan die, welke bereikt zou worden in eene haarbuis, het verschil der stralen tot straal, of tweemaal den afstand A a tot middellijn hebbende, (zie deswegens Pouillet, *Elem. de Phys.*, 4e Ed., Tom. II, pag. 8).

Deze laatste wet, alleen afhankelijk zijnde van het verschil der stralen, en niet van de grootte der stralen zelven, zal alzoo waar blijven, hoe groot deze ook genomen worden, en dus ook nog voor twee evenwijdige platte vlakken door-

Digitized by Google

gaan, welke men als cilindervlakken, met oneindig groote stralen beschreven, mag beschouwen. Bij evenwijdige platen AB en ab (Fig. 7) zal dienvolgens de opklimming van het vocht omgekeerd evenredig zijn met hunnen afstand A a, en onafhankelijk van hunne breedte AA′ of a a′. Deze gevolgtrekking is bovendien door proeven voldingend bewezen.

Het zij men dus de plaats hebbende capillaire werking, bij de in ons vraagstuk bedoelde platen (Fig. 5), vergelijke bij die eener reeks van haarbuizen tusschen de platen gesteld; of wel dat men in elke doorsnede, loodregt op de lijn genomen, welke den hoek BA b middendoordeelt, het vocht beschouwt als tusschen twee evenwijdige verticale strooken QP en q p geplaatst te zijn; dit is zeker: dat in beide gevallen de opklimming omgekeerd evenredig zal zijn met Q q.

Wanneer wij nu, het punt A tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aannemende, AQ $= x$, PQ $= y$, AB $= b$ en B b $= a$ stellen, hebben wij de evenredigheid

$$b : x = a : Qq;$$

maar ingevolge het boven aangemerkte, hebben wij ook nog

$$y : BD = a : Qq,$$

waarin BD, of de opklimming bij B, afhankelijk is van den afstand a en van den aard der gebezigde stoffen. Deze twee evenredigheden geven ons

$$b : x = y : BD$$

en hieruit volgt, zoo wij $b \times BD = m^2$ stellen,

$$xy = m^2;$$

de bekende vergelijking eener gelijkzijdige hyperbool, ten opzigte van de onderling loodregte asijmptoten AB en AC.

Aanmerking. De hoogte welke het vocht langs AC zal bereiken, is even als BD afhankelijk van den aard der gebezigde stoffen, en wordt dus in deze algemeene beschouwing onaangeroerd gelaten, daar wij ons slechts voorstelden den vorm der kromme, door het vocht op de binnenzijde der platen afgebeeld, na te gaan.

Wij onderstelden eindelijk, dat de capillaire werking het vocht aan de binnenzijde der platen werkelijk boven den omringenden vochtspiegel optrok; of volgens eene daartoe gebruikelijke uitdrukking, dat het vocht de platen nat maakte. Hetgeen b. v. bij water en glas het geval is. Heeft er eene

Digitized by Google

tegengestelde werking plaats, zoo als b. v. bij kwik en glas, of bij water en vet glas, het geval zou zijn, dan zal het vocht binnen de platen beneden den omringenden vochtspiegel blijven; doch daar het rijzen en dalen, ten gevolge der capillariteit, volkomen dezelfde wetten volgt, zoo zullen wij voor dit laatste geval slechts y als negatief behoeven aan te merken, en daardoor een hyperbool in den stand C'D' verkrijgen.

III. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

Eene horizontaal geplaatste staaf, die men als onbuigbaar en zonder gewigt aanneemt, rust in A *en* B (Fig. 8) *op twee steunpunten, waarvan de uiterste draagvermogens* P *en* Q *gegeven zijn. Wanneer men nu deze staaf, ergens tusschen* A *en* B, *eenen gegevenen last* $L < P + Q$ *wil laten dragen, is de vraag, hoe digt men met dien last* L *elk der steunpunten mag naderen, zonder deze te doen bezwijken.*

Opgelost *door* C. P. Burger, G. Koster, J. A. Hansen, H. Middelburg, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* C. P. Burger.

Laat C een punt der staaf zijn, in hetwelk zij den last L dragen kan; indien wij dan p en q de drukkingen noemen, door dezen last op de steunpunten A en B uitgeoefend, hebben wij, $AB = a$, $AC = x$ en $BC = y$ stellende, volgens de bekende regels der statica, de aaneengeschakelde evenredigheid

$$L : p : q = a : y : x;$$

waaruit volgt $$p = \frac{yL}{a} = \frac{(a - x)\,L}{a} \quad \ldots\ (1)$$

en $$q = \frac{xL}{a} = \frac{(a - y)\,L}{a}. \quad \ldots\ (2)$$

Nu zal, blijkens de vergelijking (1), p grooter worden naarmate x kleiner wordt, totdat eindelijk, wanneer de drukking p de grootste waarde P verkrijgt, die zij volgens de opgaaf hebben mag, x hare kleinste waarde zal verkregen hebben. Die kleinste waarde door $AC' = x'$ voorstellende, hebben wij dan volgens (1)

Digitized by Google

$$P = \frac{(a - x')\,L}{a},$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$AC' = x' = \frac{L - P}{L}a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit de vergelijking (2) blijkt desgelijks, dat y hare kleinste waarde $y' = BC'$ zal hebben, indien q de grootste waarde Q heeft, welke zij volgens de opgaaf mag hebben; zoodat dan ook

$$Q = \frac{(a - y')\,L}{a}$$

is, waaruit gevonden wordt

$$BC' = y' = \frac{L - Q}{L}a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De punten C' en C'', door de formulen (3) en (4) bepaald, zijn dan nu die punten der staaf, buiten welke de last niet aangebragt kan worden, zonder het bezwijken van een der steunpunten ten gevolge te hebben. Neemt men dan ook in (1) $x < \frac{L - P}{L}a$, zoo vindt men $p > P$; en neemt men in (2) $y < \frac{L - Q}{L}a$, zoo komt er $q > Q$.

Aanmerking van G. Koster. Voor de tusschenruimte, binnen welke de last $L < P + Q$ in een overigens willekeurig punt kan aangebragt worden, zonder het bezwijken van een der steunpunten te veroorzaken, hebben wij

$$C'C'' = a - x' - y' = a - \frac{L - P}{L}a - \frac{L - Q}{L}a;$$

dat is, na herleiding

$$C'C'' = \frac{(P + Q) - L}{L}a.$$

Voor $L = P + Q$, wordt $C'C'' = 0$; de last L kan dan slechts in een enkel punt der staaf gedragen worden. Voor $L > P + Q$, wordt $C'C''$ negatief, en de last kan dan nergens door de staaf gedragen worden, zonder dat een der steunpunten bezwijkt.

Digitized by Google

IV. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

In eene cilindervormige kuip, tot op eene zekere hoogte met water gevuld, wordt een houten bol geworpen, die daarin vrijelijk kan drijven, waardoor het water in de kuip a duim rijst. Vervolgens wordt hij er uitgenomen, en uitwendig met zoo veel lood van bekend soortelijk gewigt verzwaard, dat hij, andermaal in de kuip geworpen wordende, met het water in evenwigt blijft. Indien nu, door deze tweede indompeling, het water in de kuip b duim rijst, vraagt men, naar de grootte en het soortelijk gewigt van den houten bol, alsmede naar de hoeveelheid lood, met welke hij verzwaard is.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, G. Koster, H. Middelburg *en* W. C. Verseput.

I. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat de bodem der kuip c vierkante duim inhoud hebben, dan wordt, bij de eerste indompeling van den bol, ac kubieke duim water verplaatst. Volgens de bekende hydrostatische wet, weegt nu dit verplaatste water evenveel als de houten bol. Stellen wij dus, dat die bol p kubieke duim inhoud heeft, en dat zijn soortelijk gewigt x is, (het soortelijk gewigt des waters als eenheid aannemende), dan hebben wij

$$px = ac. \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Onderstellen wij verder, dat de bol met q kubieke duim lood verzwaard wordt, waarvan g het bekende soortelijke gewigt is, dan is, daar bij de tweede indompeling bc kubieke duim water verplaatst wordt, om gelijke reden als boven

$$px + qg = bc. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Omdat echter, bij deze tweede indompeling, de verzwaarde bol met het water in evenwigt is, zoo is ook deszelfs volumen gelijk aan het volumen water dat verplaatst wordt, en dus

$$p + q = bc, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zoodat wij nu drie vergelijkingen ter bepaling der drie onbekenden p, q en x hebben.

Uit (1) en (2) volgt door aftrekking $qg = c(b - a)$, en dus

Digitized by Google

$$q = \frac{c}{g}(b - a);$$

uit (3) is verder $p = bc - q$, of voor q de gevondene waarde inbrengende,

$$p = \frac{c}{g}\left\{bg - (b - a)\right\};$$

terwijl eindelijk uit (1) volgt $x = \frac{ac}{p}$, of zoo voor p de gevondene waarde gesubstitueerd wordt,

$$x = \frac{ag}{bg - (b-a)}.$$

Het soortelijk gewigt van den bol, is dus onafhankelijk van de grootte van den bodem der kuip; zijnde het overigens onverschillig, of deze den vorm van een' cilinder, dan wel van een prisma heeft.

Laat tot een bijzonder voorbeeld gegeven zijn $a = 1$ en $b = 1\frac{1}{4}$; laat voorts de bodem der kuip 40 vierkante palm groot zijn, en het soortelijke gewigt van het gebezigde lood 11,5, als wanneer $c = 4000$ en $g = 11{,}5$ is, dan hebben wij:

$$p = \frac{4000}{11{,}5}\left\{1\tfrac{1}{4} \times 11{,}5 - (1\tfrac{1}{4} - 1)\right\} = 4913\ \frac{1}{23}\ \text{kub. dm.},$$

voor de grootte van den houten bol;

$$q = \frac{4000}{11{,}5}\left\{1\tfrac{1}{4} - 1\right\} = 86\ \frac{22}{23}\ \text{kub. dm.},$$

voor de hoeveelheid lood, waarmede de bol verzwaard is; en

$$x = \frac{1 \times 11{,}5}{1\tfrac{1}{4} \times 11{,}5 - (1\tfrac{1}{4} - 1)} = 0{,}814,$$

voor het soortelijk gewigt van den houten bol.

II. Oplossing van J. A. Hansen.

Indien de bodem of de horizontale doorsnede der kuip c vierkante duim groot is, verplaatst de bol, bij de eerste indompeling, ac kubieke duim of wigtjes water, en derhalve weegt dan ook de houten bol ac wigtjes. De bol met lood verzwaard weegt evenzoo bc wigtjes, omdat hij bij de tweede indompeling bc kubieke duim of wigtjes water verplaatst; en het lood alleen weegt dus $bc - ac$ of $c(b - a)$ wigtjes. Laat nu, het soortelijk gewigt des waters als eenheid aannemende, dat van het lood g zijn, zoo moet het

Digitized by Google

gewigt van het lood door g gedeeld worden, om deszelfs volumen te vinden; het volumen van het lood is alzoo $\frac{c}{g}(b-a)$ kubieke duim. De bol, met het lood verzwaard, verplaatst bc kubieke duim water, maar is tevens met het water in evenwigt; derhalve heeft de bol met het lood een volumen van bc kubieke duim, en alzoo heeft de houten bol alleen, een volumen van $bc - \frac{c}{g}(b-a)$ of $\frac{c}{g}\left\{bg-(b-a)\right\}$ kubieke duim. Eindelijk wordt het soortelijk gewigt van den houten bol gevonden, wanneer men zijn gewigt in wigtjes, dat is ac, door zijn volumen in kubieke duimen, dat is $\frac{c}{g}\left\{bg-(b-a)\right\}$, deelt; dat soortelijk gewigt is alzoo $\frac{ag}{bg-(b-a)}$.

V. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Hoe groot zal een looden kogel moeten zijn, die in de holte van eenen gegevenen concentriek uitgeholden houten bol geplaatst wordt, om te maken, dat die bol, in het water geworpen wordende, met hetzelve in evenwigt is.

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. Bierens de Haan, J. A. Hansen, C. P. Burger, G. Koster, H. Middelburg *en* W. C. Versepuy.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij r de gegeven straal des bols. Indien dan het geheele uitgeholde gedeelte met lood moet gevuld worden, stelle men den straal van dit uitgeholde gedeelte, dat ook den vorm van eenen bol heeft, gelijk x; dan is er $\frac{4}{3}\pi x^3$ volumen lood en $\frac{4}{3}\pi(r^3-x^3)$ volumen hout. Laat nu g het soortelijk gewigt van het lood, en g' dat van het hout zijn, dan is het gewigt van den gevulden bol $\frac{4}{3}\pi x^3 g + \frac{4}{3}\pi(r^3-x^3)g'$ en het volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Omdat die bol in het water, welks soortelijk gewigt als eenheid aangenomen wordt, in evenwigt is, zoo heeft men

$$\frac{4}{3}\pi x^3 g + \frac{4}{3}\pi(r^3-x^3)g' = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

waaruit achtervolgens afgeleid wordt:

$$x^3(g-g') = r^3(1-g'),$$

Digitized by Google

$$s^3 = r^3\frac{1-g'}{g-g'},$$

en

$$s = r\sqrt[3]{\frac{1-g'}{g-g'}};$$

zoodat nu de straal van den looden kogel gevonden is.

Laat b. v. gegeven zijn: $g = 11{,}46$ en $g' = 0{,}76$, dan is $s = r\sqrt[3]{\frac{24}{70}} = 0{,}282r$; en de inhoud van den looden kogel is dan $\frac{1}{31}\frac{2}{3}$ van dien van den geheelen bol.

Indien echter het uitgeholde gedeelte van den houten bol, niet geheel door den looden kogel behoeft gevuld te worden, behoort ook de straal der uitholling gegeven te zijn. Voor dit geval stelle men dezen straal door r', en dien van den looden kogel wederom door x voor, dan is er $\frac{4}{3}\pi x^3$ volumen lood en $\frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3)$ hout, waarvan het gezamenlijk gewigt is $\frac{4}{3}\pi x^3 g + \frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3)g'$; zoodat men alsdan heeft

$$\frac{4}{3}\pi x^3 g + \frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3)g' = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^3(1-g') + r'^3 g'}{g}},$$

door welke formule nu wederom x uit de gegevene waarden van r, r', g en g' kan berekend worden.

Aanmerking. In de laatste onderstelling, kan echter r' niet naar willekeur gegeven zijn; omdat uit den aard der zaak x niet grooter dan r' zal mogen wezen. Men zal dus niet mogen hebben:

$$\sqrt[3]{\frac{r^3(1-g) + r'^3 g'}{g}} > r',$$

$$r^3(1-g) + r'^3 g' > r'^3 g,$$

$$r'^3(g-g') < r^3(1-g),$$

of

$$r' < r\sqrt[3]{\frac{1-g}{g-g'}};$$

dat wil dan zeggen, r' zal niet kleiner mogen gegeven zijn, dan de waarde, die wij in de eerste onderstelling voor x gevonden hebben.

VI. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Hoe groot moet de straal zijn van de cilindervormige opening, welke juist door het midden van een gegeven houten bol geboord en met een metaal van een bekend soortelijk

Digitized by Google

gewigt weder gevuld wordt, om te maken, dat die bol, in het water geworpen wordende, met hetzelve in evenwigt is.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, C. P. Burger, H. Middelburg *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat ABCDEF (Fig. 9) een' grooten cirkel van den bol, en ABDE de doorsnede van de cilindervormige opening voorstellen. Indien dan uit het middelpunt M de lijn MG loodregt op AE wordt getrokken, is MG de straal der cilindervormige opening, terwijl AG = GE is. Men stelle nu MG = x en AG = y, dan is vooreerst, de straal des bols gelijk r gegeven zijnde, $x^2 = r^2 - y^2$ en $x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$.

Laat verder g het soortelijk gewigt en P het volumen van het metaal zijn; zij desgelijks g' het soortelijk gewigt van het hout en Q deszelfs volumen; dan is, om gelijke redenen als in de oplossing van het voorgaande voorstel,

$$Pg + Qg' = \tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

hebbende in deze vergelijking g en g' gegevene waarden, terwijl P en Q nog onbekend zijn. Maar Q is blijkbaar de inhoud van het omwentelingsligchaam, dat door de omwenteling van het cirkelsegment AFE om de middellijn HI geboren wordt; en de inhoud van dat ligchaam is (zie J. Badon Ghijben, *Beg. der Meetk.*, § 436; Gevolg) gelijk aan een' bol, die AE tot middellijn of AG = y tot straal heeft. Alzoo is $Q = \tfrac{4}{3}\pi y^3$ en bijgevolg $P = \tfrac{4}{3}\pi r^3 - Q = \tfrac{4}{3}\pi(r^3 - y^3)$. Hierdoor gaat nu de voorgaande vergelijking over in

$$\tfrac{4}{3}\pi(r^3 - y^3)g + \tfrac{4}{3}\pi y^3 g' = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

of

$$r^3(g - 1) = y^3(g - g'),$$

waaruit volgt

$$y = r\sqrt[3]{\frac{g - 1}{g - g'}}.$$

Deze waarde van y overbrengende in $x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$, komt er voor den gevraagden straal,

$$x = r\sqrt{\left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{g - 1}{g - g'}\right)^2}\right\}}.$$

Laat b. v. gegeven zijn $g = 11{,}388$ en $g' = 0{,}84$, dan is: $\frac{g - 1}{g - g'} = \frac{10{,}388}{10{,}548}$, $y = r\sqrt[3]{\frac{g - 1}{g - g'}} = 0{,}9949r$, en dus $x = \sqrt{(r^2 - y^2)} = 0{,}1007r$.

Digitized by Google

VII. Voorstel.

Door L. Verveen, Jz.

Bij een getal van drie cijfers al de getallen optellende, die door verplaatsing van deszelfs cijfers kunnen ontstaan, komt er 26 meer dan 14 maal het getal. Wanneer nu nog bekend is, dat het verschil van de cijfers der eenheden en honderdtallen, gelijk is aan het dubbel van het cijfer der tientallen, vraagt men daaruit het getal te vinden.

Opgelost *door* C. P. Burger, E. B. Asscher, D. Bierens de Haan, S. M. Senr. Coronel, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, J. S. Speijer, L. Verveen, Jz., R. van de Weerd en J. J. Wolfs.

Oplossing *van* C. P. Burger.

Laat het getal zijn $100x + 10y + z$, dan zal, na het doen van alle mogelijke omzettingen, elk der cijfers tweemaal op elke plaats staan; en dus is de som van alle getallen, uit de cijfers x, y en z zamengesteld,

$(100 + 10 + 1) \times 2(x + y + z)$ of $222(x + y + z)$;

volgens de eerste voorwaarde des voorstels, is alzoo

$$222(x + y + z) = 26 + 14(100x + 10y + z),$$

waaruit men vindt

$$589x - 41y - 104z + 13 = 0.$$

Nu geeft de tweede voorwaarde

$$z - x = 2y \quad \text{of} \quad z = 2y + x,$$

en dit in de voorgaande vergelijking substituerende, komt er

$$589x - 41y - 104(2y + x) + 13 = 0$$

of

$$485x - 249y + 13 = 0,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{485x + 13}{249} = 2x - \frac{13(x - 1)}{3 \times 83}.$$

Daar nu x en y beide geheele getallen kleiner dan 10 moeten wezen, zoo kan de laatste breuk niet anders dan nul zijn. Hieruit volgt dan $x = 1$, $y = 2$ en $z = 2y + x = 5$; dus is het getal 125.

VIII. Voorstel.

Door L. Verveen, Jz.

Van een getal van vier cijfers is bekend, dat het cijfer der duizendtallen, het cijfer der honderdtallen, en de som

Digitized by Google

van de cijfers der eenheden en tientallen, drie op elkander volgende vierkanten zijn. Wanneer men nu nog bovendien weet, dat de som der beide uiterste cijfers gelijk is aan die der beide middelste, vraagt men hieruit het getal te vinden.

Opgelost *door* J. S. Speijer, E. B. Asscher, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, S. M. Sen^a. Coronel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, W. C. Versteput, L. Verveen, Jz., R. van de Weerd *en* J. J. Wolfs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat cijfers niet grooter dan 9 zijn, zullen de, in het voorstel bedoelde, op elkander volgende vierkanten, geene andere kunnen wezen dan 1, 4 en 9 of 4, 9 en 16. Volgens de laatste voorwaarde, moet ook de som der beide uiterste cijfers van het begeerde getal gelijk zijn aan die der beide middelste; de som van de vier cijfers, en dus ook die van de bewuste vierkanten, moet dus door 2 deelbaar zijn, weshalve wij voor die vierkanten alleen kunnen nemen 1, 4 en 9. Hieruit dan terstond blijkende, dat het cijfer der duizendtallen 1, het cijfer der honderdtallen 4, en de som van de cijfers der eenheden en tientallen 9 is, hebben wij, deze beide laatste cijfers door x en y voorstellende, de vergelijkingen

$$x + y = 9$$

en

$$1 + x = 4 + y,$$

waaruit dadelijk gevonden wordt $x = 6$ en $y = 3$. Het gevraagde getal is derhalve 1436.

IX. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Drie getallen klimmen in eene meetkunstige reden op. Indien hunne som 14, *en de som hunner vierkanten* 84 *is, welke zijn dan die getallen?*

Opgelost *door* J. A. Hansen, E. B. Asscher, C. P. Burger, J. H. van Kooten, G. Koster, P. Krom, J. S. Speijer, R. van de Weerd, S. M. Sen^a. Coronel, J. Heemskerk, Az., H. Middelburg, W. C. Versteput, J. J. Wolfs, D. Bierens de Haan, J. B. Geel *en* J. Wertheim, Johszn.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laten de drie getallen, die in eene meetkunstige reden

Digitized by Google

opklimmen, voorgesteld worden door x, rx en r^2x, dan is, volgens de opgave,

$$(1 + r + r^2)x = 14 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en

$$(1 + r^2 + r^4)x^2 = 84. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Deelt men (2) door (1), dan geeft dit

$$(1 - r + r^2)x = 6,$$

en deze vergelijking wederom in (1) deelende, komt er

$$\frac{1 + r + r^2}{1 - r + r^2} = \frac{7}{3};$$

dat is $3 + 3r + 3r^2 = 7 - 7r + 7r^2$

of $2r^2 - 5r + 2 = 0,$

waarvoor ook kan geschreven worden

$$(r - 2)(2r - 1) = 0.$$

Hieruit volgt nu $r = 2$ of $r = \frac{1}{2}$; maar, opdat de drie getallen werkelijk eene opklimmende reeks uitmaken, moet $r > 1$ zijn, en kan dus alleen de waarde $r = 2$ gebruikt worden. Alsdan volgt uit (1), $x = \frac{14}{1 + r + r^2} = \frac{14}{7} = 2$, en de gevraagde getallen zijn dus 2, 4 en 8; zijnde hunne som $2 + 4 + 8 = 14$, en de som hunner vierkanten $4 + 16 + 64 = 84$.

X. Voorstel.

Door G. L. Kepper.

Zoek vijf getallen, die aan de volgende voorwaarden voldoen: de som van de vierde magten der drie eerste, bij de som van de vierkanten der twee laatste opgeteld wordende, komt er 1732; ***de som van het eerste en tweede is gelijk aan het derde; de som van het eerste en derde is gelijk aan het vierde; de som van het eerste en vierde is gelijk aan het vijfde; en de som der drie middelste getallen is gelijk aan die der twee laatste.***

Opgelost *door* C. P. Burger, E. B. AschER, D. Bierens de Haan, S. M. Senr. Coronel, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. L. Kepper, G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, J. S. Speijer, W. C. Verseput, R. van de Weerd en J. J. Wolff.

Oplossing van C. P. Burger.

Stellende het eerste getal gelijk x en het tweede gelijk y, zoo volgt uit de drie middelste voorwaarden der opgave, dat

Digitized by Google

$x + y$ het derde, $2x + y$ het vierde, en $3x + y$ het vijfde getal zal zijn; zoodat dan de vijf gevraagde getallen voorgesteld worden door

$$x,\ y,\ x + y,\ 2x + y,\ 3x + y.$$

De laatste voorwaarde verschaft nu de vergelijking

$$y + (x + y) + (2x + y) = (2x + y) + (3x + y),$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$y = 2x;$$

en door deze waarde voor y te substitueren, zijn dan de vijf gevraagde getallen

$$x,\ 2x,\ 3x,\ 4x \text{ en } 5x,$$

zoodat nu de eerste voorwaarde ons geeft

$$x^4 + (2x)^4 + (3x)^4 + (4x)^2 + (5x)^2 = 1732.$$

Hieruit vinden wij achtervolgens:

$$98x^4 + 41x^2 = 1732,$$

$$x^4 + \frac{41}{98}x^2 = \frac{1732}{98},$$

en $x^2 = \dfrac{-41 \pm \sqrt{(1681 + 678944)}}{196} = \dfrac{-41 \pm 825}{196}$;

en daar het onderste teeken x^2 negatief, en dus x onbestaanbaar zou maken, hebben wij alleen

$$x^2 = \frac{-41 + 825}{196} = \frac{784}{196} = 4,$$

waaruit volgt $x = \pm 2$.

De vijf gevraagde getallen zijn derhalve: 2, 4, 6, 8 en 10; of -2, -4, -6, -8 en -10.

XI. Voorstel.

Door G. L. Kepper.

Men vraagt drie geheele positieve getallen te vinden, welker gedurig product 252 is; onder voorwaarde, dat er eene meetkunstige reeks komt, als men, deze drie getallen in het vierkant gebragt hebbende, van het tweede vierkant de eenheid aftrekt en bij het derde vierkant 63 optelt.

Opgelost *door* C. P. Burger, J. Bassan, D. Bierens de Haan, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, H. Middelburg, J. S. Speijer, R. van de Weerd *en* J. J. Wolfs.

Oplossing *van* C. P. Burger.

Stellen wij de gevraagde getallen door x, y en z voor,

Digitized by Google

zoo hebben wij

$$xyz = 252, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en $$x^2 : y^2 - 1 = y^2 - 1 : z^2 + 63$$

of $$\left(\frac{y^2 - 1}{x}\right)^2 = z^2 + 63. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Uit de laatste vergelijking blijkt, dat $z^2 + 63$ een volkomen vierkant moet zijn, terwijl z een geheel positief getal moet wezen, dat in 252 deelbaar is. De eenige waarden van z, die hieraan voldoen, zijn $z = 1$ en $z = 9$.

Nemen wij in de eerste plaats $z = 1$, dan geven de vergelijkingen (1) en (2)

$$xy = 252 \quad \text{en} \quad \frac{y^2 - 1}{x} = \pm 8,$$

waaruit door vermenigvuldiging volgt

$$y^3 - y = \pm 2016$$

of $$y^3 - y \mp 2016 = 0;$$

deze vergelijking heeft echter geene meetbare wortels, en zij kan dus voor y geen geheel getal opleveren, zoo als in de vraag geëischt wordt, waaruit volgt, dat de waarde $z = 1$ niet in aanmerking kan komen.

Nemen wij in de tweede plaats $z = 9$, dan geven (1) en (2)

$$xy = 28$$

en $$\frac{y^2 - 1}{x} = \pm 12,$$

zoodat wij, door het product dezer vergelijkingen te nemen, verkrijgen

$$y^3 - y = \pm 336$$

of $$y^3 - y \mp 336 = 0,$$

waarvoor ook kan geschreven worden

$$(y \mp 7)\,(y^2 \pm 7y + 48) = 0.$$

De eenige positieve waarde van y, die aan deze vergelijking voldoen kan, is blijkbaar $y = 7$, want uit $y^2 \pm 7y + 48 = 0$ vloeijen slechts onbestaanbare waarden voor y voort. Wij vinden dan verder, uit $xy = 28$, dat voor $y = 7$, $x = 4$ is. En hieruit blijkt dus, dat 4, 7 en 9 de drie eenige getallen zijn, die aan de vraag beantwoorden.

Digitized by Google

XII. Voorstel.

Door G. Koster.

Van eenen driehoek, die eenen hoek van 60° heeft, is de som der zijden 28; en zoo men om denzen driehoek eenen cirkel beschrijft, is deszelfs middellijn $\sqrt{133\frac{1}{3}}$. Men vraagt naar de zijden van dien driehoek (*).

Opgelost *door* J. Bassan, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, J. B. Geel, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, J. S. Speijer, R. van de Weerd *en* J. J. Wolfs.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (Fig. 10) de driehoek, *hoek* B $=$ 60° en M het middelpunt des omgeschreven cirkels, indien dan de stralen MA en MC getrokken worden, is *hoek* AMC $=$ 120°, terwijl volgens de opgave MA $=$ MC $=$ $\frac{1}{2}\sqrt{133\frac{1}{3}} = 10\sqrt{\frac{1}{3}}$ is. Uit den driehoek AMC volgt alzoo

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \times MC \times Cos.\ 120°,$$
$$= \frac{100}{3} + \frac{100}{3} + 2 \times \frac{100}{3} . Cos.\ 60° = 100;$$

en derhalve is dan vooreerst

$$AC = 10,$$

waaruit, omdat de som der drie zijden gelijk 28 gegeven is, verder volgt

$$AB + BC = 18.$$

Alzoo kan men stellen

$$AB = 9 + x \text{ en } BC = 9 - x,$$

en dan heeft men, uit den driehoek ABC,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC\ Cos.\ 60°,$$

dat is $100 = (9+x)^2 + (9-x)^2 - (9+x)(9-x)$

uit welke vergelijking nu achtervolgens kan afgeleid worden:

$$100 = 2(81 + x^2) - (81 - x^2),$$
$$100 = 81 + 3x^2,$$
$$3x^2 = 19,$$

en

$$x = \sqrt{6\frac{1}{3}}.$$

weshalve de gevraagde zijden des driehoeks zijn:

$$AC = 10,\ AB = 9 + \sqrt{6\frac{1}{3}} \text{ en } AC = 9 - \sqrt{6\frac{1}{3}}.$$

(*) P. Halcken, *Zinnen-Confect*, No. 476.

Digitized by Google

XIII. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Een gegeven trapezium, door lijnen, evenwijdig met de evenwijdige zijden loopende, in eenige deelen te verdeelen, die tot elkander in eene gegevene verhouding staan.

Opgelost *door* J. S. Speijer, C. P. Burger, R. van de Weerd, J. A. Hansen, G. Koster, D. Bierens de Haan en H. Middelburg.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat ABCD (Fig. 11) het gegeven trapezium zijn, hetwelk verdeeld moet worden in deelen, die tot elkander in reden staan als de gegevene lijnen of getallen p, q en r. Laten verder EF en GH de te vinden deellijnen zijn, zoodat *trap.* ABFE : *trap.* EFHG : *trap.* GHCD $= p : q : r$ is; stellen wij EF $= x$ en GH $= y$, en nemen wij, na CI loodregt op AB getrokken te hebben, als gegeven aan AB $= a$, CD $= b$ en CI $= h$; dan kunnen x en y op de volgende wijze uit deze gegevens gevonden worden.

Men trekke CK evenwijdig met AD, dan zijn de driehoeken CKB en CLF gelijkvormig, en dus is

$$CI : CM = KB : LF,$$

waaruit achtervolgens voortvloeit:

$$CI - CM : CI = KB - LF : KB,$$
$$IM : CI = AB - EF : AB - GD,$$
$$IM : h = a - x : a - b,$$

en

$$IM = h\frac{a-x}{a-b}.$$

Derhalve is

$$\textit{trap.}\ ABFE = \tfrac{1}{2}IM(AB + EF) = \tfrac{1}{2}h\frac{a-x}{a-b}(a+x),$$

of

$$\textit{trap.}\ ABFE = \tfrac{1}{2}h\frac{a^2-x^2}{a-b};$$

op dezelfde wijze vindt men

$$\textit{trap.}\ ABHG = \tfrac{1}{2}h\frac{a^2-y^2}{a-b},$$

terwijl men almede heeft

$$\textit{trap.}\ ABCD = \tfrac{1}{2}h\frac{a^2-b^2}{a-b}.$$

Uit deze waarden volgt de aaneengeschakelde evenredigheid

Digitized by Google

*trap.*ABFE : *trap.*ABHG : *trap.*ABCD $= a^2 - x^2 : a^2 - y^2 : a^2 - b^2$; maar uit de gegevene verhouding *trap.* ABFE : *trap.* EFHG : *trap.* GHCD $= p : q : r$ volgt almede

trap. ABFE : *trap.* ABHG : *trap.* ABCD $= p : p + q : p + q + r$; alzoo is dan ook

$$a^2 - x^2 : a^2 - y^2 : a^2 - b^2 = p : p + q : p + q + r,$$

waaruit nu onmiddellijk gevonden wordt

$$x^2 = a^2 - \frac{p}{p + q + r}(a^2 - b^2),$$

en

$$y^2 = a^2 - \frac{p + q}{p + q + r}(a^2 - b^2).$$

Deze formulen, waardoor x en y gemakkelijk kunnen berekend worden, geven aanleiding tot de volgende constructie, welke onafhankelijk is van het aantal deelen, waarin het trapezium moet verdeeld worden; hoezeer wij hier gemakshalve eene verdeeling in drie deelen ondersteld hebben.

Men beschrijve op AB, de grootste der evenwijdige zijden als middellijn, een' halven cirkel; neme daarin de koorde BN gelijk aan CD en trekke NO loodregt op AB. De lijn AO verdeele men nu in zoo veel deelen, en in dezelfde verhouding, als waarin het trapezium moet verdeeld worden, zoodat dan, voor het hier beschouwde bijzondere geval, AP : PQ : QO $= p : q : r$ is. Uit de deelpunten P en Q rigte men loodlijnen op AB op, totdat zij den omtrek des halven cirkels in S en R ontmoeten. Daarna beschrijve men uit B, met BS en BR als stralen, cirkelboogjes, de lijn AB in U en T ontmoetende. Eindelijk trekke men, uit deze ontmoetingspunten, lijnen UE en TG evenwijdig met BC, en, uit derzelver snijpunten met AD, lijnen EF en GH evenwijdig met AB; dan zullen deze laatstgetrokkene lijnen het trapezium naar behooren verdeelen.

Om zulks te bewijzen, trekken wij in den halven cirkel, uit A en B, koorden naar de punten N, R en S, dan is, volgens eene bekende eigenschap des cirkels,

$$AS^2 : AR^2 : AN^2 = AP : AQ : AO;$$

maar omdat AP : PQ : QO $= p : q : r$ gemaakt is, is ook

$$AP : AQ : AO = p : p + q : p + q + r,$$

terwijl $AN^2 = AB^2 - BN^2 = a^2 - b^2$ is; hieruit volgt dan

$$AS^2 : AR^2 \quad a - b^2 = p \quad p + q \quad p + q + r,$$

Digitized by Google

of wel $AS^2 = \frac{p}{p+q+r}(a^2 - b^2)$,

en $AR^2 = \frac{p+q}{p+q+r}(a^2 - b^2)$.

Verder is nu

$$EF^2 = BU^2 = BS^2 = AB^2 - AS^2 = a^2 - \frac{p}{p+q+r}(a^2 - b^2),$$

$$GH^2 = BT^2 = BR^2 = AB^2 - AR^2 = a^2 - \frac{p+q}{p+q+r}(a^2 - b^2),$$

en de lijnen EF en GH hebben dus door de verrigte constructie juist de waarden verkregen, welke wij voor x en y vonden.

XIV. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Men vraagt naar de verhouding van den inhoud van eenen gegevenen kegel, tot dien van den grootsten kegel, welke omgekeerd in den gegevenen kan geplaatst worden.

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. Bassan, C. P. Burger, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, J. S. Speijer, W. C. Verseput, D. Bierens de Haan *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

Laat ABC (Fig. 12) eene centrale doorsnede van den gegeven kegel voorstellen, waarin een andere kegel DEF omgekeerd geplaatst is, zoodanig, dat zijn top in het middelpunt F van het grondvlak des gegeven kegels ligt. Zij dan de hoogte van den gegeven kegel $BF = h$, de straal van zijn grondvlak $AF = r$, en de hoogte van den omgekeerden kegel $FG = x$, dan wordt de straal van het grondvlak des omgekeerden kegels gevonden uit de evenredigheid

$$BF : BG = AF : DG$$

of $$h : h - x = r : DG,$$

welke onmiddellijk geeft

$$DG = r\left\{1 - \frac{x}{h}\right\};$$

de inhoud van den omgekeerden kegel wordt dan uitgedrukt door

$$I = \tfrac{1}{3}FG \times DG^2\pi = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.$$

Digitized by Google

Zal nu deze kegel de grootste zijn, welke omgekeerd in den gegeven kegel kan geplaatst worden, dan moet x zoodanig bepaald worden, dat de functie

$$y = x\,(h - x)^2$$

een maximum zij. Hiertoe deze functie differentiërende, vinden wij

$$\frac{\partial y}{\partial x} = h^2 - 4hx + 3x^2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -4h + 6x;$$

alsnu $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ stellende, hebben wij

$$h^2 - 4hx + 3x^2 = 0 \quad \text{of} \quad (h - x)\,(h - 3x) = 0,$$

waaraan voldoet $x = h$ en $x = \frac{1}{3}h$; maar slechts voor de laatste dezer waarden wordt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negatief, dus zal ook slechts voor $x = \frac{1}{3}h$ de functie y een maximum, of de kegel DEF zoo groot mogelijk zijn.

Door $x = \frac{1}{3}h$ te nemen, komt er $l = \frac{4}{81}\pi r^2 h$; indien dus DEF de grootste kegel is, hebben wij

$$keg.\ \text{DEF} = \tfrac{4}{81}\pi r^2 h;$$

voorts is $keg.\ \text{ABC} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$,

en derhalve

$$keg.\ \text{ABC} : keg.\ \text{DEF} = \tfrac{1}{3} : \tfrac{4}{81} = 27 : 4 = 3^3 : 2^2.$$

Uit $\text{FG} = x = \frac{1}{3}h$, volgt $\text{BG} = \frac{2}{3}h$ en $\text{DG} = \frac{2}{3}r$; de inhoud van het gedeelte des gegeven kegels, tusschen zijnen top en het grondvlak van den ingeschreven kegel begrepen, wordt dus uitgedrukt door

$$keg.\ \text{BDE} = \tfrac{1}{3}\ \text{BG} \times \text{DG}^2\pi = \tfrac{8}{81}\pi r^2 h;$$

voor de verhouding der drie kegels, heeft men alzoo

$$keg.\ \text{ABC} : keg.\ \text{BDE} : keg.\ \text{DEF} = 27 : 8 : 4 = 3^3 : 2^3 : 2^2.$$

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Indien de gegeven kegel een scheve kegel met willekeurig grondvlak is, waarin de omgekeerde kegel zoodanig geplaatst moet worden, dat zijn grondvlak evenwijdig met, en zijn top ergens in, het grondvlak des gegeven kegels valt, blijft de gevondene uitkomst onveranderd.

Zij namelijk P (Fig. 13) het grondvlak en S de top van den gegeven, Q het grondvlak en S' de top van den ingeschreven kegel, en laat eene loodlijn, uit S op de evenwijdige vlakken P en Q nedergelaten, die vlakken respectievelijk in

Digitized by Google

M en N ontmoeten; indien wij dan SM $=$ h en MN $=$ x stellen, is

$$h^2 : (h - x)^2 = P : Q \quad \text{of} \quad Q = \frac{P}{h^2}(h - x)^2$$

en dus $\quad keg.\ S'Q = \frac{1}{3}xQ = \frac{1}{3}.\frac{P}{h^2}x(h - x)^2.$

Deze inhoud zal nu weder zoo groot mogelijk zijn, indien $x(h - x)^2$ een maximum is, en dus, indien men heeft $x = \frac{1}{3}h$, en alsdan is

$$keg.\ S'Q = \tfrac{4}{81}Ph;$$

maar wij hebben ook

$$keg.\ SP = \tfrac{1}{3}Ph,$$

en bijgevolg

$$keg.\ SP : keg.\ S'Q = \tfrac{1}{3} : \tfrac{4}{81} = 27 : 4.$$

XV. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Men vraagt naar de verhouding van den inhoud van eenen gegevenen kegel, tot dien van den grootsten cilinder, welke daarin kan geplaatst worden (*).

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Bassan, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, E. Olivier, Dz., J. S. Speijer, W. C. Versteput *en* R. van der Weerd.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Beschouwen wij Q (Fig. 13) als het bovenvlak van eenen cilinder, in den kegel SP geplaatst, dan is *cil.* $S'Q = 3$ *keg.* $S'Q$; indien dus *keg.* $S'Q$ de grootste kegel is, die omgekeerd in den kegel SP kan geplaatst worden, zal ook *cil.* $S'Q$ de grootste cilinder in den kegel SP zijn. Maar alsdan hebben wij, blijkens de voorgaande oplossing,

$$keg.\ SP : keg.\ S'Q = 27 : 4;$$

en hieruit volgt dan onmiddellijk

$$keg.\ SP : 3 \times keg.\ S'Q = 27 : 12,$$

of $\quad keg.\ SP : cil.\ S'Q = 9 : 4 = 3^2 : 2^2.$

(*) Vergelijk I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.*; bls. 198, No. 6.

Digitized by Google

XVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer op de bovenzijde EF *van een gegeven vierkant* DEFG (Fig. 14), *een kleiner gegeven vierkant* HIKL *geplaatst wordt, en men dan de uiteinden van de bovenzijde* IK *van dit tweede vierkant, met de uiteinden van de bovenzijde* EF *van het eerste vierkant, door de lijnen* IE *en* KF *vereenigt, zullen de verlengden dezer vereenigingslijnen elkander ergens in* B, *en de verlengde bazis* DG *van het eerste vierkant ergens in* A *en* C *snijden. Hoedanig nu ook het vierkant* HIKL *langs* EF *valle, zal de bazis* AC *van den driehoek* ABC *altijd dezelfde grootte hebben; en ook zal het vierkant, dat in den driehoek* IBK *kan beschreven worden, altijd even groot zijn. Men vraagt naar het bewijs hiervan.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Bassan, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat MNOP het in den driehoek IBK beschrevene vierkant zijn, dan zijn de drie driehoeken ABC, EBF en IBK met derzelver ingeschrevene vierkanten, gelijkvormige figuren. De bazes of gelijkstandige zijden AC, EF en IK van deze driehoeken, zijn dus evenredig met de zijden der ingeschrevene vierkanten, zoodat wij hebben

$$AC : DE = EF : HI = IK : MN;$$

of, zoo wij $DE = EF = a$ en $HI = IK = b$ stellen

$$AC : a = a : b = b : MN.$$

Hieruit volgt nu

$$AC = \frac{a^2}{b} \quad \text{en} \quad MN = \frac{b^2}{a};$$

de grootte van de bazis AC en van het vierkant MNOP, hangt dus alleen van de grootte der gegevens a en b af, en zal bijgevolg onveranderd blijven, hoedanig ook HL langs EF moge geplaatst worden.

Aanmerking. De zijden $DE = a$, $HI = b$ en $MN = \frac{b^2}{a}$ der achtervolgende vierkanten, maken eene meetkunstige reeks

Digitized by Google

uit, waarvan $\frac{b}{a}$ de gemeene reden is. Door zich nu voor te stellen, dat in den driehoek NBO wederom een vierkant beschreven is, en zoo vervolgens, ziet men duidelijk, dat de hoogte van den driehoek ABC gelijk is aan de som van de zijden der oneindige reeks van vierkanten, die op deze wijze ontstaan zal; en die hoogte door h voorstellende, hebben wij dan

$$h = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \text{enz. tot in het oneindige,}$$

of wel $$h = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}.$$

De hoogte, en bijgevolg ook de inhoud, des driehoeks ABC, is dus mede onafhankelijk van de plaatsing der zijde HL langs de zijde EF.

XVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Te integreren $\partial\phi(Sin.\ \phi + Cos.\ \phi)\sqrt{(Sin.\ \phi - Cos.\ \phi)}$.

Opgelost *door* J. Bassan, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, H. Middelburg, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Bassan.

Men stelle $\sqrt{(Sin.\ \phi - Cos.\ \phi)} = x$,

dan is $Sin.\ \phi - Cos.\ \phi = x^2$

en door deze vergelijking te differentieren, komt er

$$Cos.\ \phi\partial\phi + Sin.\ \phi\partial\phi = 2x\partial x$$

of $$\partial\phi(Sin.\ \phi + Cos.\ \phi) = 2x\partial x.$$

Alzoo wordt dan:

$$\int\partial\phi(Sin.\phi+Cos.\phi)\sqrt{(Sin.\phi-Cos.\phi)} = \int 2x\partial x \times x = 2\int x^2\partial x =$$
$$\tfrac{2}{3}x^3 + C = \tfrac{2}{3}\sqrt{(Sin.\phi-Cos.\phi)^3} + C = \tfrac{2}{3}(Sin\,\phi - Cos.\phi)\sqrt{(Sin.\phi-Cos.\phi)} + C.$$

XVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Te integreren $\partial\phi(1 + Tang.\ \phi)\sqrt{(1 - Tang.\ \phi)}$.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Speijer *en* D. Bierens de Haan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Men stelle $\sqrt{(1 - Tang.\ \phi)} = x$;

dan is $1 - Tang.\ \phi = x^2$,

Digitized by Google

$$Tang.\ \phi = 1 - x^2,$$
$$1 + Tang.\ \phi = 2 - x^2,$$
$$\phi = Boog\ Tang.\ (1 - x^2),$$

terwijl, door deze laatste waarde te differentiëren, gevonden wordt

$$\partial\phi = -\frac{2x\partial x}{x^4 - 2x^2 + 2}.$$

Door substitutie dezer waarden, gaat dan de te vinden integraal, welke wij kortheidshalve door y zullen aanduiden, over in

$$y = \int\frac{(2x^4 - 4x^2)\partial x}{x^4 - 2x^2 + 2} = \int\left\{2 - \frac{4}{x^4 - 2x^2 + 2}\right\}\partial x$$
$$= 2x - \int\frac{4}{x^4 - 2x^2 + 2}\partial x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De noemer $x^4 - 2x^2 + 2$ heeft geene bestaanbare eerstemagtsfactoren, maar deszelfs bestaanbare tweedemagtsfactoren zijn

$$x^2 + x\sqrt{(2+2\sqrt{2})} + \sqrt{2} \quad \text{en} \quad x^2 - x\sqrt{(2+2\sqrt{2})} + \sqrt{2};$$

het gebroken $\frac{4}{x^4 - 2x^2 + 2}$ diensvolgens door de bekende leerwijze in twee andere breuken verdeelende, welke deze factoren tot noemers hebben, zoo vinden wij

$$\frac{4}{x^4-2x^2+2} = \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}},$$

waardoor (1) overgaat in

$$y = 2x - \int\frac{\{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}+\sqrt{2}\}\partial x}{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}} + \int\frac{\{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}-\sqrt{2}\}\partial x}{x^2-x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}},$$

hetgeen wij kortheidshalve zullen voorstellen door

$$y = 2x - \int P\partial x + \int Q\partial x. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Nu is het bekend, dat men heeft (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 179)

$$\int\frac{(A+Bx)\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{B}{c}Nep.Log.\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{a}} \ldots$$
$$+\frac{2cA-bB}{c\sqrt{(4ac-b^2)}}Boog\,Tang.\frac{x\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a+bx};$$

nemende hierin $A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt{(-1+\sqrt{2})}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{(2+2\sqrt{2})}$ en $c = 1$, zoo vinden wij

Digitized by Google

$$\int P^2 dx = \left\{\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\} Nep.Log. \sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \ldots$$
$$+\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\} BoogTang. \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}}{x\sqrt{(1+\sqrt{2})}+2};$$

en zoo wij, in dezelfde algemeene formule, $A = -\sqrt{2}$, $B = \sqrt{(-1+\sqrt{2})}$, $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{(2+2\sqrt{2})}$ en $c = 1$ nemen, komt er

$$\int Q^2 dx = \left\{\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\} Nep.Log. \sqrt{\frac{x^2-x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \ldots$$
$$-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\} BoogTang. \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}}{-x\sqrt{(1+\sqrt{2})}+2};$$

zoodat wij dan verder, door deze waarden in (2) over te brengen, verkrijgen

$$y = 2x - \left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\} Nep.Log. \frac{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\} BoogTang. \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}}{x\sqrt{(1+\sqrt{2})}+2}$$
$$+\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\} Nep.Log. \frac{x^2-x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\} BoogTang. \frac{x\sqrt{(-1+\sqrt{2})}}{-x\sqrt{(1+\sqrt{2})}+2} \quad \ldots \quad (3)$$

Maken wij vervolgens gebruik van de bekende formulen

$$Log.\ p - Log.\ q = Log. \frac{p}{q}$$

en $$BoogTang\, p + BoogTang.q = BoogTang. \frac{p+q}{1-pq},$$

zoo verandert de vergelijking (3) na behoorlijke herleiding in

$$y = 2x - \left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\} BoogTang. \frac{x\sqrt{(-2+2\sqrt{2})}}{-x^2+\sqrt{2}} \ldots$$
$$-\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\} Nep.Log. \frac{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Brengen wij hierin eindelijk voor x wederom hare waarde $\sqrt{(1 - Tang.\ \phi)}$ over, dan verkrijgen wij voor de begeerde integraal:

Digitized by Google

$$y=2\sqrt{(1-Tang.\phi)}-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\}BoogTang.\frac{\sqrt{(-2+2\sqrt{2})(1-Tang.\phi)}}{-1+\sqrt{2}+Tang.\phi}\ \ldots$$

$$-\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\}Nep.Log.\frac{1+\sqrt{2}-Tang.\phi+\sqrt{(2+2\sqrt{2})(1-Tang.\phi)}}{1+\sqrt{2}-Tang\,\phi-\sqrt{(2+2\sqrt{2})(1-Tang.\phi)}}, \quad \ldots\ldots\ (5)$$

waarbij nu eene willekeurige standvastige gevoegd kan worden.

Aanmerking *uit de oplossing van* J. S. Speijer. Den boog, die in (4) voorkomt, kan men door middel der formule $Boog\ Tang.\ p = Boog\ Cos.\ \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$ herleiden; voorts kan men teller en noemer van het gebroken, waarvan in (4) de logarithmus is aangeduid, met $x^2 + x\sqrt{(2+2\sqrt{2})} + \sqrt{2}$ vermenigvuldigen; hierdoor verkrijgt men dan

$$y=2x-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\}BoogCos.\frac{-x^2+\sqrt{2}}{\sqrt{(x^4-2x^2+2)}}-\left\{\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\}Nep.Log.\frac{x^2+x\sqrt{(2+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}.}{\sqrt{(x^4-2x^2+2)}} \quad .\ (6)$$

Hierin nu voor x hare waarde $\sqrt{(1-Tang.\phi)}$ substituerende, als wanneer $\sqrt{(x^4-2x^2+2)} = Sec\ \phi$ is, vinden wij

$$y=2\sqrt{(1-Tang.\phi)}-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\}BoogCos.\frac{-1+\sqrt{2}+Tang\,\phi}{Sec.\phi}\ \ldots$$

$$-\left\{\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\}Nep.Log.\frac{1+\sqrt{2}-Tang.\phi+\sqrt{(2+2\sqrt{2})(1-Tang.\phi)}}{Sec.\phi}, \quad \ldots\ldots\ (7)$$

waarvoor ook kan geschreven worden

$$y=2\sqrt{(1-Tang.\phi)}-\left\{\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right\}BoogCos.\left\{(-1+\sqrt{2})Cos.\phi+Sin.\phi\right\}$$

$$-\left\{\sqrt{(-1+\sqrt{2})}\right\}Nep.Log.\left\{(1+\sqrt{2})Cos\,\phi-Sin\,\phi+Cos.\phi\sqrt{(2+2\sqrt{2})(1-Tang.\phi)}\right\}. \quad \ldots\ (8)$$

Digitized by Google

XIX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Te integreren $\frac{Sin.^3\phi + Cos.^3\phi}{Sin.^3\phi - Cos.^3\phi}\partial\phi$.

Opgelost *door* J. Bassan, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, R. van de Weerd, C. P. Burger, H. Middelburg *en* D. Bierens de Haan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Voor de opgegevene uitdrukking kan men schrijven

$$\frac{(Sin.\phi+Cos.\phi)(Sin.^2\phi-Sin.\phi Cos.\phi+Cos.^2\phi)}{(Sin.\phi-Cos.\phi)(Sin.^2\phi+Sin.\phi Cos.\phi+Cos.^2\phi)}\partial\phi$$

of

$$\frac{(Sin.\phi+Cos.\phi)(1-Sin.\phi Cos.\phi)}{(Sin.\phi-Cos.\phi)(1+Sin.\phi Cos.\phi)}\partial\phi,$$

en door nu teller en noemer te vermenigvuldigen met $Sin.\ \phi - Cos.\ \phi$, verandert zij in

$$\frac{(1-Sin\,\phi Cos\,\phi)(Sin.^2\phi-Cos.^2\phi)}{(1+Sin.\phi Cos.\phi)(Sin.^2\phi-2Sin.\phi Cos.\phi+Cos.^2\phi)}\partial\phi$$

of

$$\frac{(1-Sin\,\phi Cos.\phi)(Sin.^2\phi-Cos.^2\phi)}{(1+Sin.\phi Cos.\phi)(1-2Sin.\phi Cos.\phi)}\partial\phi;$$

de gevraagde integraal door y voorstellende, hebben wij dus vooreerst

$$y = \int\frac{(1-Sin.\phi Cos.\phi)(Sin.^2\phi-Cos.^2)\partial\phi}{(1+Sin.\phi Cos.\phi)(1-2Sin.\phi Cos\,\phi)}.$$

Men stelle nu $Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = 1 - x$,

dan volgt hieruit door differentiatie

$$(Sin.^2\ \phi - Cos.^2\ \phi)\partial\phi = \partial x,$$

en deze waarden substituerende, vinden wij

$$y = \int\frac{x\partial x}{(2x-1)\ (2-x)};$$

maar door de gewone leerwijze, tot het verdeelen van gebrokens in andere die eenvoudiger zijn, komt er

$$\frac{x}{(2x-1)\ (2-x)} = \frac{\frac{1}{3}}{2x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{2-x},$$

en hierdoor wordt dan

$$y = \tfrac{1}{3}\int\frac{\partial x}{2x-1} + \tfrac{2}{3}\int\frac{\partial x}{2-x} = \tfrac{1}{6}\int\frac{\partial.(2x-1)}{2x-1} - \tfrac{2}{3}\int\frac{\partial.(2-x)}{2-x} =$$

$$= \tfrac{1}{6}Nep.Log.(2x-1) - \tfrac{2}{3}Nep.Log.(2-x) + C.$$

Nu is echter, volgens de gestelde substitutie,

$$2x - 1 = 1 - 2\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = (Sin.\ \phi - Cos.\ \phi)^2$$

Digitized by Google

en $$2 - x = 1 + Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi;$$

derhalve hebben wij eindelijk

$$y = \tfrac{1}{6} Nep.Log.(Sin.\phi - Cos.\phi)^2 - \tfrac{2}{3} Nep.Log.(1 + Sin.\phi Cos.\phi) + C$$
$$= \tfrac{1}{3} Nep.Log.(Sin.\phi - Cos.\phi) - \tfrac{1}{3} Nep.Log.(1 + Sin.\phi Cos.\phi)^2 + C$$
$$= \tfrac{1}{3} Nep.Log. \frac{Sin.\phi - Cos.\phi}{(1 + Sin.\phi Cos.\phi)^2} + C.$$

XX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Te integreren $\dfrac{Tang.^3\ \phi + Cot.^3\ \phi}{Tang.^3\ \phi - Cot.^3\ \phi} \partial\phi.$

Opgelost *door* J. Bassan, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, R. van de Weerd, H. Middelburg *en* D. Bierens de Haan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Wij hebben al dadelijk

$$\frac{Tang.^3\ \phi + Cot.^3\ \phi}{Tang.^3\ \phi - Cot.^3\ \phi} = \frac{Tang.^6\ \phi + 1}{Tang.^6\ \phi - 1};$$

maar nu is

$$Tang.^2\ \phi = \frac{1 - Cos.2\phi}{1 + Cos.2\phi} \quad \text{of} \quad Tang.^6\ \phi = \frac{(1 - Cos.2\phi)^3}{(1 + Cos.2\phi)^3},$$

en bijgevolg

$$\frac{Tang.^6\phi + 1}{Tang.^6\phi - 1} = \frac{(1 - Cos.2\phi)^3 + (1 + Cos.2\phi)^3}{(1 - Cos.2\phi)^3 - (1 - Cos.2\phi)^3} = \frac{1 + 3Cos.^2 2\phi}{-(3 + Cos.^2 2\phi) Cos.2\phi}.$$

De gevraagde integraal door y voorstellende, hebben wij derhalve

$$y = -\int \frac{(1 + 3Cos.^2 2\phi)\partial\phi}{(3 + Cos.^2 2\phi) Cos.2\phi} = -\tfrac{1}{2} \int \frac{(1 + 3Cos.^2 2\phi)\partial . Sin.2\phi}{(3 + Cos.^2 2\phi) Cos.^2 2\phi};$$

maar ook is

$$\frac{1 + 3Cos.^2 2\phi}{(3 + Cos.^2 2\phi) Cos.^2 2\phi} = \frac{\frac{1}{3}}{Cos.^2 2\phi} + \frac{\frac{8}{3}}{3 + Cos.^2 2\phi},$$

en daardoor wordt dan

$$y = -\tfrac{1}{6} \int \frac{\partial . Sin.\ 2\phi}{Cos.^2\ 2\phi} - \tfrac{4}{3} \int \frac{\partial .\ Sin.\ 2\phi}{3 + Cos.^2\ 2\phi}$$
$$= -\tfrac{1}{6} \int \frac{\partial .\ 2\phi}{Cos.\ 2\phi} - \tfrac{4}{3} \int \frac{\partial .\ Sin.\ 2\phi}{4 - Sin.^2\ 2\phi};$$

terwijl wij al verder hebben

$$\frac{1}{4 - Sin.^2\ 2\phi} = \frac{\frac{1}{4}}{2 + Sin.\ 2\phi} + \frac{\frac{1}{4}}{2 - Sin.\ 2\phi},$$

waardoor de te vinden integraal wordt

Digitized by Google

$$y = -\tfrac{1}{6}\int\frac{\partial.2\phi}{Cos.2\phi} - \tfrac{1}{3}\int\frac{\partial.Sin.2\phi}{2+Sin.2\phi} - \tfrac{1}{3}\int\frac{\partial.Sin.2\phi}{2-Sin.2\phi}.$$

Nu is (zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 244.)

$$-\int\frac{\partial.2\phi}{Cos.2\phi} = Nep.Log.Tang.\left(\frac{1}{4}\pi-\phi\right) = Nep.Log.\frac{1-Tang.\phi}{1+Tang.\phi},$$

terwijl wij verder onmiddellijk hebben

$$\int\frac{\partial.Sin.2\phi}{2+Sin.2\phi} = \int\frac{\partial.(2+Sin.2\phi)}{2+Sin.2\phi} = Nep.Log.(2+Sin.2\phi)$$

en $\int\frac{\partial.Sin.2\phi}{2-Sin.2\phi} = -\int\frac{\partial.(2-Sin.2\phi)}{2-Sin.2\phi} = -Nep.Log.(2-Sin.2\phi)$;

deze integralen in de voorgaande uitkomst overbrengende, komt er dan eindelijk

$$y = \tfrac{1}{6}\,Nep.\,Log.\frac{1-Tang.\phi}{1+Tang.\phi} + \tfrac{1}{3}\,Nep.\,Log.\frac{2-Sin.2\phi}{2+Sin.2\phi} + C.$$

Hiervoor kan men des verkiezende schrijven

$$y = \tfrac{1}{6}\,Nep.\,Log.\frac{Cos.\phi-Sin.\phi}{Cos.\phi+Sin.\phi} + \tfrac{1}{3}\,Nep.\,Log.\frac{1-Sin.\phi Cos.\phi}{1+Sin.\phi Cos.\phi} + C.$$

$$= \tfrac{1}{6}\,Nep.\,Log.\left\{\frac{Cos.\phi-Sin.\phi}{Cos.\phi+Sin.\phi}\times\left(\frac{1-Sin.\phi Cos.\phi}{1+Sin.\phi Cos.\phi}\right)^2\right\} + C;$$

of omdat men heeft

$$\frac{1-Sin.\phi Cos.\phi}{1+Sin.\phi Cos.\phi} = \frac{Sec.^2\phi-Tang.\phi}{Sec.^2\phi+Tang.\phi} = \frac{1-Tang.\phi+Tang.^2\phi}{1+Tang.\phi+Tang.^2\phi},$$

ook nog

$$y = \tfrac{1}{6}Nep.Log.\frac{1-Tang.\phi}{1+Tang.\phi} + \tfrac{1}{3}Nep.Log.\frac{1-Tang.\phi+Tang.^2\phi}{1+Tang.\phi+Tang.^2\phi} + C$$

$$= \tfrac{1}{6}\,Nep.\,Log.\frac{(1-Tang.\phi)(1-Tang.\phi+Tang.^2\phi)^2}{(1+Tang.\phi)(1+Tang.\phi+Tang.^2\phi)^2} + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\,Nep.\,Log.\left\{\frac{1+Tang.^3\phi}{1-Tang.^3\phi}\times\left(\frac{1-Tang.\phi}{1+Tang.\phi}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\,Nep.\,Log.\frac{1+Tang.^3\phi}{1-Tang.^3\phi} + \tfrac{1}{4}\,Nep.\,Log.\frac{1-Tang.\phi}{1+Tang.\phi} + C$$

XXI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE.

Een vierkant getal van vijf cijfers te vinden, hetwelk de eigenschappen heeft: 1°. ***dat de som van de cijfers der eenheden, honderdtallen en tienduizendtallen, gelijk is aan de som van de cijfers der tientallen en duizendtallen; en*** 2°. ***dat deszelfs wortel*** 11 ***maal zoo groot is als de som van de cijfers van dien wortel.***

Digitized by Google

Opgelost *door* J. S. Speijer, C. P. Burger, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, W. J. C. Rammelman Elsevier, R. van de Weerd, H. G. Witlage, J. Bassan, J. H. van Kooten, H. Middelburg *en* L. Verveen, Jz.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat de wortel van een vierkant getal van vijf cijfers noodzakelijk uit drie cijfers bestaat, zoo kunnen wij voor dien wortel stellen

$$100x + 10y + z;$$

volgens de laatste voorwaarde is dan

$$100x + 10y + z = 11(x + y + z),$$

en dus $$89x = 10x + y.$$

Omdat nu x, y en z cijferletters en dus kleiner dan 10 zijn, zoo is $10x + y$ een getal van twee cijfers, weshalve x niet anders dan 1 kan wezen. Alsdan is $10x + y = 89$, en derhalve noodzakelijk $x = 8$ en $y = 9$. De bedoelde wortel is dus 198, en het bedoelde getal $(198)^2 = 39204$.

Hoezeer nu de eerstopgegevene voorwaarde wel bij dit getal bestaat, heeft zij echter niet gediend om hetzelve te vinden, en kan dus als overtollig beschouwd worden.

XXII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Eene opklimmende rekenkunstige reeks van zeven termen te vinden, welker som 301 is, en die de eigenschap heeft, dat de eerste en zesde termen, desgelijks de tweede en vijfde, alsmede de derde en vierde termen, beide met dezelfde cijfers in eene omgekeerde volgorde geschreven worden.

Opgelost *door* J. M. Goudsmit, C. P. Burger, J. B. Geel, J. Heemskerk, Az., G. Koster, P. Krom, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, R. van de Weerd, H. G. Witlage, J. J. Wolvs, J. A. Hansen, J. H. van Kooten, H. Middelburg *en* L. Verveen, Jz.

Oplossing *van* J. M. Goudsmit.

Stel, voor de achtervolgende termen der reeks,

$x - 3y$, $x - 2y$, $x - y$, x, $x + y$, $x + 2y$, $x + 3y$;

dan is derzelver som

$$7x = 301.$$

Digitized by Google

Hieruit vindt men voor den vierden term onmiddellijk

$$x = 43;$$

derhalve is dan de derde term

$$x - y = 34,$$

en alzoo $$y = 9.$$

De begeerde reeks is dus:

16, 25, 34, 43, 52, 61 en 70.

AANMERKING. Uit de oplossing blijkt, dat de eigenschap dat de eerste en zesde termen, desgelijks de tweede en vijfde, beide met dezelfde cijfers in eene omgekeerde volgorde geschreven worden, overbodig is.

XXIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE.

Van een trapezium ABCD (Fig. 15), ***hetwelk om eenen cirkel beschreven kan worden, is gegeven de bazis*** AB $= a$ ***en de niet evenwijdige zijde*** AD $= b$, ***terwijl men bovendien weet, dat de hoeken*** A ***en*** B, ***aan de bazis, te zamen eenen regten hoek uitmaken. Men vraagt hieruit den straal te vinden van den in dat trapezium beschreven cirkel.***

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, E. OLIVIER, DZ., R. VAN DE WEERD *en* H. G. WITLAGE.

I. OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Daar de hoeken A en B, aan de bazis, te zamen eenen regten hoek uitmaken, zoo zullen de verlengden der niet evenwijdige zijden AD en BC elkander onder eenen regten hoek E snijden; en de cirkel, in het trapezium ABCD beschreven, is dan tevens de ingeschreven cirkel van den regthoekigen driehoek ABE. Zij m deszelfs middellijn, en laat uit D eene loodlijn DF op AB nedergelaten zijn, dan is blijkbaar

$$DF = m \quad \text{en} \quad AF = \sqrt{(b^2 - m^2)};$$

voorts zijn de driehoeken AFD en AEB gelijkvormig, waaruit volgt

$$AD : AB = DF : BE = AF : AE,$$

of $$b : a = m : BE = \sqrt{(b^2-m^2)} : AE,$$

en dus $$BE = \frac{am}{b} \quad \text{en} \quad AE = \frac{a\sqrt{(b^2-m^2)}}{b}.$$

Digitized by Google

Nu is het bekend, en ook ligtelijk te bewijzen, dat de middellijn eens cirkels, in eenen regthoekigen driehoek beschreven, gelijk is aan de som der regthoekszijden verminderd met de hypothenusa. Alzoo is

$$m = AE + BE - AB$$

of

$$m = \frac{a\sqrt{(b^2-m^2)}}{b} + \frac{am}{b} - a,$$

waaruit achtervolgens kan afgeleid worden:

$$mb = a\sqrt{(b^2-m^2)} + am - ab,$$
$$ab - (a-b)m = a\sqrt{(b^2-m^2)},$$
$$a^2b^2 - 2ab(a-b)m + (a-b)^2m^2 = a^2b^2 - a^2m^2,$$
$$(a-b)^2m^2 + a^2m^2 = 2ab(a-b)m,$$
$$(a-b)^2m + a^2m = 2ab(a-b),$$

en

$$m = \frac{2ab(a-b)}{(a-b)^2 + a^2};$$

zoodat dan de middellijn van den bedoelden cirkel in de gegevens uitgedrukt is.

Aanmerking *van* J. S. Spijer. Is $a = b$, dan is $m = 0$ en dus het trapezium onbestaanbaar; onder de gegevene omstandigheden, kunnen dus de lijnen AB en AD niet even groot zijn. Is echter $a < b$, dan is m negatief; dit beteekent, dat de rakende cirkel onder AB komt, of wel, dat niet de bazis, maar de bovenzijde van het trapezium gelijk a gegeven is. Hieruit volgt dan, dat in het bedoelde trapezium de zijde AD grooter dan de bovenzijde CD, en kleiner dan de grondlijn AB moet zijn.

II. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Even als in de voorgaande oplossing, merken wij op: dat de verlengden van AD en BC elkander in E regthoekig snijden; dat de loodlijn DF, uit D op AB neergelaten, gelijk aan de middellijn van den in het trapezium beschreven cirkel is; en dat men dus, volgens eene bekend eigenschap, heeft

$$DF = AE + BE - AB.$$

Stellen wij nu *hoek* $BAD = \phi$, dan volgt, uit de regthoekige driehoeken ABE en ADF,

$$AE = AB\ Cos.\ BAD = a\ Cos.\phi,$$
$$BE = AB\ Sin.\ BAD = a\ Sin.\phi,$$

en

$$DF = AD\ Sin.\ FAD = b\ Sin.\phi;$$

Digitized by Google

derhalve is dan

$$b\ Sin.\phi = a\ Cos.\phi + a\ Sin.\phi - a,$$

waaruit achtervolgens afgeleid kan worden:

$$(a-b)\ Sin.\phi = a(1-Cos.\phi),$$

$$2(a-b)\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi = 2a\ Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi,$$

$$(a-b)\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi = a\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi,$$

en

$$Tang.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{a-b}{a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Door deze formule kan vooreerst de hoek ϕ berekend worden, terwijl dan verder de middellijn $m = DF$ gevonden wordt door de formule

$$m = b\ Sin.\phi. \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om echter alles in de gegevens uit te drukken, vindt men uit (1) gemakkelijk

$$Tang.\phi = \frac{2Tang.\tfrac{1}{2}\phi}{1 - Tang.^2\tfrac{1}{2}\phi} = \frac{2a(a-b)}{b(2a-b)},$$

en

$$Sin\ \phi = \frac{Tang.\phi}{\sqrt{(1 + Tang.^2\phi)}} = \frac{2a(a-b)}{(a-b)^2 + a^2},$$

waardoor dan uit (2) volgt

$$m = \frac{2ab(a-b)}{(a-b)^2 + a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Voor de beide onbekende zijden van het trapezium, vindt men voorts

$$BC = b\ Tang.\phi = \frac{2a(a-b)}{2a-b}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en

$$CD = AD + BC - AB = b + \frac{2a(a-b)}{2a-b} - a = \frac{b(a-b)}{2a-b}; \quad . \quad . \quad (5)$$

terwijl voor deszelfs inhoud gevonden wordt

$$Inh.ABCD = \tfrac{1}{2}DF(AB+CD) = \frac{ab(a-b)(2a^2-b^2)}{\{(a-b)^2+a^2\}(2a-b)}. \quad . \quad . \quad (6)$$

Om het trapezium uit de gegevens te construeren, stelle men op $AB = a$ eene loodlijn $BG = a - b$, en trekke AG, dan is $Tang.\ BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{a-b}{a}$ en dus *hoek* $BAG = \frac{1}{2}\phi$. Verder beschrijve men dus op AB als middellijn eenen halven cirkel; trekke daarin de koorde AE zoodanig, dat *hoek* GAE = *hoek* BAG zij; neme op die koorde het stuk $AD = b$; vereenige de punten B en E door eene regte lijn BE;

Digitized by Google

en trekke uit D eene lijn evenwijdig met AB, tot zij BE in C ontmoet; dan is ABCD het trapezium.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Stelt men $CD = a'$, dan is volgens (5)

$$\frac{b(a-b)}{2a-b} = a',$$

waaruit gevonden wordt

$$a = \frac{b(a'-b)}{2a'-b} \quad \text{en} \quad a-b = -\frac{a'b}{2a'-b};$$

en brengt men nu deze waarden in (3) over, zoo komt er na herleiding

$$m = -\frac{2a'b(a'-b)}{(a'-b)^2 + a'^2}.$$

Deze waarde voor m, met het tegengestelde teeken genomen, verschilt van de waarde (3) niet anders dan door het bij de letter a geplaatste accent; zij bevestigt derhalve hetgeen in de AANMERKING op de 1ste OPLOSSING gezegd is.

XXIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE.

Drie geheele getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken; zoodanig, dat de middelste term een vierkant en het product der beide uiterste termen een cubus is.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. A. HANSEN, J. S. SPEIJER, H. G. WITLAGE, J. J. WOLFS, J. BASSAN, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, R. VAN DE WEERD, J. H. VAN KOOTEN *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laten de drie begeerde getallen voorgesteld worden door

$$x^2 - y, \quad x^2 \quad \text{en} \quad x^2 + y,$$

dan is voldaan aan de voorwaarden, dat zij eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken en dat de middelste term een vierkant moet zijn; en er blijft derhalve slechts over x en y zoodanig te bepalen, dat het product der uiterste termen, te weten $x^4 - y^2$, een cubus zij.

Stellen wij te dien einde

$$x^4 - y^2 = \left(\frac{p}{q}x\right)^3,$$

als wanneer p en q twee onderling ondeelbare geheele getal-

Digitized by Google

len verbeelden, dan volgt hieruit

$$y^2 = x^2\left(x^2 - \frac{p^3}{q^3}x\right),$$

waaruit blijkt, dat $x^2 - \frac{p^3}{q^3}x$ een vierkant moet zijn. Stellen wij alzoo

$$x^2 - \frac{p^3}{q^3}x = \left(\frac{r}{s}x\right)^2,$$

als wanneer ook weder r en s twee onderling ondeelbare getallen verbeelden, dan vinden wij

$$x = \frac{p^3s^2}{q^3(s^2-r^2)},$$

en hieruit volgt dan verder

$$y = x\sqrt{\left(x^2-\frac{p^3}{q^3}x\right)} = x\sqrt{\left(\frac{r}{s}x\right)^2} = \frac{r}{s}x^2 = \frac{p^3s^3r}{q^6(s^2-r^2)^2},$$

zoodat nu de drie begeerde getallen zijn:

$$\frac{p^6s^4-p^6s^3r}{q^6(s^2-r^2)^2}, \quad \frac{p^6s^4}{q^6(s^2-r^2)^2} \quad \text{en} \quad \frac{p^6s^4+p^6s^3r}{q^6(s^2-r^2)^2},$$

of wel

$$\frac{p^6}{q^6}\cdot\frac{s^3}{(s+r)^2(s-r)}, \quad \frac{p^6}{q^6}\cdot\frac{s^4}{(s^2-r^2)^2} \quad \text{en} \quad \frac{p^6}{q^6}\cdot\frac{s^3}{(s-r)^2(s+r)} \cdots (A)$$

Beginnen wij alzoo met voor r en s willekeurige onderling ondeelbare waarden aan te nemen, mits $r < s$, dan zal het blijkbaar zeer gemakkelijk zijn, daarna voor p zulk eene waarde te nemen, dat de producten van p^6, met de achterste factoren der vormen (A), gebeele getallen worden; terwijl dan eindelijk, indien deze getallen een zesdemagtsgetal tot gemeenen deeler hebben, die deeler voor q^6 kan genomen, of anders $q = 1$ kan gesteld worden.

Langs dezen weg zal men dan, op de voorgestelde vraag, niet alleen zoo vele antwoorden als men begeert, maar ook alle mogelijke antwoorden kunnen bekomen.

Zie hier eenige bijzondere voorbeelden:

$r = 1, s = 2, p = 3$ en $q = 1$, geeft de getallen 648, 1296 en 1944;
$r = 1, s = 3, p = 2$ en $q = 1$, » » » 54, 81 en 108;
$r = 7, s = 9, p = 4$ en $q = 3$, » » » 8, 36 en 64;
$r = 24, s = 25, p = 7$ en $q = 5$, » » » 49, 1225 en 2401;
$r = 5, s = 5, p = 3$ en $q = 1$; » » » 1125, 5625 en 10125.

Digitized by Google

XXV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Drie geheele getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken; zoodanig, dat de middelste term een cubus en de derde term een vierkant is.

Opgelost *door* R. van de Weerd, C. P. Burger, J. M. Goudsmit, J. A. Hansen, H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, H. G. Witlage, J. J. Wolfs, G. Koster *en* J. H. van Kooten.

Oplossing *van* R. van de Weerd.

Indien wij voor den tweeden term x^3, en voor den derden term y^2 stellen, is voor elke geheele getallenwaarde, welke aan x en y gegeven wordt, aan de twee laatste voorwaarden des voorstels voldaan. De reden der reeks zal dan zijn $y^2 - x^3$, en bijgevolg haar eerste term $x^3-(y^2-x^3) = 2x^3 - y^2$, zoodat de reeks zelve is

$$2x^3 - y^2, \quad x^3 \text{ en } y^2,$$

waarin aan x en y alle mogelijke geheele getallenwaarden kunnen gegeven worden.

Moet de reeks opklimmen, dan moet $y^2 > x^3$ zijn. Moet de reeks uit positieve getallen bestaan, dan moet x positief en $2x^3 > y^2$ wezen.

Zoo hebben wij, bij voorbeeld:

voor $x = 3$ en $y = 6$, de reek 18, 27 en 36;
„ $x = 4$ en $y = 9$, „ „ 47, 64 en 81;
„ $x = 2$ en $y = 3$, „ „ 7, 8 en 9; *enz.*

XXVI. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Van eenen regthoekigen bolvormigen driehoek is gegeven, dat de som der hoeken 270°, en de straal van den omgeschreven cirkel 60° is. Men vraagt hieruit de zijden en hoeken te bepalen.

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Bassan, J. A. Hansen, J. S. Speijer *en* H. G. Witlage.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABC (Fig. 16) een bolvormige driehoek, regthoekig in C, en O het middelpunt van den omgeschreven cirkel, dan zijn de bolvormige stralen OA, OB en OC aan elkander gelijk, en dus zijn de bolvormige driehoeken OAC, OCB en

Digitized by Google

OAB gelijkbeenig; hieruit volgt vooreerst

hoek OAC + *hoek* OBC = *hoek* OCA + *hoek* OCB = 90°.

Maar de som der hoeken van den driehoek ABC gelijk 270° gegeven zijnde, zoo hebben wij ook

hoek BAC + *hoek* ABC = 270° − *hoek* ACB = 180°,

en hiervan de vorige vergelijking aftrekkende, blijft er over

hoek OAB + *hoek* OBA = 90°,

waaruit wederom door de gelijkheid der hoeken OAB en OBA volgt

hoek OAB = *hoek* OBA = 45°.

Trekt men nu uit O eenen boog eens grooten cirkels loodregt op AB, dan wordt hierdoor AB in D middendoorgedeeld; en in den regthoekigen bolvormigen driehoek AOD is dan bekend *hoek* OAD = 45° en OA = 60°. Derhalve is *Tang.* AD = *Tang.* OA × *Cos.* OAD = *Tang.* 60° × *Cos.* 45°, zoodat AD gevonden wordt door de volgende berekening:

Log. Tang. 60° = 0,2385606

Log. Cos. 45° = 9,8494850 − 10

——————— opt.

Log. Tang. AD = 0,0880456

AD = 50°46′6″.

Hieruit volgt nu onmiddellijk

AB = 2AD = 101°32′12″,

waardoor de hypothenusa van den driehoek ABC gevonden is.

In dien driehoek is voorts

Cot. BAC × *Cot.* ABC = *Cos.* AB,

of ook *Cot.* BAC × *Cot.* (180° − ABC) = *Cos.* (180° − AB), en, omdat 180° − *hoek* ABC = *hoek* BAC is,

*Cot.*² BAC = *Cos.* (180° − AB) = *Cos.* 78°27′48″,

zoodat de hoek BAC gevonden wordt door deze berekening:

Log. Cos. 78°27′48″ = 9,3010191 − 10

——————— halv.

Log. Cot. BAC = 9,6505096 − 10

hoek BAC = 65°54′20″;

en hieruit volgt dan verder

hoek ABC = 180° − *hoek* BAC = 114°5′40″.

Ook is, in den driehoek ABC,

Tang. BC = *Tang.* AB × *Cos.* ABC,

Digitized by Google

of wel *Tang.* BC = *Tang.* (180° — AB) × *Cos.* (180°—ABC),
dat is *Tang.* BC = *Tang.* 78°27′48″ × *Cos.* 65°54′20″;
zoodat wij wederom deze berekening hebben:

Log. Tang. 78°27′48″ = 0,6901170
Log. Cos. 65°54′20″ = 9,6109176 — 10
opt.
Log. Tang. BC = 0,3010346
BC = 63°26′6″.

Omdat eindelijk de hoeken BAC en ABC te zamen 180° uitmaken, zal ook de som der overstaande zijden BC en AC gelijk aan 180° zijn; en alzoo is

AC = 180° — BC = 116°33′54″;

weshalve dan al de zijden en hoeken des driehoeks ABC berekend zijn.

XXVII. Voorstel.

Door H. Middelburg.

De som van de vierkanten van twee zijden eens vierhoeks, verminderd met de som der vierkanten van de twee andere zijden, is altijd kleiner dan tweemaal de som van het product der twee eerste en dat der twee laatste zijden. Men vraagt deze stelling te bewijzen.

Opgelost *door* C. P. Burger, J. Bassan, J. B. Geel, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer en R. van de Weerd.

Oplossing *van* C. P. Burger.

De vier zijden des vierhoeks a, b, c en d noemende, zoo is natuurlijk

$$a < b + c + d;$$

hieruit kan nu achtervolgens afgeleid worden:

$$a - b < c + d,$$
$$(a - b)^2 < (c + d)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2 + 2cd + d^2,$$

en $$(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) < 2ab + 2cd;$$

hetgeen te bewijzen was.

XXVIII. Voorstel.

Door P. Krom.

Er worden gevraagd drie geheele vierkante getallen, die de eigenschap bezitten, dat de som der beide eersten 3 minder is dan het derde; maar dat de som van de wortels

Digitized by Google

der beide eersten 3 *meer is dan de wortel van het derde. Men begeert op deze vraag alle mogelijke antwoorden te vinden.*

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. Bassan, J. B. Geel, J. Heemskerk, Az., J. H. van Kooten, G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, L. Verveen, Jz., R. van de Weerd *en* J. J. Wolfs.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

De bedoelde vierkanten door x^2, y^2 en z^2 voorstellende, is er gegeven

$$x^2 + y^2 = z^2 - 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$x + y = z + 3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

uit (1) volgt $$z^2 - x^2 = y^2 + 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en uit (2) $$z - x = y - 3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wanneer men (3) door (4) deelt, komt er

$$z + x = y + 3 + \frac{12}{y - 3}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en zoo men dan het halve verschil van (4) en (5) neemt, vindt men

$$x = 3 + \frac{6}{y - 3},$$

waaruit volgt

$$(x - 3)(y - 3) = 6. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Omdat x en y geheele getallen verbeelden, moeten, blijkens de laatste vergelijking, $x - 3$ en $y - 3$ twee factoren zijn, waarin het getal 6 moet kunnen ontbonden worden; maar de eenige mogelijke ontbindingen van het getal 6 zijn: 6×1, 3×2, -6×-1 en -3×-2; men zou dus kunnen hebben:

1°. $x-3 = 6$ en $y-3 = 1$, of $x = 9$, $y = 4$ en $z = 10$;
2°. $x-3 = 3$ en $y-3 = 2$, of $x = 6$, $y = 5$ en $z = 8$;
3°. $x-3 = -6$ en $y-3 = -1$, of $x = -3$, $y = 2$ en $z = -4$;
4°. $x-3 = -3$ en $y-3 = -2$, of $x = 0$, $y = 1$ en $z = -2$.

Alleen de beide eerste stelsels van waarden, lossen het voorstel in den eigenlijken zin op, want zoo men negatieve wortels in aanmerking wilde nemen, zou de bepaling „dat de *som* van de wortels der beide eerste getallen 3 *meer* is

Digitized by Google

dan de wortel van het derde" eene gewijzigde beteekenis moeten hebben. Derhalve zijn

$$x^2 = 81,\quad y^2 = 16 \text{ en } z^2 = 100$$

of

$$x^2 = 36,\quad y^2 = 25 \text{ en } z^2 = 64$$

de eenige mogelijke antwoorden op het voorstel; ofschoon x en y, die in de beide vergelijkingen (1) en (2) op dezelfde wijze voorkomen, met elkander kunnen worden verwisseld, zonder invloed op z.

XXIX. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

Op eene plaats, waar de noorderpoolshoogte juist zoo groot is, als toen ter tijd de zuiderzonnedeclinatie was, ging de zon 25° bezuiden het westen onder. Men vraagt naar deze poolshoogte en declinatie (*).

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, G. KOSTER, H. MIDDELBURG *en* R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat NPTZ (Fig. 17) de noordelijke helft van den middagcirkel, en NWSZ de westelijke helft van den horizon voorstellen. Indien dan P de noordpool en S de plaats der zon bij haren ondergang is, trekke men den declinatiecirkel PS, en stelle $NP = \phi$, zoo is volgens het voorstel $PS = 90° + \phi$; terwijl verder $WS = 25°$ en dus $NS = 115°$ is.

In den regthoekigen bolvormigen driehoek PNS, is dan

$$Cos.\ PS = Cos.\ PN \times Cos.\ NS,$$

dus

$$Cos.\ (90 + \phi) = Cos.\ \phi\ Cos.\ 115°,$$

of

$$-\ Sin.\ \phi = Cos.\ \phi \times -\ Sin.\ 25°,$$

en

$$Tang.\ \phi = Sin.\ 25°.$$

Nu is

$$Log.\ Sin.\ 25° = 9{,}6259483 - 10,$$

dus ook

$$Log.\ Tang.\ \phi = 9{,}6259483 - 10,$$

en bijgevolg

$$\phi = 22°54'35'',2,$$

hetgeen naauwkeuriger is dan 22°55', zoo als door HALCKEN wordt opgegeven.

XXX. VOORSTEL.

Door R. VAN DE WEERD.

Men begeert de hoogte van eenen voltooiden driehoekigen

(*) P. HALCKEN, *Zinnen-Confect*, No. 565.

Digitized by Google

kegelstapel, uit te drukken in den straal en het aantal der onderling gelijke kogels, waaruit die stapel is zamengesteld.

Opgelost *door* J. S. Speijer, R. van de Weerd, J. A. Hansen en H. Middelburg.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien men de middelpunten A, B, C en D (Fig. 18) van de vier kogels, die in de hoeken van den stapel liggen, door regte lijnen vereenigt, verkrijgt men een regelmatig tetraëdrum ABCD. Stellen wij deszelfs ribbe $AB = a$, en deszelfs hoogte $DE = h$, dan is (zie J. Badon Ghijben, *Beg. der Meetk.* § 383)

$$h = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Zij nu r de straal der gelijke kogels, en n het aantal kogels, dat in iedere ribbe van den stapel ligt, dan is klaarblijkelijk $a = 2r(n-1)$. Zij verder x de gevraagde hoogte van den stapel, dan is $h = x - 2r$; want de stapel strekt zich ter hoogte r boven het punt D uit, terwijl zich het vlak ABC ter hoogte r boven den grond bevindt. Alzoo is dan

$$x - 2r = 2r(n-1)\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

waaruit volgt

$$x = 2r\{1 + (n-1)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\},$$

zoodat nu de gevraagde hoogte uitgedrukt is in den straal der kogels, en in het aantal dat in elke ribbe van den stapel gevonden wordt.

Laat voorts het aantal kogels, waaruit de geheele stapel bestaat, door p voorgesteld worden, zoo is, volgens eene algemeen bekende formule,

$$p = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$n + 1 = m$ stellende, hebben wij dan

$$6p = (m-1)\,m\,(m+1),$$

of

$$m^3 - m - 6p = 0,$$

waaruit door de formule van Cardanus volgt

$$m = n+1 = \sqrt[3]{\{3p + \sqrt{(9p^2 - \tfrac{1}{27})}\}} + \sqrt[3]{\{3p - \sqrt{(9p^2 - \tfrac{1}{27})}\}};$$

en derhalve is dan verder

$$x = 2r\{1 + (n-1)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\} = 2r\{1 + (m-2)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\}$$

of

Digitized by Google

$x = 2r\left\{1+[-2+\sqrt[3]{(3p+\sqrt{(9p^2-\frac{1}{27})})}+\sqrt[3]{(3p-\sqrt{(9p^2-\frac{1}{27})})}]\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$,
zoodat nu aan het gevraagde voldaan is.

XXXI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de zijden van eenen regthoekigen driehoek te vinden, wanneer gegeven zijn de zijden der twee verschillende vierkanten, welke in dien driehoek beschreven kunnen worden.

Opgelost *door* R. van de Weerd, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Bassan, J. A. Hansen, G. Koster, J. S. Speijer *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* R. van de Weerd.

Zij ABC (Fig. 19) de regthoekige driehoek, waarin de twee verschillende vierkanten BDEF en GHIK beschreven zijn. Zij verder gegeven $BD = DE = EF = FB = a$ en $GH = HI = IK = KG = b$; indien wij dan $AD = x$ en $CF = y$ stellen, hebben wij, uit de gelijkvormigheid der driehoeken ADE, EFC, AKG en HIC, de evenredigheden:

$AD : DE = EF : FC$ of $x : a = a : y$,
$DE : AD = KG : AK$ of $a : x = b : AK$,
$EF : CF = HI : CI$ of $a : y = b : CI$;

waaruit terstond gevonden wordt:

$$xy = a^2,$$

$$AK = \frac{b}{a}x, \quad CI = \frac{b}{a}y,$$

en $$AC = \frac{b}{a}x + b + \frac{b}{a}y = \frac{b}{a}\left\{(x+y)+a\right\}.$$

Maar nu is $$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

dus ook $$(a+x)^2+(a+y)^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{(x+y)+a\right\}^2,$$

of $$2a^2+x^2+y^2+2ax+2ay = \frac{b^2}{a^2}\left\{(x+y)^2+2a(x+y)+a^2\right\};$$

hiervoor kan, omdat $2a^2 = 2xy$ is, dadelijk geschreven worden

$$(x+y)^2+2a(x+y) = \frac{b^2}{a^2}\left\{(x+y)^2+2a(x+y)+a^2\right\},$$

terwijl dan verder uit deze vergelijking volgt:

Digitized by Google

$$(a^2 - b^2)(x + y)^2 + 2a(a^2 - b^2)(x + y) = a^2b^2;$$

$$(x + y)^2 + 2a(x + y) = \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2},$$

$$(x + y)^2 + 2a(x + y) + a^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} + a^2,$$

$$\left\{(x + y) + a\right\}^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2},$$

$$(x + y) + a = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

en $$x + y = -a + \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}};$$

komende hier vóór de wortelgrootheid geen dubbel teeken te pas, omdat uit den aard der zaak $(x + y) + a$ niet anders dan positief kan wezen.

De gevondene waarde van $(x + y) + a$ overbrengende, in de reeds voor AC verkregene uitdrukking, hebben wij voor de hypothenusa des driehoeks onmiddellijk

$$AC = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Stellen wij verder ter bekorting $-a + \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = p$, dan hebben wij

$$x + y = p \text{ en } xy = a^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4a^2)} \text{ en } y = \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4a^2)};$$

voor de beide regthoekszijden des driehoeks, hebben wij alzoo

$$AB = a + x = \tfrac{1}{2}p + a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4a^2)}$$

en $$BC = a + y = \tfrac{1}{2}p + a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4a^2)},$$

waarin men des verkiezende voor p hare waarde kan substitueren.

Tot de bestaanbaarheid des voorstels, moet vooreerst $a > b$ zijn. Verder zal men moeten hebben $p >$ of $= 2a$, dat is

$$-a + \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} > \text{ of } = 2a,$$

waaruit achtervolgens afgeleid kan worden:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} > \text{ of } = 3a,$$

$$a > \text{ of } = 3\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

Digitized by Google

$$a^2 > \text{of} = 9a^2 - 9b^2,$$
$$9b^2 > \text{of} = 8a^2,$$
en $$b > \text{of} = \tfrac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

Indien $b = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$ gegeven ware, zou men hebben $p = 2a$, $AC = 2a\sqrt{2}$, $AB = BC = 2a$, en de regthoekige driehoek zou dan gelijkbeenig zijn. Met uitzondering van dit bijzondere geval, zal $b < a$ en $b > \frac{2}{3}a\sqrt{2}$, dat is $b^2 < a^2$ en $b^2 > \frac{8}{9}a^2$ moeten gegeven zijn.

Aanmerking van W. J. C. Rammelman Elsevier. De bedoelde driehoek kan ook gemakkelijk uit de gegevens geconstrueerd worden. Men beschrijve namelijk, op eene lijn $AP = a$ (Fig. 20) als middellijn, eenen halven cirkel; plaatse daarin eene koorde $AQ = b$; rigte uit A eene loodlijn op AP op, en trekke door P en Q eene lijn, welke de genoemde loodlijn ergens in C snijden zal; dan is AC de hypothenusa van den begeerden driehoek. Want uit deze constructie volgt

$$AC : AQ = AP : PQ, \text{ dat is } AC = \frac{AP \times AQ}{PQ} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Plaatst men verder ergens op AC een vierkant ghik, welks zijde gelijk b is, en trekt men de lijnen Ag en Ch, wier verlengden elkander ergens in b snijden, dan zal eene lijn RS, door b evenwijdig met AC getrokken, de meetkunstige plaats zijn van de driehoeken, die, op AC als bazis, ingeschrevene vierkanten gelijk aan ghik of b^2 bevatten. (Zie *Verzam. van Nieuwe Wisk. Voorst.* Deel II, Voorstel CCVIII.)

Beschrijft men dus op AC als middellijn eenen halven cirkel, dan zal deze cirkel, door zijne snijding met de lijn RS, twee punten B en B' doen kennen, welke men slechts met de punten A en C behoeft te vereenigen, om den begeerden driehoek ABC of AB'C te verkrijgen.

De beide driehoeken, door deze constructie opgeleverd, zijn gelijk en gelijkvormig en verschillen slechts in stand. Zij komen overeen met de dubbele waarden, die door berekening voor de regtshoekzijden gevonden zijn.

Digitized by Google

XXXII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Uit een willekeurig punt van het bovenvlak van eenen cubus, zijn lijnen naar drie hoekpunten van het grondvlak getrokken. Indien nu deze drie lijnen gegeven zijn, begeert men de zijde van den cubus te vinden.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Speijer, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laat ABCDEF (Fig. 21) de bedoelde cubus, en P het punt van deszelfs bovenvlak zijn, zoodat wij tot gegevens hebben de lijnen $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$. Indien wij dan uit P eene loodlijn PQ op het grondvlak ABC laten vallen, vervolgens in het grondvlak de lijnen QA, QB en QC trekken, en de te vindene ribbe van den cubus gelijk x stellen, hebben wij terstond

$PQ = x$, $QA = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $QB = \sqrt{(b^2 - x^2)}$ en $QC = \sqrt{(c^2 - x^2)}$.

Stellen wij verder *hoek* $ABQ = \phi$, zoo is *hoek* $CBQ = 90° - \phi$, en uit de driehoeken ABQ en CBQ volgt dan

$$AQ^2 = AB^2 + BQ^2 - 2AB \times BQ \times Cos.\ \phi$$

en $$CQ^2 = BC^2 + BQ^2 - 2BC \times BQ \times Cos.(90° - \phi),$$

dat is: $a^2 - x^2 = x^2 + (b^2 - x^2) - 2x\,Cos.\phi\sqrt{(b^2 - x^2)}$

en $c^2 - x^2 = x^2 + (b^2 - x^2) - 2x\,Sin.\phi\sqrt{(b^2 - x^2)}$.

Uit deze vergelijkingen volgt dadelijk

$$2x\ Cos.\ \phi\sqrt{(b^2 - x^2)} = x^2 + (b^2 - a^2)$$

en $$2x\ Sin.\ \phi\sqrt{(b^2 - x^2)} = x^2 + (b^2 - c^2),$$

of zoo wij deze waarden in het vierkant brengen

$$4x^2(b^2 - x^2)\,Cos.^2\phi = x^4 + 2x^2(b^2 - a^2) + (b^2 - a^2)^2$$

en $$4x^2(b^2 - x^2)\,Sin.^2\phi = x^4 + 2x^2(b^2 - c^2) + (b^2 - c^2)^2.$$

De beide laatste vergelijkingen bij elkander optellende, komt er, omdat $Sin.^2\ \phi + Cos.^2\ \phi = 1$ is,

$$4x^2(b^2 - x^2) = 2x^4 + 2x^2(2b^2 - a^2 - c^2) + (b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2,$$

waaruit achtervolgens gevonden wordt:

$$6x^4 - 2(a^2 + c^2)x^2 + (b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0,$$

$$x^4 - \tfrac{1}{3}(a^2 + c^2)x^2 + \tfrac{1}{6}(b^2 - a^2)^2 + \tfrac{1}{6}(b^2 - c^2)^2 = 0,$$

$$x^2 = \tfrac{1}{6}(a^2 + c^2) \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{36}(a^2 + c^2)^2 - \tfrac{1}{6}(b^2 - a^2)^2 - \tfrac{1}{6}(b^2 - c^2)^2\right\}},$$

$$x^2 = \tfrac{1}{6}(a^2 + c^2) \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{\left\{(a^2 + c^2)^2 - 6(b^2 - a^2)^2 - 6(b^2 - c^2)^2\right\}},$$

Digitized by Google

$x^2 = \frac{1}{6}(a^2+c^2) \pm \frac{1}{6}\sqrt{(2a^2c^2+12a^2b^2+12c^2b^2-12b^4-5a^4-5c^4)}$,
en
$x = \sqrt{\frac{1}{6}\{(a^2+c^2) \pm \sqrt{(2a^2c^2+12a^2b^2+12c^2b^2-12b^4-5a^4-5c^4}}$
weshalve dan het voorstel is opgelost.

Aanmerking *van* J. S. Speijer. De langste lijn, die uit het bovenvlak van den cubus naar deszelfs grondvlak kan getrokken worden, is blijkbaar de diagonaal AD, welks lengte door $x\sqrt{3}$ wordt uitgedrukt; derhalve is zeker $a^2 + c^2 < 6x^2$ of $x^2 > \frac{1}{6}(a^2 + c^2)$, en bijgevolg zal in de verkregene uitkomst het bovenste teeken moeten gebruikt worden.

Is $a = b = c$, als wanneer het punt P juist in het midden van het bovenvlak ligt, dan is

$$x^2 = \tfrac{2}{3}a^2 \quad \text{en} \quad x = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

XXXIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

De vergelijking $(1 + x^2)\partial y - xy\partial x = n\partial x$ ***te integreren.***

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Bassan, C. P. Burger, H. Middelburg, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Stellen wij $y = zx$ en dus $\partial y = z\partial x + x\partial z$, zoo gaat de gegevene vergelijking over in

$$(1 + x^2)(z\partial x + x\partial z) - xz^2\partial x = n\partial x$$

of $$z\partial x + x\partial z + x^3\partial z = n\partial x;$$

zij kan dan achtervolgens herleid worden tot

$$(z - n)\partial x = -x(1 + x^2)\partial z,$$

$$\frac{\partial z}{z - n} = -\frac{\partial x}{x(1 + x^2)}$$

en $$\frac{\partial z}{z - n} = -\frac{\partial x}{x} + \frac{x\partial x}{1 + x^2},$$

als wanneer iedere term dadelijk geïntegreerd kan worden.

Wij hebben alzoo

$$Log.(z - n) = -Log.\, x + Log.\sqrt{(1 + x^2)} + Log.\, C$$

of $$Log.(z - n) = Log.\frac{C\sqrt{(1 + x^2)}}{x};$$

hieruit volgt $$z - n = \frac{C\sqrt{(1 + x^2)}}{x},$$

dat is: $$zx - nx = C\sqrt{(1 + x^2)},$$

Digitized by Google

of, zoo wij voor xx wederom y schrijven,

$$y = nx + C\sqrt{(1 + x^2)};$$

hetgeen dan nu de begeerde integraal is.

Aanmerking. Schrijft men de verkregene vergelijking in den vorm

$$\frac{y - nx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = C,$$

dan zal men, door haar alzoo te differentiëren, onmiddellijk de gegevene differentiaalvergelijking terugvinden.

XXXIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De waarde van y te vinden, uit de differentiaalvergelijking

$$x^{12}\partial y + 4x^{11}y\partial x + 3x^8\partial y + 8x^7y\partial x + 3x^4\partial y + 4x^3y\partial x = \partial x - \partial y.$$

Opgelost *door* C. P. Burger, J. Bassan, S. Dik, Cornsz., H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* C. P. Burger.

Voor de gegevene differentiaalvergelijking kunnen wij schrijven

$$(x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1)\partial y + 4y(x^8 + 2x^4 + 1)x^3\partial x = \partial x,$$

of $$(x^4 + 1)^3\partial y + 4y(x^4 + 1)^2x^3\partial x = \partial x;$$

door $(x^4 + 1)^2$ deelende, hebben wij dan

$$(x^4 + 1)\partial y + 4yx^3\partial x = \frac{\partial x}{(x^4 + 1)^2},$$

waarvoor wederom geschreven kan worden

$$(x^4 + 1)\partial y + y\partial(x^4 + 1) = \frac{\partial x}{(x^4 + 1)^2}.$$

Het voorste lid van deze laatste vergelijking is nu eene volkomene differentiaal, zoodat men heeft

$$y(x^4 + 1) = \int \frac{\partial x}{(x^4 + 1)^2};$$

verder is volgens de formule II, voorkomende in de *Diff. en Int. Rek.* van I. R. Schmidt, § 201, door in die formule $m = 0$, $p = -2$, $q = 1$, $n = 4$, $a = 1$ en $b = 1$ te nemen

$$\int \frac{\partial x}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \tfrac{3}{4}\int \frac{\partial x}{x^4+1};$$

terwijl volgens het 5de Voorbeeld, in § 184 van hetzelfde

Digitized by Google

werk opgegeven;

$$\int\frac{\partial x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}Log.\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}Boog\ Tang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

is. Door substitutie dezer waarden, heeft men alzoo

$$y(x^4+1) = C + \frac{x}{4(x^4+1)} \cdot \cdot \cdot$$

$$+\frac{3}{8\sqrt{2}}Log.\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \frac{3}{8\sqrt{2}}Boog\ Tang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

waaruit voor de gevraagde waarde van y gevonden wordt:

$$y = \frac{C}{x^4+1} + \frac{x}{4(x^4+1)^2} \cdot \cdot \cdot$$

$$+\frac{3\sqrt{2}}{32(x^4+1)}Log.\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{3\sqrt{2}}{16(x^4+1)}BoogTang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

XXXV. VOORSTEL.

Door T. A. F. DELPRAT.

Indien een gegeven cirkel eene gegevene lijn in een gegeven punt aanraakt, en men dan uit de uiteinden dier lijn raaklijnen aan den cirkel trekt, ontstaat hierdoor een driehoek, waarvan de gegeven lijn eene der zijden is. Men vraagt de beide andere zijden van dien driehoek, zonder behulp der trigonometrie, te berekenen.

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, H. MIDDELBURG, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, R. VAN DE WEERD, J. J. WOLFS, G. KOSTER *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat M (Fig. 22) het middelpunt zijn van den gegeven cirkel, en AB de gegevene lijn, welke door dien cirkel in het gegevene punt D geraakt wordt. Indien men dan uit A en B lijnen trekt, welke den cirkel ergens in E en F raken, ontstaat er een driehoek ABC, van welken de zijden AC en BC moeten berekend worden, terwijl MD, AD en BD gegeven zijn. Omdat AE = AD en BF = BD is, komt het er alleen op aan CE = CF te vinden, en men stelle dus CE = CF = x, AD = AE = m, BD = BF = n, en MD = r.

Den inhoud des driehoeks door I en deszelfs halven omtrek door s voorstellende, is volgens bekende regels

$$I = rs;$$

maar de zijden des driehoeks door a, b en c voorstellende,

Digitized by Google

is ook

$$I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

hieruit volgt

$$r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

of $$r^2s = (s-a)(s-b)(s-c).$$

Nu is hier:

$a = BC = x+n$, $b = AC = x+m$, $c = AB = m+n$,

en dus, omdat $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ is,

$s = x+m+n$, $s-a = m$, $s-b = n$ en $s-c = x$;

door deze waarden in de voorgaande vergelijking over te brengen, komt er dan

$$r^2(x+m+n) = mnx,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x = \frac{(m+n)r^2}{mn-r^2},$$

zijnde dan verder

$$AC = x+m = \frac{n(m^2+r^2)}{mn-r^2}$$

en $$BC = x+n = \frac{m(n^2+r^2)}{mn-r^2}.$$

Aanmerking. Indien $r^2 > mn$ is, worden de waarden van AC en BC negatief. Dit beteekent dan, dat de raaklijnen, uit A en B aan den cirkel getrokken, elkander aan den anderen kant van AB zullen ontmoeten; en dat dus derzelver raakpunten E en F met den cirkel, zoo als in Fig. 23 is voorgesteld, op de verlengden van de zijden AC en BC des driehoeks ABC zullen gelegen zijn.

Is echter $r^2 = mn$ gegeven, dan is $mn - r^2 = 0$, dus $AC = \infty$ en $BC = \infty$. In dit geval loopen de raaklijnen, uit A en B aan den cirkel getrokken, evenwijdig; en er bestaat dan, onder deze gegevens, geen driehoek.

XXXVI. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

Men vraagt eene hoogsteenvoudige constructie, om op eene gegevene lijn als zijde, eenen regelmatigen vijfhoek te beschrijven.

Opgelost *door* G. Koster, R. van de Weerd, J. A. Hansen, J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. H. van Kooten en H. Middelburg.

Digitized by Google

I. Oplossing van G. Koster.

Wanneer de zijde eens regelmatigen vijfhoeks gelijk a gegeven is, is de diagonaal van dien vijfhoek gelijk aan $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Zij dus AB (Fig. 24) de gegevene lijn, zoo rigte men, uit het midden M van dezelve, eene loodlijn MN op, die gelijk aan AB is; trekke AN en neme, op het verlengde van AN, $NP = AM = \frac{1}{2}$ AB, dan is AP gelijk aan den diagonaal des te beschrijven vijfhoeks. Want AB $= a$ stellende, is $AM = \frac{1}{2}a$, $MN = a$, $AN = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, $NP = \frac{1}{2}a$ en $AP = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$.

Beschrijft men dus uit A en B, met AB als straal, de cirkelboogjes d d′ en e e′, en almede uit A en B, met AP als straal, de cirkelboogjes f f′ en g g′, dan zullen door de snijding dezer boogjes de punten C, D en E gevonden worden, die, met de uiteinden der gegevene lijn AB, de hoekpunten des begeerden vijfhoeks ABCDE zijn.

II. Oplossing van R. van de Weerd.

Van twee elkander snijdende diagonalen eens regelmatigen vijfhoeks, zijn de grootste stukken gelijk aan de zijde des vijfhoeks. Wanneer men dus, na de lijn AP even als boven geconstrueerd te hebben, AB verlengt, zoodat AQ $=$ AP zij, is BQ gelijk aan de kleinste stukken der elkander snijdende diagonalen. Beschrijft men dus op AB eenen gelijkbeeningen driehoek, welks opstaande zijden AR en BR gelijk aan BQ zijn, zoo heeft men slechts, op de verlengden dezer opstaande zijden, RC $=$ RE $=$ AB te nemen, en vervolgens de ruit ERCD te voltooijen, om de hoekpunten C, D en E van den begeerden vijfhoek te vinden.

XXXVII. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

Een parallelopipedum en een cilinder worden, op een horizontaal vlak, zoodanig tegen elkander gesteld, dat zij elkander volgens eene horizontale lijn raken. Men vraagt naar de grootte, de rigting en het aangrijpingspunt eener kracht, welke, op het parallelopipedum aangebragt zijnde, op het punt zal zijn de beide ligchamen in zulk eene beweging te brengen, dat het parallelopipedum voortschuivende tegen den cilinder drukt en dezen doet voortrol-

Digitized by Google

len. Hierbij zoowel de rollende als slepende wrijving in aanmerking nemende.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, R. van de Weerd, J. S. Spruijt *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat de lijn AB (Fig. 25) het horizontale vlak, de regthoek CDE het parallelopipedum, de cirkel FGH den cilinder, en het punt H de lijn van aanraking der beide ligchamen verbeelden. Indien dan eene kracht X, op het parallelopipedum CDE aangebragt, de beide ligchamen, op de aangeduide wijze, van A naar B beweegt, zal het parallelopipedum eene slepende, en de cilinder eene rollende wrijving op het horizontale vlak uitoefenen; terwijl er bovendien in H eene slepende wrijving van den cilinder tegen het parallelopipedum zal plaats hebben, Zal dus de kracht X op het punt zijn van de ligchamen te bewegen, dan moet zij juist zoo groot zijn als noodig is, om de tegenstanden der genoemde wrijvingen te overwinnen.

Om de rollende wrijving van den cilinder op het horizontale vlak in rekening te kunnen brengen, moet men aannemen, dat de cirkel FGH met de lijn AB een zeker boogje II' gemeen heeft, dat zich op gelijke afstanden aan weerszijden van het raakpunt F uitstrekt; de stralen MF en MI getrokken zijnde, is de hoek FMI door den coëfficiënt der rollende wrijving bekend. Dien wrijvingscoëfficiënt namelijk s noemende, MF $=r$ en *hoek* FMI $=v$ stellende, heeft men, volgens de theorie van Coulomb, $Sin.\ v = \frac{s}{r}$; moetende de waarde van s genomen worden voor dezelfde lengteëenheid, waarin men r verkiest uit te drukken. In het alzoo bepaalde punt I, zal nu de cilinder tegen het horizontale vlak moeten drukken, wanneer hij op het punt zal zijn, om van A naar B voort te rollen.

Omdat in H slepende wrijving plaats heeft, behoeft men den cirkel FGH en de lijn DE, slechts als het enkele raakpunt H gemeen hebbende, te beschouwen. De straal MH, is dan de gemeenschappelijke normaal van de oppervlakken der beide ligchamen in het punt H; en opdat de beide ligchamen op het punt zullen zijn van in den bedoelden zin

Digitized by Google

langs elkander te glijden, zullen zij in H gelijke drukkingen op elkander moeten uitoefenen, gerigt volgens eene lijn KL, welke met HM juist den wrijvingshoek maakt; zoodat m de coëfficiënt der slepende wrijving van den cilinder langs het parallelopipedum, en *hoek* MHL $= \mu$ zijnde, de rigting der lijn KL door de formule *Tang.* $\mu = m$ bepaald wordt.

Ten einde voorts het parallelopipedum op het punt zij, van over het horizontale vlak van A naar B te schuiven, zal hetzelve op het horizontale vlak moeten drukken in eene rigting, die met de verticale lijn juist den wrijvingshoek maakt; zoodat deze rigting evenwijdig moet loopen met eene lijn DN, zoodanig getrokken, dat, *hoek* EDN $= \mu'$ stellende, *Tang.* $\mu' = m'$ zij; m' den coëfficiënt der slepende wrijving van het parallelopipedum over het horizontale vlak voorstellende.

Daar dan het punt I en de rigtingen der lijnen KL en DN door de verschillende wrijvingscoëfficiënten bepaald zijn; daar alleen het gewigt van den cilinder de drukkingen van dit ligchaam tegen het horizontale vlak en tegen het parallelopipedum kan voortbrengen; en daar eindelijk de drukkingen, welke het parallelopipedum tegen het horizontale vlak en tegen den cilinder kan uitoefenen, niet alleen uit het gewigt van dat ligchaam, maar ook uit de daarop werkende kracht X ontstaan, zoo wijst het aangevoerde ons gemakkelijk den weg aan, om de grootte der kracht X, welker aangrijpingspunt en rigting onder zekere beperkingen overigens willekeurig kunnen aangenomen worden, zoodanig te bepalen, dat zij op het punt is de bedoelde beweging voort te brengen.

Zij namelijk M het zwaartepunt van den cilinder, P deszelfs gewigt, en O het punt waar de rigting dier kracht P de lijn KL snijdt, dan ontbinden wij vooreerst de kracht $P =$ OR, in twee andere krachten OR′ en OR″, wier rigtingen door H en I gaan. Zij verder Z het zwaartepunt van het parallelopipedum, Q deszelfs gewigt, S het punt, waar de rigting dezer kracht Q de voor X aangenomene rigting snijdt, en laat ST′ de onbekende grootte der kracht X voorstellen; indien dan de krachten $X =$ ST′ en $Q =$ ST″ tot eene enkele kracht ST zamengesteld worden, en men uit

Digitized by Google

het punt U, waar de lijn KL door de rigting van ST gesneden wordt, eene lijn UV evenwijdig met ND trekt, zal men, UW = ST genomen hebbende, de resultante van X en Q kunnen ontbinden in twee krachten UW' en UW", langs KL en UV gerigt; en van deze zal UW' = OR' moeten wezen. Want dit zoo zijnde, oefenen de cilinder en het parallelopipedum gelijke drukkingen OR' en UW' tegen elkander uit, volgens KL gerigt, terwijl OR' de door I gaande drukking van den cilinder, en UW" de met DN evenwijdige drukking van het parallelopipedum, tegen het horizontale vlak, voorstelt; alles zoo als zulks gevorderd wordt, opdat de ligchamen op het punt zijn de voorgestelde beweging aan te nemen.

Om nu de grootte van X = ST' te bepalen, welke voldoet aan de voorwaarde, dat door de bovengenoemde zamenstelling en ontbinding UW' = OR' wordt, hebben wij de volgende berekening. Wij stellen *hoek* FOI = θ, dan is, omdat *hoek* FMI = ν is, *hoek* OIM = $\theta - \nu$; de driehoek OMI geeft alzoo

$$MI : MO = Sin.\ \theta : Sin.\ (\theta - \nu),$$

terwijl uit den driehoek OMH, waarin *hoek* MHO = μ gegeven is, dadelijk volgt

$$MH : MO = 1 : Tang.\ \mu,$$

weshalve wij hebben

$$1 : Tang.\ \mu = Sin.\ \theta : Sin.\ (\theta - \nu),$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$Cot.\ \theta = \frac{Cos.\ \nu - Tang.\ \mu}{Sin.\ \nu} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Dewijl voorts *hoek* ROR' = $90° + \mu$ is, volgt uit het parallelogram OR'RR',

$$OR' : OR = Sin.\ \theta : Sin.\ (90° + \mu + \theta) = 1 : \frac{Cos.\ (\theta + \mu)}{Sin.\ \theta},$$

of zoo wij OR' = D stellen,

$$D : P = 1 : Cot.\ \theta\ Cos.\ \mu - Sin.\ \mu,$$

en

$$D = \frac{P}{Cot.\ \theta\ Cos.\ \mu - Sin.\ \mu};$$

door substitutie der waarde (1) verkrijgen wij dan na behoorlijke herleiding

Digitized by Google

$$D = \frac{P\ Sin.\ \nu}{Cos.\ (\mu + \nu) - Sin.\ \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Verder bepalen wij de aangenomene rigting der kracht X, door *hoek* $T'ST'' = \alpha$, en stellen *hoek* $T''ST = \phi$, dan volgt uit het parallelogram $ST'TT''$ vooreerst

$$X : Q = ST' : ST'' = Sin.\ \phi : Sin.\ (\alpha - \phi),$$

waaruit men gemakkelijk vindt

$$Cot.\ \phi = \frac{Q + X\ Cos.\ \alpha}{X\ Sin.\ \alpha}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

terwijl hetzelfde parallelogram nog geeft

$$X : ST = Sin.\ \phi : Sin.\ \alpha \text{ of } ST = \frac{X\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ \phi} \quad . \quad (4)$$

Omdat *hoek* $NDE = \mu'$ en UV evenwijdig met ND is, is *hoek* $W'UW'' = 90° - \mu - \mu'$ en *hoek* $WUW'' = \phi - \mu'$, zoodat het parallelogram $UW'WW'$ ons geeft

$$UW' : UW = Sin.\ (\phi - \mu') : Sin.\ (90° - \mu - \mu'),$$

of daar $UW' = OR' = D$ en $UW = ST$ is,

$$D : ST = Sin.\ (\phi - \mu') : Cos.\ (\mu + \mu');$$

hierin voor ST de waarde (4) substituerende, vinden wij

$$\frac{DCos.(\mu+\mu')}{XSin.\alpha} = \frac{Sin.(\phi-\mu')}{Sin.\phi} = Cos.\mu' - Cot.\phi Sin.\mu',$$

waaruit volgt

$$Cot.\ \phi = \frac{XSin.\alpha Cos.\mu' - DCos.(\mu+\mu')}{XSin.\alpha Sin.\mu'};$$

blijkens de bovengevondene waarde (3), hebben wij alzoo

$$Q + XCos.\alpha = \frac{XSin.\alpha Cos.\mu' - DCos.(\mu+\mu')}{Sin.\mu'},$$

en hieruit vinden wij

$$X = \frac{DCos.(\mu+\mu') + QSin.\mu'}{Sin.(\alpha-\mu')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Door deze formule, waarin D door de formule (2) bekend is, wordt dan nu de grootte der kracht X gevonden, die op het punt zal zijn de ligchamen te bewegen; zijnde het punt S, waar deze kracht de door Z gaande verticale lijn snijdt, en de hoek α, dien deze kracht met de verticale lijn maakt, willekeurig aangenomen geworden.

Brengen wij de waarde van X in (3) over, dan verkrijgen wij, ter bepaling van den hoek ϕ,

Digitized by Google

$$Cot.\,\phi = \frac{DCos.(\mu+\mu')Cot\,\alpha + QCos.\mu'}{DCos.(\mu+\mu') + QSin.\mu'} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wil men de drukking OR' kennen, die de cilinder op het horizontale vlak uitoefent, zoo heeft men uit het parallelogram OR'RR' onmiddellijk

$$OR' : P = Sin.\,(90° + \mu) : Sin.\,(90° + \mu + \theta),$$

en dus $$OR' = \frac{P\ Cos.\ \mu}{Cos.\ (\theta + \mu)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

hebbende θ de waarde door de formule (1) bepaald.

Verlangt men de drukking UW' van het parallelopipedum tegen het horizontale vlak te kennen, zoo heeft men uit het parallelogram UW'WW', waarin $UW' = D$ is,

$$UW' : D = Sin.\,(90° - \phi - \mu) : Sin.\,(\phi - \mu'),$$

$$\text{of} \quad UW' = \frac{DCos.(\phi+\mu)}{Sin.(\phi-\mu')} = \frac{D(Cot.\phi Cos.\mu - Sin.\mu)}{Cos.\mu' - Cot.\phi Sin.\mu'};$$

en hierin de waarde (6) voor $Cot.\,\phi$ gesubstitueerd hebbende, vindt men dan na behoorlijke herleiding

$$UW' = \frac{DCos.(\alpha+\mu) + QSin.\alpha}{Sin.(\alpha-\mu')}, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

hebbende D wederom de bekende waarde, door de formule (2) aangewezen.

Begeert men eindelijk het punt V te bepalen, dan kan men daartoe de lijn $YV = x$ berekenen, $YS = h$ en $YS' = h'$ als bekenden aannemende. Laten wij te dien einde uit U loodlijnen UU' en UU" op YS en CD vallen, dan hebben wij al dadelijk, daar *hoek* $VUU' = \mu'$ is,

$$x = UU' + U'V = UU' + UU'' Tang.\mu' = \frac{UU' Cos.\mu' + UU'' Sin.\mu'}{Cos.\mu'};$$

voorts volgt uit den driehoek USS', waarin $SS' = h - h'$, *hoek* $USS' = \phi$ en *hoek* $US'S = 90° + \mu$ is,

$$US' = \frac{(h - h')\ Sin.\ \phi}{Cos.\ (\phi + \mu)},$$

zoodat de driehoek UU'S', waarin *hoek* $S'UU' = \mu$ is, dan geeft:

$$UU' = US'\ Cos.\ \mu = \frac{(h - h')\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \mu}{Cos.\ (\phi + \mu)},$$

$$U'S' = US'\ Sin.\ \mu = \frac{(h - h')\ Sin.\ \phi\ Sin.\ \mu}{Cos.\ (\phi + \mu)},$$

$$\text{en} \quad UU'' = YS' - U'S' = h' - \frac{(h - h')\ Sin.\ \phi\ Sin.\ \mu}{Cos.\ (\phi + \mu)}$$

Digitized by Google

of $$UU'' = \frac{h' \; Cos.\, \phi \; Cos.\, \mu - h \; Sin.\, \phi \; Sin.\, \mu}{Cos.\, (\phi + \mu)};$$

door nu deze waarden voor UU'_1 en UU'', te substitueren in de uitdrukking, die wij reeds voor x vonden, komt er

$$x = \frac{h \; Sin.\, \phi \; Cos.\, (\mu + \mu') - h' \; Cos.\, \mu \; Sin.\, (\phi - \mu')}{Cos.\, \mu' \; Cos.\, (\phi + \mu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Schrijft men de laatste formule in den vorm

$$x = \frac{h \; Cos.\, (\mu + \mu') - h' \; Cos.\, \mu \; (Cos.\, \mu' - Sin.\, \mu' \; Cot.\, \phi)}{Cos.\, \mu' \; (Cot.\, \phi \; Cos.\, \mu - Sin.\, \mu)},$$

en brengt men daarin de waarde van $Cot.\, \phi$ volgens (6) over, dan vindt men na behoorlijke herleiding

$$x = \frac{h \; Sin.\, \alpha \; \{D \; Cos.\, (\mu + \mu') + Q \; Sin\, \mu'\} - h' \; D \; Cos.\, \mu \; Sin.\, (\alpha - \mu')}{Cos.\, \mu' \; \{D \; Cos.\, (\alpha + \mu) + Q \; Sin.\, \alpha\}};$$

voorts nog $DY = a$ stellende, als wanneer blijkbaar $h' = r + a \; Tang\, \mu$ is, heeft men ten laatste

$$x = \frac{h \; Sin.\, \alpha \; \{D \; Cos.\, (\mu + \mu') + Q \; Sin.\, \mu'\} - (r + a \; Tang.\, \mu) \; D \; Cos.\, \mu \; Sin.\, (\alpha - \mu')}{Cos.\, \mu' \; \{D \; Cos.\, (\alpha + \mu) + Q \; Sin.\, \alpha\}}, \quad \ldots \quad (10)$$

waardoor nu x in de gegevens en in de door (2) bekende grootheid D is uitgedrukt.

De beperkingen, onder welke het aangrijpingspunt en de rigting der kracht X willekeurig mogen aangenomen worden; dat is: de grenzen, binnen welke de gegevens h en α moeten blijven, opdat de kracht, de daartoe vereischte grootte hebbende, op het punt zij de ligchamen te bewegen, kunnen uit de formulen (8) en (10) worden opgespoord; wordende deze beperkingen bepaald door de voorwaarden, dat de drukking UW'' niet negatief, en het punt V niet buiten de punten C en D gelegen mag zijn. Immers zoo de eerste voorwaar-

Digitized by Google

de niet vervuld was, zou het parallelopipedum zich van het horizontale vlak verwijderen, en zoo de tweede voorwaarde niet vervuld was, zou hetzelve voor- of achter-over omkantelen, naargelang het punt V op DB of AC viel.

Neemt men α te klein, dan wordt de teller, neemt men α te digt bij 180°, dan wordt de noemer der formule (8), en dus in beide gevallen de drukking UW', negatief. De grenzen waartusschen α genomen moet worden, opdat dit niet plaats hebbe, vindt men door teller en noemer der formule (8) beurtelings gelijk nul te stellen; zij zijn alzoo:

$$\alpha > \mu \text{ en } \alpha < \textit{Boog Cot.} \left(-\frac{Q - D\ \textit{Sin.}\ \mu}{D\ \textit{Cos.}\ \mu}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Heeft men α tusschen deze grenzen genomen, en neemt men vervolgens h te groot, dan wordt volgens (10) x grooter dan YD, en het parallelopipedum kantelt voorover; neemt men echter h te klein, dan wordt x negatief en $-x$ grooter dan YC, als wanneer het parallelopipedum achterover kantelt. Stellen wij behalve $DY = a$ ook nog $CY = b$, dan hebben wij in de formule (10) slechts beurtelings $x = a$ en $x = -b$ te substitueren, om daaruit voor de grenzen, waartusschen men h nemen moet, te vinden:

$$\left.\begin{aligned} h &< \frac{(r + a\ \textit{Tang.}\ \mu)\ D\ \textit{Cos.}\ \mu\ \textit{Sin.}\ (\alpha - \mu') + a\ \textit{Cos.}\ \mu' \left\{D\ \textit{Cos.}\ (\alpha + \mu) + Q\ \underline{\textit{Sin.}\ \alpha}\right\}}{\textit{Sin.}\ \alpha \left\{D\ \textit{Cos.}\ (\mu + \mu') + Q\ \textit{Sin.}\ \mu'\right\}} \\ \text{en } h &> \frac{(r + a\ \textit{Tang.}\ \mu)\ D\ \textit{Cos.}\ \mu\ \textit{Sin.}\ (\alpha - \mu') - b\ \textit{Cos.}\ \mu' \left\{D\ \textit{Cos.}\ (\alpha + \mu) + Q\ \underline{\textit{Sin.}\ \alpha}\right\}}{\textit{Sin.}\ \alpha \left\{D\ \textit{Cos.}\ (\mu + \mu') + Q\ \textit{Sin.}\ \mu'\right\}}. \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

In plaats van het aangrijpingspunt en de rigting der kracht X, kan men ook de plaats van het punt V, en de hoegrootheid der drukking UW' willekeurig aannemen; men zal dan zeer gemakkelijk door constructie de grootte, de rigting en het aangrijpingspunt der kracht X kunnen vinden. Na namelijk de lijnen KL en DN, het

Digitized by Google

punt I, en het parallelogram OR'RR" geconstrueerd te hebben, trekke men uit het aangenomen punt V, de lijn VU evenwijdig met DN, totdat zij KL in U ontmoet; daarna neme men op UV, het stuk UW" gelijk aan de willekeurig aangenomene waarde; en op KL, het stuk UW' gelijk aan OR'. Vervolgens voltooije men het parallelogram UW'WW", en trekke daarin den diagonaal UW, welken men zoo noodig verlengt, totdat hij de verticale lijn door Z gaande ergens in S ontmoet. Alsnu neme men ST = UW, ST" = Q en voltooije het parallelogram ST'TT", dan stelt ST" zoo in rigting als in grootte de kracht voor, die, haar aangrijpingspunt in S hebbende, op het punt is de ligchamen in beweging te brengen.

Wil men in dit geval de waarden van X, α en h, uit de bekende waarden van UW" = L' en YV = d berekenen, zoo heeft men vooreerst volgens (8)

$$D' \; Sin. \; (\alpha - \mu') = D \; Cos. \; (\alpha + \mu) + Q \; Sin. \; \alpha,$$

waaruit gevonden wordt

$$Cot. \; \alpha = \frac{D \; Sin. \; \mu + D' \; Cos. \; \mu' - Q}{D \; Cos. \; \mu + D' \; Sin. \; \mu'}; \quad . \quad . \quad (13)$$

alzoo α bekend wordende, heeft men de formule (5), waardoor de grootte van X kan worden berekend. Eindelijk geeft de formule (10), na door middel van (5) en (8) vereenvoudigd te zijn,

$$d = \frac{h \, X \, Sin. \; \alpha - (r + a \; Tang. \; \mu) \; D \; Cos. \; \mu}{D' \; Cos. \; \mu'},$$

waaruit volgt

$$h = \frac{d \, D' \; Cos. \; \mu' + (r + a \; Tang. \; \mu) \; D \; Cos. \; \mu}{X \; Sin. \; \alpha}. \quad . \quad . \quad (14)$$

Indien men aan de kracht de voordeeligste rigting wil geven, zal men α zoo moeten nemen, dat de overeenkomstige waarde van X, volgens (5), zoo klein mogelijk zij; hiertoe moet dan $Sin. \; (\alpha - \mu')$ zoo groot mogelijk, en dus de eenheid zijn, waarmede $\alpha - \mu' = 90°$ of $\alpha = 90° + \mu'$ overeenstemt. In dit geval heeft men volgens (5), (8) en (10)

$$X = D \; Cos. \; (\mu + \mu') + Q \; Sin. \; \mu',$$

$$D' = UW" = Q \; Cos. \; \mu' - D \; Sin. \; (\mu + \mu'),$$

$$x = YV = \frac{h \, X \, Cos. \; \mu' - (r + a \; Tang. \; \mu) \; D \; Cos. \; \mu}{D' \; Cos. \; \mu'}.$$

Digitized by Google

Neemt men de kracht horizontaal, dan is $\alpha = 90°$, en men heeft

$$X = \frac{D\ Cos.\ (\mu + \mu') + Q\ Sin.\ \mu'}{Cos.\ \mu'},$$

$$D' = \frac{Q - D\ Sin.\ \mu}{Cos.\ \mu},$$

en $$x = \frac{hX - (r + a\ Tang.\ \mu)\ D\ Cos.\ \mu}{D'\ Cos.\ \mu'};$$

zoo men in dit geval de wrijving bij H verwaarloost, en dus $\mu = 0$ stelt, is volgens (2) $D = P\ Tang.\ \nu$, en dus

$$X = P\ Tang.\ \nu + Q\ Tang.\ \mu'$$

$$D' = \frac{Q}{Cos.\ \mu'},$$

en $$x = \frac{hX - rD}{Q}.$$

Neemt men voor α de kleinste der beide limieten (11), te weten $\alpha = \mu'$, dan komt er $X = \infty$; in die rigting is het dus onmogelijk eene aan de vraag voldoende kracht aan te brengen.

Neemt men voor α de grootste der limieten (11), en is dus

$$Cot.\ \alpha = -\frac{Q - D\ Sin.\ \mu}{D\ Cos.\ \mu},$$

dan wordt $D' = UW' = 0$. Hoezeer nu wederom de formule (5) eene behoorlijke waarde voor X geeft, wordt in (10) de noemer nul, en zoo dus ook niet de teller van (10) nul is, heeft men $x = \infty$, en het is dan almede onmogelijk, dat eene kracht in deze rigting aan de vraag voldoet. Hiermede stemt overeen, dat, voor de gestelde waarde van α, uit (5) gevonden wordt $Cot.\ \phi = Tang.\ \mu$, waardoor aangewezen wordt, dat de resultant ST van X en Q evenwijdig met KL loopt, of op KL valt indien het punt S in S' genomen is. Is ST evenwijdig met KL, dan is het onmogelijk ST in twee krachten te ontbinden, waarvan de eene langs KL en de andere evenwijdig met DN is; valt echter ST langs KL, dan is die ontbinding mogelijk, en de formule (10) geeft dan ook de behoorlijke waarde voor x. Wanneer namelijk S in S' genomen is, heeft men $h = h' = r + a\ Tang.\ \mu$, zoodat men dan voor de formule (10) kan schrijven

Digitized by Google

$$s = \frac{h'}{Cos.\ \mu'} \cdot \frac{D\{Sin.\ \alpha\ Cos.\ (\mu + \mu') - Cos.\ \mu\ Sin.\ (\alpha - \mu'))\} + Q\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \mu'}{D\ Cos.\ (\alpha + \mu) + Q\ Sin.\ \alpha};$$

maar de termen, waaruit de coëfficiënt van D in den teller bestaat, zijn na ontwikkeling

$$Sin.\ \alpha\ Cos.\ \mu\ Cos.\ \mu' - Sin.\ \alpha\ Sin.\ \mu\ Sin\ \mu'$$

en

$$Cos.\ \mu\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \mu' - Cos.\ \mu\ Cos.\ \alpha\ Sin.\ \mu',$$

waardoor die coëfficiënt wordt

$$Cos.\ \mu\ Cos.\ \alpha\ Sin.\ \mu' - Sin.\ \alpha\ Sin.\ \mu\ Sin.\ \mu' = Sin.\ \mu'\ (Cos.\ \alpha\ Cos.\ \mu - Sin.\ \alpha\ Sin.\ \mu) = Cos.\ (\alpha+\mu)\ Sin.\ \mu',$$

zoodat wij dan hebben

$$s = \frac{h'}{Cos.\ \mu'} \cdot \frac{D\ Cos.\ (\alpha + \mu)\ Sin.\ \mu' + Q\ Sin.\ \alpha\ Sin.\ \mu'}{D\ Cos.\ (\alpha + \mu) + Q\ Sin.\ \alpha} = h'\ Tang.\ \mu';$$

wordende hierdoor het eenige punt V bepaald, dat met de nu gestelde waarde van α kan overeenkomen. In dit geval is het parallelopipedum, door de werking der kracht X en door zijn eigen gewigt, op het punt van den cilinder te doen voortrollen, zonder zelve eene drukking op het horizontale vlak uit te oefenen.

Verwaarloost men de rollende wrijving, en stelt men dus $\nu = 0$, dan wordt $D = 0$, en $X = \frac{Q\ Sin.\ \mu'}{Sin.\ (\alpha - \mu')}$; zoodat nu het uitwerksel der wrijving bij H van zelve vervalt, en alles in denzelfden toestand is, alsof het parallelopipedum alleen, over het horizontale vlak zou gaan bewegen.

Indien de wrijving bij H vrij aanmerkelijk, en dus de hoek MHL tamelijk groot was, zou het punt O zoo ver op de lijn MF kunnen komen, dat de hoek MIO grooter werd dan de wrijvingshoek, uit den coëfficiënt der slepende wrijving, van den cilinder over het horizontale vlak, afgeleid. In dat geval zou eene kracht op het parallelopipedum aangebragt, ook aan den cilinder eerder eene schuivende, dan eene rollende beweging over het horizontale vlak mededeelen.

Digitized by Google

XXXVIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Van eenen driehoek gegeven zijnde de opstaande zijden en de tophoek, begeert men de lengte te vinden van de lijn, die, uit den top naar de basis loopende, den tophoek middendoordeelt.

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. A. Hansen, H. Middelburg, J. S. Speijer, J. J. Wolff, E. Olivier, Dz., R. van de Weerd en G. Koster.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij A BC (Fig. 26) een driehoek, waarvan bekend is

$$AC = a,\ BC = b \text{ en } \textit{hoek}\ ACB = 2\alpha,$$

dan moet de lijn $CD = x$ berekend worden, welke den hoek ACB in twee gelijke deelen, *hoek* ACD = *hoek* $BCD = \alpha$, verdeelt.

Deze lijn verdeelt den driehoek in twee andere driehoeken, waarvan de som der inhouden gelijk aan den inhoud des geheelen driehoeks is. Nu is:

$$\textit{Inh.}\ ACD = \tfrac{1}{2}\,AC \times CD \times \textit{Sin.}\ ACD = \tfrac{1}{2}\,ax\ \textit{Sin.}\ \alpha,$$
$$\textit{Inh.}\ BCD = \tfrac{1}{2}\,BC \times CD \times \textit{Sin.}\ BCD = \tfrac{1}{2}\,bx\ \textit{Sin.}\ \alpha,$$
en $\textit{Inh.}\ ABC = \tfrac{1}{2}\,AC \times BC \times \textit{Sin.}\ ACB = \tfrac{1}{2}\,ab\ \textit{Sin.}\ 2\alpha$;

derhalve is

$$\tfrac{1}{2}\,ax\ \textit{Sin.}\ \alpha + \tfrac{1}{2}\,bx\ \textit{Sin.}\ \alpha = \tfrac{1}{2}\,ab\ \textit{Sin.}\ 2\alpha,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{ab\ \textit{Sin.}\ 2\alpha}{(a+b)\ \textit{Sin.}\ \alpha} = \frac{2ab\ \textit{Sin.}\ \alpha\ \textit{Cos.}\ \alpha}{(a+b)\ \textit{Sin.}\ \alpha} = \frac{2ab\ \textit{Cos.}\ \alpha}{a+b},$$

zoodat hierdoor het voorstel opgelost is.

XXXIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Van eenen vierhoek drie zijden gegeven zijnde, begeert men de twee ingesloteene hoeken zoodanig te bepalen, dat de inhoud des vierhoeks zoo groot mogelijk worde.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Bassan, H. Middelburg, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer en R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat van den vierhoek ABCD (Fig. 27) gegeven zijn $AB = a$, $BC = b$ en $CD = c$, en nemen wij als onbekenden aan *hoek* $ABC = \phi$ en *hoek* $BCD = \phi'$, dan be-

Digitized by Google

ginnen wij met den inhoud des vierhoeks in deze bekenden en onbekenden uit te drukken.

Trekken wij daartoe den diagonaal BD, zoo hebben wij terstond

$$Inh.\ BCD = \tfrac{1}{2}\ bc\ Sin.\ \phi'$$

zoodat er dan nog overblijft den inhoud des driehoeks ABD te vinden. Stellen wij *hoek* CBD $= \psi$, dan geeft de driehoek BCD

$$\frac{b}{c} = \frac{Sin.\ (\phi' + \psi)}{Sin.\ \psi} = Sin.\ \phi'\ Cot.\ \psi + Cos.\ \phi',$$

waaruit gevonden wordt

$$Cot.\ \psi = \frac{b - c\ Cos.\ \phi'}{c\ Sin.\ \phi'}; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

de driehoek BCD geeft ook nog $BD = \frac{c\ Sin.\ \phi'}{Sin.\ \psi}$; dus is

$$Inh.\ ABD = \tfrac{1}{2}AB \times BD \times Sin.\ ABD = \tfrac{1}{2}ac\ \frac{Sin.\ \phi'\ Sin(\phi - \psi)}{Sin.\ \psi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ ac\ Sin.\ \phi'\ \{Sin.\ \phi\ Cot.\ \psi - Cos.\ \phi\},$$

en zoo wij hierin de bovenverkregene waarde van *Cot.* ψ overbrengen, komt er na behoorlijke herleiding

$$Inh.\ ABD = \tfrac{1}{2}\ ab\ Sin.\ \phi - \tfrac{1}{2}\ ac\ Sin.\ (\phi + \phi').$$

Door nu de som van de inhouden der driehoeken ABD en CBD te nemen, vinden wij, dat de inhoud des vierhoeks wordt uitgedrukt door de formule

$$I = \tfrac{1}{2}\ ab\ Sin.\ \phi + \tfrac{1}{2}\ bc\ Sin.\ \phi' - \tfrac{1}{2}\ ac\ Sin.\ (\phi + \phi'). \ldots (2)$$

Het is klaar, dat, wanneer men de hoeken ϕ en ϕ' onafhankelijk van elkander laat veranderen, de inhoud des vierhoeks eens een maximum zal worden, en dat dit maximum de begeerde grootstmogelijke vierhoek zal wezen. Wij beschouwen dus I als eene functie der onderling onafhankelijke elementen ϕ en ϕ', en maken uit (2) de differentiaalquotiënten dezer functie, ten opzigte van elk der elementen ϕ en ϕ' in het bijzonder, op; alsdan vinden wij

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \tfrac{1}{2}\ a\ \{b\ Cos.\ \phi - c\ Cos.\ (\phi + \phi')\}$$

en

$$\frac{\partial I}{\partial \phi'} = \tfrac{1}{2}\ c\ \{b\ Cos.\ \phi' - a\ Cos.\ (\phi + \phi')\},$$

en door deze differentiaalquotiënten gelijk nul te stellen, verkrijgen wij nu de beide vergelijkingen

Digitized by Google

$b\,Cos.\phi = c\,Cos.(\phi+\phi')$ en $b\,Cos.\phi' = a\,Cos.(\phi+\phi')$, ...(3) waaraan ϕ en ϕ' voldoen moeten, opdat I het begeerde maximum zij.

Om deze vergelijkingen op te lossen, kan men er uit afleiden $a\,Cos.\phi = c\,Cos.\phi'$, en daarna $a\,Cos.\phi = c\,Cos.\phi' = x$ stellen, als wanneer men heeft:

$$Cos.\phi = \frac{x}{a}, Cos.\phi' = \frac{x}{c}, Sin.\phi = \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}, Sin.\phi' = \frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{c};$$

elk der vergelijkingen (3) geeft dan, zoo men daarin na ontwikkeling deze waarden substitueert,

$$bx = x^2 - \sqrt{(a^2-x^2)}\,(c^2-x^2), \ldots (4)$$

of, na verdrijving van het wortelteeken, de derdemagtsvergelijking

$$2bx^3 - (a^2+b^2+c^2)\,x^2 + a^2c^2 = 0; \ldots (5)$$

hieruit kan nu de waarde van x berekend worden, zoodra a, b en c in getallen gegeven zijn, waardoor dan ook $Cos.\phi = \frac{x}{a}$ en $Cos.\phi' = \frac{x}{c}$ bekend worden, en alzoo de hoeken bepaald zijn, welke de zijden a, b en c des vierhoeks met elkander moeten maken, opdat de inhoud zoo groot mogelijk zij. Voor de waarde van dien grootstmogelijken inhoud, vindt men dan volgens (2)

$$I = \tfrac{1}{2}(b-x)\{\sqrt{(a^2-x^2)} + \sqrt{(c^2-x^2)}\}. \ldots (6)$$

Zonder ons nog met de volstrekte bepaling dezer waarden op te houden, kunnen wij reeds opmerken, dat uit de figuur volgt

$$Cos.ABD = Cos.(\phi-\psi) = Cos.\phi Cos.\psi + Sin.\phi Sin.\psi$$
$$= Sin.\psi(Cos.\phi Cot\,\psi + Sin.\phi),$$

zoodat wij, hierin de waarde (1) overbrengende, na herleiding vinden

$$Cos.ABD = \frac{Sin.\psi}{c\,Sin.\phi}\left\{b\,Cos.\phi - c\,Cos.(\phi+\phi')\right\};$$

gelijkerwijze is, AC getrokken en *hoek* BCA $= \psi'$ gesteld zijnde,

$$Cos.ACD = \frac{Sin.\psi'}{a\,Sin.\phi'}\left\{b\,Cos.\phi' - a\,Cos.(\phi+\phi')\right\}.$$

Indien dus I een maximum is, zal volgens (3) $Cos.ABD = 0$ en $Cos.ACD = 0$ zijn; de hoeken ABD en ACD zullen dan regt zijn, zoodat een cirkel op AD als middellijn be-

Digitized by Google

schreven door de punten B en C zal gaan. De gevraagde grootste vierhoek moet dus in een halven cirkel beschreven zijn, die de onbekende zijde des vierhoeks tot middellijn heeft.

De constructie van dien vierhoek, uit de gegevens a, b en c, zal echter niet door passer en liniaal kunnen geschieden, omdat dezelve gebleken is van de oplossing eener derdemagtsvergelijking af te hangen.

De derdemagtsvergelijking (5) heeft drie bestaanbare wortels, en wel: éénen positieven grooter dan a en dan c; éénen positieven kleiner dan a en dan c, maar tevens grooter dan b, indien b de kleinste der drie gegevene zijden mogt zijn; en éénen negatieven kleiner dan a en dan c. Dit blijkt door de afwisselingen van teekens te raadplegen, welke het voorste lid der vergelijking ondergaat, door verschillende waarden voor x te substitueren; want dit voorste lid gelijk V stellende, hebben wij:

voor $x = +\infty$, $V = +$;

voor $x = a$ of c, $V = -a^2(a-b)^2$ of $-c^2(c-b)^2 = -$;

voor $x = b, b < a$ en $b < c$, $V = (a^2-b^2)(c^2-b^2) = +$;

voor $x = 0$, $V = a^2c^2 = +$;

voor $x = -a$ of $-c$, $V = -a^2(a+b)^2$ of $-c^2(c+b)^2 = -$.

De eerste wortel geeft $Cos.\ \phi > 1$ en $Cos.\ \phi' > 1$, en moet alzoo verworpen worden. De tweede wortel is almede onbruikbaar; want hoezeer voor denzelven naar behooren $Cos.\ \phi < 1$ en $Cos.\ \phi' < 1$ wordt, zal eene positieve waarde voor x, kleiner dan b, niet aan de vergelijking (4) kunnen voldoen, tenzij men in die vergelijking het teeken van de wortelgrootheid omkeere; terwijl eene positieve waarde voor x, grooter dan b, blijkens de formule (6), eene negatieve waarde aan I geeft. De derde wortel geeft voor $Cos.\ \phi$ en $Cos.\ \phi'$ negatieve waarden kleiner dan de eenheid, en wijst dus voor ϕ en ϕ' stompe hoeken aan; die wortel maakt, volgens (6), I positief, en voldoet aan de vergelijking (4), zonder dat het teeken der wortelgrootheid behoeft omgekeerd te worden; alzoo geeft deze laatste wortel altijd een eigenlijk antwoord op de vraag, die overigens geene meerdere antwoorden toelaat.

Stellen wij $AD = x$, dan is, in den regthoekigen drie-

Digitized by Google

hoek ACD,

$$CD = AD \times Cos.\ ADC,$$

of, omdat *hoek* $ADC = 180° - $ *hoek* $ABC = 180° - \phi$ is,

$$c = -\,m\ Cos.\ \phi, \quad \text{en} \quad Cos.\ \phi = -\frac{c}{m};$$

onze vorige onbekende x, in m uitdrukkende, hebben wij dus

$$x = a\ Cos.\ \phi = -\frac{ac}{m},$$

en deze waarde van x in (5) overbrengende, verkrijgen wij de derdemagtsvergelijking

$$m^3 - (a^2 + b^2 + c^2)m - 2abc = 0, \quad . \quad . \quad (7)$$

waaruit nu onmiddellijk de vierde zijde des vierhoeks kan berekend worden.

Het voorste lid dezer vergelijking door V voorstellende, vinden wij:

voor $m = +\infty$,	$V = +$;
voor $m = a$, b of c,	$V = -$;
voor $m = 0$,	$V = -$;
voor $m = -a$ of $-c$,	$V = +$;
voor $m = -\infty$,	$V = -$;

waaruit blijkt, dat deze vergelijking twee negatieve wortels heeft, benevens eenen positieven, die grooter dan elk der zijden a, b of c is. Die laatste wortel wijst het eenige antwoord op het voorstel aan.

AANMERKING. In de *Beginselen der Meetk.* van J. DE GELDER, 3de druk, § 510, is aangetoond, dat van alle veelhoeken, welke uit een zeker aantal gegevene zijden, met nog eene onbepaalde zijde naar welgevallen genomen, kunnen zamengesteld worden, de veelhoek, wiens inhoud een maximum is, zoodanig zal moeten bepaald zijn, dat hij beschreven is in eenen halven cirkel, waarvan de onbepaalde zijde de middellijn is. Legt men deze stelling tot grondslag, dan kan het voorstel ook gemakkelijk zonder differentiaalrekening opgelost worden; en daarbij zal men dan, dezelfde onbekenden als boven aannemende, ook altijd op dezelfde derdemagtsvergelijkingen nederkomen.

Digitized by Google

XL. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer men, uit de pool van de spiraal van Archimedes, ***loodlijnen op de normalen dier kromme laat vallen, wil men de meetkunstige plaats van de voetpunten dier loodlijnen vinden.***

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten *hoek* XOP $= \phi$ en OP $= s$ (Fig. 28) de poolcoördinaten zijn van eenig onbepaald punt P der spiraal van Archimedes, welker vergelijking is

$$s = a\phi; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

laat verder PQ de normaal van het punt P der kromme zijn, en OQ de loodlijn uit de pool op die normaal nedergelaten, dan zullen wij de meetkunstige plaats van het punt Q moeten bepalen; en zoo wij *hoek* XOQ $= \phi'$ en OQ $= s'$ stellen, komt die bepaling neder op het vinden eener vergelijking tusschen ϕ' en s'.

De loodlijn, uit de pool op de normaal eener kromme lijn nedergelaten, wordt in het algemeen uitgedrukt door $\frac{s\partial s}{\sqrt{(s^2\partial\phi^2 + \partial s^2)}}$; hier is echter $\partial s = a\partial\phi$, en wij hebben derhalve

$$s' = \frac{as\partial\phi}{\sqrt{(s^2\partial\phi^2 + a^2\partial\phi^2)}} = \frac{as}{\sqrt{(s^2 + a^2)}}. \quad (2)$$

Verder volgt uit den regthoekigen driehoek OPQ onmiddellijk

$$s' = s\ Cos.\ (\phi' - \phi), \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

zoodat wij nu drie vergelijkingen hebben, waartusschen wij slechts de twee grootheden ϕ en s zullen behoeven te elimineren, om de poolvergelijking der begeerde meetkunstige plaats te bekomen.

Uit (2) vinden wij dadelijk

$$s = \frac{as}{\sqrt{(a^2 - s'^2)}},$$

en volgens (1) is dus

$$\phi = \frac{s'}{\sqrt{(a^2 - s'^2)}};$$

Digitized by Google

maar uit (3) volgt

$$\phi' - \phi = Boog\ Cos.\ \frac{s'}{s},$$

en hierin voor s en ϕ de zoo even verkregene waarden stellende, komt er

$$\phi' = \frac{s'}{\sqrt{(a^2 - s'^2)}} + Boog\ Cos.\ \frac{\sqrt{(a^2 - s'^2)}}{a},$$

of in eenvoudiger vorm

$$\phi' = \frac{s'}{\sqrt{(a^2 - s'^2)}} + Boog\ Sin.\ \frac{s'}{a}, \quad . \quad . \quad (4)$$

hetgeen dan nu de vergelijking der gevraagde meetkunstige plaats is.

Blijkens deze vergelijking zal, wanneer men s' van 0 tot a laat aangroeijen, ϕ' van 0 tot ∞ aangroeijen; kunnende s' nooit grooter dan a worden. Hieruit volgt, dat onze meetkunstige plaats wederom een spiraal is, die van de pool af beginnende, een oneindig aantal omwindingen om de pool maakt, en steeds nader bij den cirkel komt, welke uit de pool als middelpunt met a als straal wordt beschreven; binnen welken cirkel deze spiraal geheel begrepen is. De genoemde cirkel is dus eene kromlijnige asymptoot onzer meetkunstige plaats.

Wij hebben boven slechts positieve waarden van ϕ en s in aanmerking genomen. Het is echter klaar, dat, even als de spiraal van ARCHIMEDES, zoo ook de spiraal door de vergelijking (4) voorgesteld, uit twee gelijke en gelijkvormige takken bestaat, die in de pool aan elkander sluiten.

XLI. VOORSTEL.

Door L. VERVEEN, Jz.

De drie cijfers van een zeker getal vormen, van de linker- naar de regterhand gerekend, eene opklimmende rekenkunstige reeks. Wanneer nu nog bekend is, dat de som der drie cijfers gelijk is aan het cijfer der tientallen, vermenigvuldigd met de helft van het cijfer der honderdtallen, vraagt men daaruit het getal te vinden.

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. BIERENS DE HAAN, C. P. BUREER, J. A. HANSEN, J. HERMSKERK, Az., W. L. IVANGH, J. H. VAN KOOTEN, P. KROM, H. MIDDELBURG, J. SJOERIA, W. C. VERSLUYS, L. VERVEEN, Jz. en R. VAN DE WEERD.

Digitized by Google

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laten de cijfers van het begeerde getal voorgesteld worden door de termen der reeks x, $x + y$ en $x + 2y$, dan is de som dezer cijfers $3(x + y)$, en dus volgens de opgegevene voorwaarde

$$3(x + y) = \tfrac{1}{2}x(x + y),$$

waaruit dadelijk voor het cijfer der honderdtallen gevonden wordt

$$x = 6.$$

Het cijfer der eenheden of $x + 2y$ is dan $6 + 2y$, welke waarde kleiner dan 10 moet wezen, zijnde y een geheel getal. Hieraan kan alleen voldaan worden door $y = 0$ of $y = 1$. De eerste waarde geeft echter geene opklimmende reeks, zoodat wij alleen hebben $y = 1$; zijnde alsdan het begeerde getal 678.

XLII. Voorstel.

Door L. Verveen, Jz.

Er is eene meetkunstige reeks van drie termen. Zoo men van den tweeden term de helft van den eersten, en van den derden de helft van den tweeden aftrekt, maakt de eerste term met de beide resten eene harmonische reeks uit. Indien nu gegeven wordt, dat de som der harmonische reeks 6 minder dan de som der meetkunstige reeks is, begeert men daaruit deze reeksen te vinden.

Opgelost *door* J. Heemskerk, Az., J. S. Speijer, C. P. Burger, J. A. Hansen, W. L. Ivangh, D. Bierens de Haan, J. H. van Kooten, H. Middelburg, G. Koster, P. Krom, J. Sjoenis, W. C. Verseput, L. Verveen, Jz., R. van de Weerd en J. J. Wolfs.

Oplossing *van* J. Heemskerk, Az.

Zoo de termen der meetkunstige reeks voorgesteld worden door

$$x,\ xy \text{ en } xy^2,$$

bekomen wij, voor de termen der harmonische reeks,

$$x,\ x(y - \tfrac{1}{2}) \text{ en } xy(y - \tfrac{1}{2}).$$

Volgens de bekende eigenschap der harmonische reeksen, is

$$x : xy(y - \tfrac{1}{2}) = x(y - \tfrac{1}{2}) - x : xy(y - \tfrac{1}{2}) - x(y - \tfrac{1}{2}),$$

dat is, zoo wij al de termen door x en bovendien de beide volgende termen door $y - \frac{1}{2}$ deelen,

Digitized by Google

$$1 : y = y - \tfrac{1}{2} - 1 : y - 1,$$

of ook $$2 : y = 2y - 3 : y - 1;$$

uit deze evenredigheid volgt dan de vergelijking

$$y(2y - 3) = 2(y - 1)$$

of $$2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt $y=2$ of $y=\frac{1}{2}$.

Voor de eerste waarde van y bekomt men:

de meetkunstige reeks x, $2x$, $4x$,

en de harmonische reeks x, $\frac{2}{3}x$, $3x$;

voor de tweede waarde van y daarentegen heeft men:

de meetkunstige reeks x, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$,

en de harmonische reeks x, 0, 0.

De tweede waarde van y moet dus ter zijde gesteld worden, terwijl voor de eerste waarde van y de som der meetkunstige reeks door $7x$ en die der harmonische door $5\frac{1}{3}x$ wordt uitgedrukt. Uit de verdere voorwaarden der opgave, hebben wij dan

$$7x = 5\tfrac{1}{3}x + 6,$$

waaruit volgt $$x = 4;$$

zoodat wij voor de gevraagde reeksen verkrijgen:

de meetkunstige 4, 8, 16,

en de harmonische 4, 6, 12.

XLIII. Vooreel.

Door L. Vervеen, Jz.

Eene meet- en eene rekenkunstige reeks, beide in geheele getallen en elk van drie termen, hebben de volgende eigenschappen: 1°. *de reden van de meetkunstige reeks is gelijk aan het verschil der rekenkunstige; en* 2°. *de quotiënten, die men verkrijgt, door de termen der rekenkunstige reeks op de overeenkomstige termen der meetkunstige te deelen, vormen eene harmonische reeks. Indien nu de som der meetkunstige reeks gelijk* 84 *gegeven is, wordt gevraagd hieruit de beide reeksen te vinden.*

Opgelost *door* R. van de Weerd, C. P. Burger, J. A. Hansen, W. L. Ivangh, J. H. van Kooten, G. Kooker, H. Middelburg, J. S. Speijer, W. C. Verseput, L. Vervеen, Jz., D. Bierens de Haan, J. Heemskerk, Az., J. Sjoerds en J. J. Wolfs.

Digitized by Google

OPLOSSING van R. VAN DE WEERD.

Zij de meetkunstige reeks

$$x,\ xz \text{ en } xz^2,$$

en de rekenkunstige

$$y - z,\ y \text{ en } y + z,$$

dan is de harmonische

$$\frac{x}{y-z},\ \frac{xz}{y} \text{ en } \frac{xz^2}{y+z},$$

en bovendien is

$$x(1 + z + z^2) = 84.$$

Daar x en z geheele getallen zijn, zoo moet $1 + z + z^2$, hetwelk een oneven getal is, een deeler van 84 wezen. De onevene deelers van 84 zijn 3, 7 en 21, waardoor men voor z vindt 1, 2 of 4, terwijl x de daarmede overeenkomstige waarden 28, 12 of 4 verkrijgt.

De harmonische reeks geeft ons de evenredigheid

$$\frac{x}{y-z} : \frac{xz^2}{y+z} = \frac{xz}{y} - \frac{x}{y-z} : \frac{xz^2}{y+z} - \frac{xz}{y},$$

of $\quad 1 : z = z(y - z) - y : zy - (y + z),$

en hieruit y oplossende, komt er

$$y = \frac{z(z^2-1)}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)}{z-1}.$$

Substitueren wij hierin de bovengevondene waarden van z, dan wordt:

voor $z = 1$, $y = \infty$;
voor $z = 2$, $y = 6$;
voor $z = 4$, $y = 6\frac{2}{3}$;

waarvan alleen de tweede aan de voorwaarde des voorstels voldoet. Wij hebben dus $z = 2$, $x = 12$ en $y = 6$, weshalve de begeerde reeksen zijn:

12, 24, 48; 4, 6, 8; en 3, 4, 6.

XLIV. VOORSTEL.

Door E. OLIVIER, Dz.

Hoeveel graden, minuten, ens. bevat de hoek ϕ, door de vergelijking Sin. ϕ + Tang. ϕ = 1 bepaald?

OPGELOST *door* C. P. BURGER, J. A. HANSEN, W. L. IVANOR, J. S. SPEIJER, R. VAN DE WEERD, J. J. WOLFS, J. BASSAN, D. BIERENS DE HAAN, E. OLIVIER, Dz., G. KOSTER, H. MIDDELBURG, W. C. VERSEPUT en J. SJORNIS.

Digitized by Google

Oplossing van C. P. Burger.

Drukken wij den Sinus in den Tangens uit, dan wordt de gegevene vergelijking

$$\frac{Tang.\ \phi}{\sqrt{(1 + Tang.^2\ \phi)}} + Tang.\ \phi = 1,$$

waaruit men achtervolgens heeft

$$\frac{Tang.\ \phi}{\sqrt{(1 + Tang.^2\ \phi)}} = 1 - Tang.\ \phi,$$

$$\frac{Tang.^2\ \phi}{1 + Tang.^2\ \phi} = 1 - 2\ Tang.\ \phi + Tang.^2\ \phi,$$

of $Tang.^4\ \phi - 2\ Tang.^3\ \phi + Tang.^2\ \phi - 2\ Tang.\ \phi + 1 = 0.$

Hiervoor kan men ook schrijven

$$Tang.^2\ \phi + \frac{1}{Tang.^2\ \phi} - 2\left(Tang.\ \phi + \frac{1}{Tang.\ \phi}\right) + 1 = 0,$$

en stellende nu $Tang.\ \phi + \frac{1}{Tang.\ \phi} = x$, waardoor

$Tang.^2\ \phi + \frac{1}{Tang.^2\ \phi} = x^2 - 2$ wordt, zoo heeft men

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

waaruit volgt $x = 1 \pm \sqrt{2}$;

en $Tang.^2\ \phi + 1 = x\ Tang.\ \phi,$

waarnit volgt $Tang.\ \phi = \frac{1}{2}\ x \pm \frac{1}{2}\ \sqrt{(x^2 - 4)}.$

In de voor x gevondene waarde, kan alleen het bovenste teeken gebruikt worden, daar het onderste $Tang.\ \phi$ onbestaanbaar maakt. Nemende dus $x = 1 + \sqrt{2}$, zoo hebben wij

$$Tang.\ \phi = \frac{1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{(-1 + 2\sqrt{2})}.}{2}$$

Nu is:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8} = 2{,}8284271,$$
$$-1 + 2\sqrt{2} = 1{,}8284271,$$
$$\sqrt{(-1 + 2\sqrt{2})} = 1{,}3521934,$$
$$1 + \sqrt{2} = 2{,}4142136,$$
$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{(-1 + 2\sqrt{2})} = 3{,}7664070,$$
$$1 + \sqrt{2} - \sqrt{(-1 + 2\sqrt{2})} = 1{,}0620202,$$

en bijgevolg hebben wij

$$Tang.\ \phi = 1{,}8832035 \text{ of } 0{,}5310101;$$

waarmede volgens de gegevene vergelijking overeenstemt

$$Sin.\ \phi = -0{,}8832035 \text{ of } 0{,}4698309.$$

Voor deze waarden van $Sin.\ \phi$ en $Tang.\ \phi$ vindt men

Digitized by Google

dan uit de tafels

$$\phi = 242°1'52'' \text{ en } \phi = 27°58'8''.$$

XLV. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Van een gegeven vierkant ABCD (Fig. 29), ***wil men de zijde*** BC ***zoodanig tot in*** F ***verlengen, dat, wanneer men de lijn*** AF ***trekt, welke*** CD ***ergens in*** E ***snijdt, de driehoek*** CEF ***gelijken inhoud heeft met het trapezium*** ABCE.

Opgelost *door* G. Koster, J. Bassan, D. Bierens de Haan, C. P. Burger, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., H. Middelburg, E. Olivier, Dz., J. S. Sprijer, W. G. Verkerput, R. van de Weerd, J. J. Wolvs, P. Krom, W. L. Ivanoh en J. Sjoenis.

Oplossing *van* G. Koster.

Indien het trapezium ABCE gelijken inhoud heeft als de driehoek CEF, zal de driehoek ABF tweemaal zoo veel inhoud hebben als de driehoek CEF; maar dewijl de driehoeken ABF en CEF gelijkvormig zijn, zal men dan ook hebben

$$AB^2 : CE^2 = \textit{drieh.}\ ABF : \textit{drieh.}\ CEF = 2 : 1,$$

en dus $$CE^2 = \tfrac{1}{2} AB^2.$$

Daar nu ook het vierkant, op den halven diagonaal van het vierkant ABCD beschreven, gelijk aan $\frac{1}{2} AB^2$ is, heeft men, om dit voorstel door constructie op te lossen, slechts de beide elkander in G snijdende diagonalen AC en BD te trekken, en vervolgens CE = CG te nemen; want hierdoor wordt $CE^2 = \frac{1}{2} AB^2$, en het alzoo verkregene punt E, is bijgevolg het punt, waardoor men uit A de lijn AF moet trekken, om den driehoek CEF gelijken inhoud te doen hebben met het trapezium ABCE.

Aanmerking. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken ABF en CEF volgt ook

$$BF^2 : CF^2 = \textit{drieh.}\ ABF : \textit{drieh.}\ CEF = 2 : 1,$$

waaruit achtervolgens kan afgeleid worden:

$$BF : CF = \sqrt{2} : 1,$$

$$BF - CF : CF = \sqrt{2} - 1 : 1,$$

$$AB : CF = \sqrt{2} - 1 : 1,$$

$$AB : CF = 1 : \sqrt{2} + 1,$$

en $$CF = AB\sqrt{2} + AB = AC + AB;$$

zoodat het punt F mede gevonden kan worden, door BC

Digitized by Google

zoo ver te verlengen, dat CF gelijk wordt aan de som van de zijde en diagonaal des gegeven vierkants.

XLVI. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

De lijn te construeren, welker lengte door de formule $x = \frac{(a\ Cot.\ \alpha + b)^2\ Sin.\ \alpha}{a}$ ***wordt uitgedrukt*** (*).

Opgelost *door* J. S. Speijer, C. P. Burger, J. A. Hansen, R. van de Weerd, J. Bassan, D. Bierens de Haan, W. L. Ivanon, H. Middelburg, E. Olivier, Dz., W. C. Verkeput en J. Sioenis.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Men make eenen hoek BAC (Fig. 30) gelijk aan het complement van den gegeven hoek α, neme op het eene been van dien hoek, $AB = a$, en trekke loodregt op AB eene lijn BC, het andere been ergens in C ontmoetende. Op het verlengde van BC neme men vervolgens $BD = b$, vereenige de punten A en D, en trekke uit D eene lijn DF evenwijdig met AC en even lang als CD. Indien men dan verder uit F eene lijn evenwijdig aan CD trekt, tot zij de lijn AD of haar verlengde in G ontmoet, zal deze laatstgetrokkene lijn FG de gezochte lijn wezen.

Want de driehoeken ACD en DFG, die volgens de constructie gelijkvormig zijn, geven de evenredigheid FG : FD = CD : AC, waaruit volgt, omdat FD = CD gemaakt is,

$$FG = \frac{FD \times CD}{AC} = \frac{CD^2}{AC} = \frac{(BC + BD)^2}{AC};$$

maar nu is, in den regthoekigen driehoek ABC, *hoek* $C = \alpha$, dus $BC = a\ Cot.\ \alpha$ en $AC = \frac{a}{Sin.\ \alpha}$, en door substitutie dezer waarden, komt er dan

$$FG = \frac{(a\ Cot.\ \alpha + b)^2\ Sin.\ \alpha}{a}.$$

Aanmerkingen. 1°. Onze constructie gaat even goed door, indien α een stompe hoek is. Alsdan is echter *Cot.* α negatief, en de uitdrukking $(a\ Cot.\ \alpha + b)^2$ zal dan dezelfde zijn, alsof b negatief ware. Men zette dus in dit ge-

(*) H. Stroothan, *Vraagst. over de Hoogere Meetk.*, bl. 2, N°. 12.

val (zie Fig. 31 en 32) BD $=$ *b* van B naar C uit; kunnende het punt D ook in het verlengde van BC vallen (Fig. 32).

2°. Indien *a* een regte hoek, en dus $x = \frac{b^2}{a}$ is, kan onze constructie, eenigzins gewijzigd, nog gebruikt worden; zoo als in Fig. 33 is voorgesteld.

XLVII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Men vraagt te berekenen, hoeveel driehoeken men hebben kan, waarvan de hoekpunten in die van een parallelopipedum liggen (*).

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, G. Koster *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Drie punten, waar ook in de ruimte gelegen, liggen altijd in een plat vlak; en, als zij niet in dezelfde regte lijn liggen, kan men dezelve door regte lijnen vereenigen, en verkrijgt dan eenen driehoek. Omdat nu, van de acht hoekpunten eens parallelopipedums, er geene drie in dezelfde regte lijn gelegen zijn, zoo behoeven wij slechts te onderzoeken, op hoevele verschillende wijzen deze hoekpunten drie aan drie kunnen verbonden worden; want zoovele driehoeken zullen er zijn, wier hoekpunten in die van het parallelopipedum vallen.

Nu is (zie J. de Gelder, *Wisk. Lessen*, 1e druk, 1e cursus, pag. 352) het getal zamenvoegingen van *n* grootheden drie aan drie $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$. Hier hebben wij $n = 8$, en dus zijn er $\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$ driehoeken.

Wil men de driehoeken, in de zijvlakken des parallelopipedums gelegen, uitsluiten, dan zou van het getal 56 nog moeten afgetrokken worden $6 \times \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 24$, zoodat dan het aantal driehoeken 32 zou wezen.

Aanmerking *van* J. A. Hansen. De Heer Strootman

(*) H. Strootman, *Vraagst. over de Stelkunst*, bl. 74, N°. 356.

Digitized by Google

heeft in het antwoord (druk van 1836) 168 driehoeken. Het is waar, aan elk hoekpunt liggen $\frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$ driehoeken, en dit zou voor de 8 hoekpunten 168 driehoeken maken, doch elke driehoek werd dan eens bij elk zijner hoekpunten en dus driemaal geteld.

XLVIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Men vraagt naar het aantal diagonalen in een dodecaëdrum (*).

Opgelost *door* J. S. Speijer, H. Middelburg, J. A. Hansen *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Het is bekend, dat het dodecaëdrum een regelmatig ligchaam is, hetwelk door 12 regelmatige vijfhoeken wordt ingesloten. Het aantal der ribben is derhalve, omdat iedere ribbe tot twee vijfhoeken behoort, $\frac{12 \times 5}{2} = 30$; terwijl het getal der hoekpunten $\frac{12 \times 5}{3} = 20$ is, omdat in elk hoekpunt van het ligchaam drie hoekpunten van zoo vele vijfhoeken vereenigd zijn. Nu is het blijkbaar, dat wij, door het getal te bepalen van alle mogelijke gevallen, waarop deze punten twee aan twee kunnen verbonden worden, tevens zullen weten hoe vele regte lijnen er tusschen deze punten kunnen getrokken worden. Dit getal is derhalve $\frac{20 \times 19}{1 \times 2} = 190$. Onder deze 190 lijnen zijn echter ook de 30 ribben van het dodecaëdrum begrepen, zoodat wij voor het aantal der diagonalen vinden $190 - 30 = 160$.

Wil men hier de diagonalen uitsluiten, die in de zijvlakken gelegen zijn, dan moet van het gevondene getal 160 nog 60 afgetrokken worden; want het aantal diagonalen van elken vijfhoek is $\frac{5 \times 4}{1 \times 2} - 5 = 5$, en dus van al de zijvlakken des ligchaams te zamen $12 \times 5 = 60$. Zoodat dan het bedoelde ligchaam 100 diagonalen heeft.

(*) H. Stroothas, *Vraagst. der Stelkunst*, bl. 74, N°. 357.

Digitized by Google

AANMERKING *van* H. MIDDELBURG. In de antwoorden op de voorstellen der stelkunst van den Heer H. STROOTMAN, vindt men voor het gevraagde getal, 130; hetwelk waarschijnlijk eene drukfout zal zijn.

XLIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE.

Men vraagt, in geheele getallen, de regthoekige parallelopipedums met vierkante grondvlakken te bepalen, waarvan de inhoud vijfmaal zoo veel kubieke ellen, als de oppervlakte vierkante ellen bevat (*).

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, J. BASSAN, J. H. VAN KOOTEN, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. SJOERNS, J. S. SPEIJER, W. C. VERSEPUT, R. VAN DE WEERD *en* D. BIERENS DE HAAN.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Zij x de zijde van het vierkante grondvlak, en y de hoogte van een regthoekig parallelopipedum, beide in ellen, dan is de inhoud van dit ligchaam x^2y kubieke ellen, terwijl deszelfs oppervlakte $2x^2 + 4xy$ vierkante ellen bevat. Volgens de opgaaf moet men dan hebben

$$x^2y = 5(2x^2 + 4xy),$$

of wel $$xy = 10x + 20y,$$

dat is $$(x - 20)(y - 10) = 200;$$

en dit is de eenige vergelijking, waaraan de onbekenden x en y moeten voldoen, terwijl bovendien x en y geheele positieve getallen moeten wezen.

Hieruit volgt dadelijk, dat $x - 20$ en $y - 10$ de beide factoren zullen moeten zijn, waarin het getal 200 ontbonden moet kunnen worden. Wij kunnen dus nemen:

$x-20 =$ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 of 200,

en $y-10 =$ 200, 100, 50, 40, 25, 20, 10, 8, 5, 4, 2 of 1;

waaruit volgt:

$x =$ 21, 22, 24, 25, 28, 30, 40, 45, 60, 70, 120 of 220,

en $y =$ 210, 110, 60, 50, 35, 30, 20, 18, 15, 14, 12 of 11.

Er zijn dus in het geheel twaalf regthoekige parallelopipedums, die aan de vraag beantwoorden.

(*) H. STROOTMAN, *Vraagst. der Stelkunst*, bl. 110, No. 20.

Digitized by Google

L. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Van een regthoekigen bolvormigen driehoek, is gegeven de som der hoeken gelijk 270°, en de straal van den ingeschreven cirkel gelijk 15°. Men vraagt hieruit de zijden en hoeken te berekenen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, D. Bierens de Haan, J. Bassan, J. A. Hansen, H. Middelburg, J. S. Speijer, W. L. Ivangh en R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

De hoeken eens bolvormigen driehoeks door A, B, C, de overstaande zijden door a, b, c, en den straal des ingeschreven cirkels door r voorstellende, heeft men (zie R. Lobatto, *Gronden der sphérische driehoeksmeting*, bladz. 74) de formule

$$Tang.\ r = \frac{2}{M}\ Sin.\ \tfrac{1}{2}A\ Sin.\ \tfrac{1}{2}B\ Sin.\ \tfrac{1}{2}C,$$

waarin $$M = \frac{Sin.\ A}{Sin.\ a} = \frac{Sin.\ B}{Sin.\ b} = \frac{Sin.\ C}{Sin.\ c}.$$

Uit deze formule volgt

$$M = \frac{2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}A\ Sin.\ \tfrac{1}{2}B\ Sin.\ \tfrac{1}{2}C}{Tang.\ r},$$

en dus is:

$$Sin.a = \frac{Sin.A}{M} = \frac{Tang.r Sin.A}{2Sin.\tfrac{1}{2}A Sin.\tfrac{1}{2}B Sin.\tfrac{1}{2}C} = \frac{Tang.r Cos.\tfrac{1}{2}A}{Sin.\tfrac{1}{2}B Sin.\tfrac{1}{2}C},$$

$$Sin.b = \frac{Sin.B}{M} = \frac{Tang.r Sin.B}{2Sin.\tfrac{1}{2}A Sin.\tfrac{1}{2}B Sin.\tfrac{1}{2}C} = \frac{Tang.r Cos.\tfrac{1}{2}B}{Sin.\tfrac{1}{2}A Sin.\tfrac{1}{2}C},$$

en $$Sin.c = \frac{Sin.C}{M} = \frac{Tang.r Sin.C}{2Sin.\tfrac{1}{2}A Sin.\tfrac{1}{2}B Sin.\tfrac{1}{2}C} = \frac{Tang.r Cos.\tfrac{1}{2}C}{Sin.\tfrac{1}{2}A Sin.\tfrac{1}{2}B}.$$

Laat nu $C = 90°$, $A + B + C = 270°$, dus $A + B = 180°$ en $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 90°$ zijn, dan is voor den driehoek, in de opgave bedoeld, $Sin.\frac{1}{2}C = Cos.\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $Cos.\frac{1}{2}A = Sin.\frac{1}{2}B$ en en $Cos.\frac{1}{2}B = Sin.\frac{1}{2}A$, waardoor wij dadelijk vinden

$$Sin.\ a = Sin.\ b = Tang.\ r.\sqrt{2}; \quad . \ . \ . \ (1)$$

terwijl, omdat $A + B = 180°$ is, ook $a + b = 180°$ zal wezen.

Verder is dan $Cos.\ b = -Cos.\ a$ en $Cot.\ B = -Cot.\ A$, zoodat wij volgens de bekende formules $Cos.\ c = Cos.\ b\ Cos.\ a$ en $Cos.\ c = Cot.\ A\ Cot.\ B$ ook nog hebben

Digitized by Google

$Cos.c = -Cos.^2 a = Sin.^2 a - 1 = 2Tang.^2 r - 1$, . (2)

en $Cot.^2 A = Cot.^2 B = -Cos.c = 1 - 2Tang.^2 r$; . . (3)

zoodat nu al de zijden en hoeken des driehoeks, door middel van goniometrische lijnen, in den gegeven straal zijn uitgedrukt. Daar blijkens deze uitdrukkingen $Cot.^2 A = Cot.^2 B = Cos.^2 a = Cos.^2 b$ is, hebben wij nog

$Cot. A = Cos. a$ en $Cot. B = Cos. b$ . . (4)

want a en b, zoowel als A en B, zijn een van beide scherp en een van beide stomp; dit in verband brengende met de eigenschap, dat over de grootste hoek ook de grootste zijde moet staan, blijkt dan dat A en a, alsook B en b, van dezelfde soort zullen wezen.

Voor $r = 15°$, hebben wij nu de volgende berekeningen, waarbij wij a de kleinste regthoekszijde onderstellen:

$Log. Tang. r = Log. Tang. 15° = 9{,}4280525 - 10$

$Log. \sqrt{2} = \frac{1}{2} Log. 2 = 0{,}1505150$

opt.

$Log. Sin. a = Log. Sin. b = 9{,}5785675 - 10$

$a = 22°16' 4'',4,$

$b = 157°43'55'',6;$

$Log. Cos. a = Log. (-Cos. b) = 9{,}9663400 - 10$

$Log. (-Cos. c) = 2 Log. Cos. a = 9{,}9326800 - 10$

$c = 148°54'55'',7;$

$Log. Cot. A = Log. (-Cot. B) = 9{,}9663400 - 10$

$A = 47°13' 5'',4$

$B = 132°46'54'',7.$

LI. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Wanneer in een bolvormigen driehoek de som der hoeken 360° *is, dan zal de Tangens van den straal van den ingeschreven cirkel, gelijk zijn aan tweemaal den Tangens van den straal van den omgeschreven cirkel, gedeeld door de som van de producten der secanten van de hoeken, op alle mogelijke wijzen twee aan twee en drie aan drie genomen. Men vraagt zulke te bewijzen.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Bassan, D. Bierens de Haan, H. Middelburg, J. S. Speijer en R. van de Weerd.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Om eene zijde a van eenen bolvormigen driehoek te berekenen, wanneer deszelfs hoeken A, B en C gegeven zijn, heeft men de bekende formule

$$Sin.\ a = \frac{2\sqrt{\{-Cos.S\,Cos.(S-A)\,Cos.(S-B)\,Cos.(S-C)\}}}{Sin.B\,Sin.C},$$

waarin S de halve som der hoeken voorstelt. Is dus de som der hoeken 360°, of $S = 180°$, dan hebben wij in dat geval

$$Sin.\ a = \frac{2\sqrt{(-\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C)}}{Sin.\ B\ Sin.\ C}.$$

In de formule, die wij bij de voorgaande oplossing, ter berekening van den straal des ingeschreven cirkels, aanhaalden, hebben wij dus hier

$$M = \frac{Sin.\ A}{Sin.\ a} = \frac{Sin.\ A\ Sin.\ B\ Sin.\ C}{2\sqrt{(-\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C)}},$$

zoodat wij nu dien straal uitgedrukt vinden door

$$Tang.r = \frac{4Sin.\frac{1}{2}A\,Sin.\frac{1}{2}B\,Sin\,\frac{1}{2}C\sqrt{(-Cos.A\,Cos.B\,Cos.C)}}{Sin.A\,Sin.B\,Sin.C},$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$Tang.\ r = \frac{\sqrt{(-\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C)}}{2\ Cos.\ \frac{1}{2}\ A\ Cos.\ \frac{1}{2}\ B\ Cos.\ \frac{1}{2}\ C}.$$

Blijkens het genoemde werk van den Hoogleeraar LOBATTO, (zie aldaar bl. 71, in de noot), wordt de straal R des omschreven cirkels, indien de som der hoeken 360° is, door de formule

$$Cot.\ R = \sqrt{(-\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C)}$$

aangewezen. Door deze vergelijking met de voorgaande te vermenigvuldigen, hebben wij dan

$$\frac{Tang.\ r}{Tang.\ R} = Tang.\ r\ Cot.\ R = \frac{-\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C}{2\ Cos.\ \frac{1}{2}\ A\ Cos.\ \frac{1}{2}\ B\ Cos.\ \frac{1}{2}\ C}.$$

Omdat $\frac{1}{2}\ A + \frac{1}{2}\ B + \frac{1}{2}\ C = 180°$ is, hebben wij (zie J. DE GELDER, *Meetk.*, 3e druk, § 959, sub. 6°)

$$2Cos.\tfrac{1}{2}A\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C = 1 - Cos.^2\tfrac{1}{2}A - Cos.^2\tfrac{1}{2}B - Cos.^2\tfrac{1}{2}C,$$

en hierin kunnen wij

$$Cos.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{1+Cos.A}{2},\ Cos.^2\tfrac{1}{2}B = \frac{1+Cos.B}{2},\ Cos.^2\tfrac{1}{2}C = \frac{1+Cos.C}{2}$$

substitueren. Dit geeft dan

$$2Cos.\tfrac{1}{2}A\,Cos.\tfrac{1}{2}B\,Cos.\tfrac{1}{2}C = -\tfrac{1}{2}(Cos.A + Cos.B + Cos.C + 1),$$

Digitized by Google

en dus $\frac{Tang.r}{Tang.R} = \frac{2Cos.A\,Cos.B\,Cos.C}{Cos.A+Cos.B+Cos.C+1}$;

deelen wij nu vervolgens teller en noemer van het tweede lid door het product der drie cosinussen, en vermenigvuldigen wij daarna de beide leden met *Tang.* R, dan komt er

$$Tang.r = \frac{2Tang.R}{Sec.B\,Sec.C+Sec.A\,Sec.C+Sec.A\,Sec.B+Sec.A\,Sec.B\,Sec.C},$$

hetgeen de formule is, waarvan men het betoog begeerde.

LII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de drie deelen te vinden, waarin de boog van een cirkelkwadrant moet verdeeld worden, om te maken, dat de loodlijnen, uit de deelpunten neergelaten op elk der beide stralen, die het kwadrant begrenzen, dien straal harmonisch verdeelen.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Speijer, D. Bierens de Haan, W. L. Ivangh, G. Koster, H. Middelburg, J. Sjoenis en R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij AB (Fig. 34) de boog van een cirkelkwadrant, hetwelk door de beide stralen AC en BC begrensd wordt; indien dan D en E de punten zijn, waardoor de boog AB op de begeerde wijze verdeeld wordt, en uit deze punten de loodlijnen DF, EG, DH en EI op de stralen AC en BC zijn neergelaten, moet men volgens de opgave hebben

$$AC \times FG = AG \times CF \quad \text{en} \quad BC \times HI = BH \times CI.$$

Stellen wij nu, ten einde de gevraagde deelen te vinden, *Boog* AE $= \phi$ en *Boog* BD $= \phi'$, dan gaan deze beide vergelijkingen, zoo wij AC $=$ BC $= 1$ stellen, over in

$$Cos.\,\phi - Sin.\,\phi' = (1 - Cos.\,\phi)\,Sin.\,\phi' \quad . \quad (1)$$

en $$Cos.\,\phi' - Sin.\,\phi = (1 - Cos.\,\phi')\,Sin.\,\phi, \quad . \quad (2)$$

zoodat wij dan twee vergelijkingen met de twee onbekenden ϕ en ϕ' hebben op te lossen.

Uit (1) volgt $$Sin.\,\phi' = \frac{-Cos.\,\phi}{2 - Cos.\,\phi}$$

en uit (2) $$Cos.\,\phi' = \frac{2\,Sin.\,\phi}{1 + Sin.\,\phi}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

de som van de vierkanten der twee laatste vergelijkingen geeft

Digitized by Google

$$1 = \frac{Cos.^2\phi}{(2 - Cos.\phi)^2} + \frac{4\,Sin.^2\phi}{(1 + Sin.\phi)^2},$$

dat is $$1 - \frac{Cos.^2\phi}{(2 - Cos.\phi)^2} = \frac{4\,Sin.^2\phi}{(1 + Sin.\phi)^2},$$

of $$\frac{4(1 - Cos.\phi)}{(2 - Cos.\phi)^2} = \frac{4(1 - Cos.^2\phi)}{(1 + Sin.\phi)^2};$$

en zoo wij deze vergelijking door $4(1 - Cos.\phi)$ deelen, komt er

$$\frac{1}{(2 - Cos.\phi)^2} = \frac{1 + Cos.\phi}{(1 + Sin.\phi)^2},$$

waaruit achtervolgens voortvloeit:

$$(1 + Cos.\phi)\,(2 - Cos.\phi)^2 = (1 + Sin.\phi)^2,$$

$$4 - 3\,Cos.^2\phi + Cos.^3\phi = 1 + 2\,Sin.\phi + Sin.^2\phi,$$

$$Cos.^3\phi = 2\,Sin.\phi + Sin.^2\phi - 3 + 3\,Cos.^2\phi,$$

$$Cos.^3\phi = 2\,Sin.\phi + Sin.^2\phi - 3\,Sin.^2\phi,$$

$$Cos.\phi\,(1 - Sin.^2\phi) = 2\,Sin.\phi\,(1 - Sin.\phi),$$

of na wederom door $1 - Sin.\phi$ gedeeld te hebben

$$Cos.\phi\,(1 + Sin.\phi) = 2\,Sin.\phi.$$

Hieruit vinden wij dan

$$Cos.\phi = \frac{2\,Sin.\phi}{1 + Sin.\phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en deze uitkomst met (3) vergelijkende, zien wij vooreerst, dat

$$\phi = \phi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

zal zijn. Brengen wij verder de vergelijking (4) in het vierkant, zoo geeft zulks

$$1 - Sin.^2\phi = \frac{4\,Sin.^2\phi}{(1 + Sin.\phi)^2},$$

welke vergelijking na herleiding wordt

$$Sin.^4\phi + 2\,Sin.^3\phi + 4\,Sin.^2\phi - 2\,Sin.\phi - 1 = 0. \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze vergelijking zal men bevinden, dat eenen bruikbaren onmeetbaren wortel heeft, voor welks waarde men door benadering vindt

$$Sin.\phi = 0{,}63225;$$

hiermede stemt overeen

$$Boog\ AE = \phi = 39°13',$$

volgens (5) is dan ook

$$Boog\ BD = \phi' = 39°13',$$

en de som dezer bogen van 90° aftrekkende, vinden wij eindelijk nog

$$Boog\ DE = 11°34'.$$

Digitized by Google

AANMERKINGEN *van* J. S. SPEIJER. 1°. Men had reeds vooraf kunnen besluiten, dat $\phi = \phi'$ is; want de boog BD is ten opzigte van den straal BC, even zoo gelegen als de boog AE ten opzigte van den straal AC. Dit aangenomen hebbende, gaat dan ook elk der vergelijkingen (1) en (2) over in

$$Cos.\ \phi - Sin.\ \phi = (1 - Cos.\ \phi)\ Sin.\ \phi,$$

waaruit nu dadelijk de vergelijking (4), en vervolgens de hoogeremagtsvergelijking (6) gevonden wordt.

2°. De vergelijking (4) kan ook dienen, om ϕ gemakkelijk zonder hoogeremagtsvergelijking bij benadering te vinden. Immers volgt uit (4)

$$Cos.\ \phi + Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = 2\ Sin.\ \phi,$$

en door $Sin.\ \phi$ deelende

$$Cot.\ \phi + Cos.\ \phi = 2.$$

Men zoeke derhalve, in eene tafel van natuurlijke Sinussen, naar eenen boog, waarvan de Cotangens en Cosinus te zamen gevoegd het getal 2 opleveren; en spoedig zal men dan vinden $\phi = 39°13'10''$.

LIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert den boog van een cirkelkwadrant in drie deelen te verdeelen, zoodanig, dat de loodlijnen, uit de deelpunten neergelaten op elk der beide stralen, waardoor het kwadrant begrensd wordt, dien straal in drie stukken verdeelen, welke eene rekenkunstige reeks uitmaken.

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. S. SPEIJER, D. BIERENS DE HAAN, G. KOSTER, R. VAN DE WEERD, W. L. IVANOH, H. MIDDELBURG *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Gebruiken wij dezelfde figuur (Fig. 34) als in de voorgaande oplossing, en onderstellen wij, dat de deelpunten D en E aan de thans opgegevene voorwaarden voldoen, dan maken de drie lijnen AG, GF en FC, alsmede de drie lijnen BH, HI en IC rekenkunstige reeksen uit; omdat in elke rekenkunstige reeks van drie termen, de som der beide uiterste termen gelijk aan het dubbel van den middelsten is, hebben wij dus hier

$$AG + CF = 2\ FG \quad \text{en} \quad BH + IC = 2\ HI.$$

Digitized by Google

Wederom *Boog* AE $= \phi$, *Boog* BD $= \phi'$ en AC $=$ BC $= 1$ stellende, gaan deze vergelijkingen over in

$$(1 - Cos.\phi) + Sin.\phi' = 2(Cos.\phi - Sin.\phi') \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$(1 - Cos.\phi') + Sin.\phi = 2(Cos.\phi' - Sin.\phi). \quad . \quad . \quad (2)$$

Uit (1) volgt

$$Sin.\ \phi' = Cos.\ \phi - \tfrac{1}{5},$$

en uit (2) $$Cos.\ \phi' = Sin.\ \phi + \tfrac{1}{5}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

nemen wij dus de som van de vierkanten dezer vergelijkingen, dan komt er

$$Sin.^2\phi' + Cos.^2\phi' = Sin.^2\phi + Cos.^2\phi + \tfrac{2}{5}Sin.\phi - \tfrac{2}{5}Cos.\phi + \tfrac{2}{5},$$

of, omdat $Sin.^2\ \phi' + Cos.^2\ \phi' = Sin.^2\ \phi + Cos.^2\ \phi = 1$ is,

$$0 = \tfrac{2}{5}\ Sin.\ \phi - \tfrac{2}{5}\ Cos.\ \phi + \tfrac{2}{5},$$

dat is $$Cos.\ \phi = Sin.\ \phi + \tfrac{1}{5}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en deze vergelijking met (3) in verband brengende, vindt men dan dadelijk

$$\phi = \phi'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Schrijven wij verder de vergelijking (4) in den vorm

$$Cos.\ \phi - Sin.\ \phi = \tfrac{1}{5},$$

en brengen wij haar alzoo in het vierkant, dan vinden wij

$$1 - 2\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = \tfrac{1}{5},$$

of $$Sin.\ 2\ \phi = \tfrac{8}{5} = 0.88888..,$$

waarmede volgens de tafels overeenstemt

$$2\ \phi = 62°44'.$$

Derhalve is:

$$Boog\ AE = \phi = 31°22',$$

$$Boog\ BD = \phi' = 31°22',$$

en $$Boog\ DE = 27°16'.$$

Uit de gevondene waarde $Sin.\ 2\ \phi = \tfrac{8}{5}$ blijkt onmiddellijk, dat men den boog AB werkelijk op de begeerde wijze verdeelen kan, door de volgende constructie:

Verdeel BC $= 1$ (Fig. 35) in 9 gelijke deelen, en zij K het eerstverkregene deelpunt van B af gerekend, zoodat CK $= \tfrac{8}{5}$ is; rigt uit K eene loodlijn KL op BC op, totdat zij den boog AB in L ontmoet; deel vervolgens den boog AL in E middendoor en maak den boog BD gelijk aan den boog AE, dan zullen D en E de begeerde deelpunten zijn. Want AE $=$ BD $= \phi$ stellende, is dan AL $= 2\ \phi$ en $Sin.$ AL $= Sin.\ 2\phi =$ CK $= \tfrac{8}{5}$.

Aanmerking van J. S. Sprijer. Men kan ook hier wel

Digitized by Google

dadelijk uit de vergelijkingen (1) en (2) besluiten, dat $\phi' = \phi$ moet zijn, waardoor elk dier vergelijkingen terstond in (4) overgaat.

LIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Te integreren de vergelijking

$$\frac{x\partial y}{y\partial x} = \frac{2x^2(x^2y^2+1)+xy(xy-1)+1}{2y^2(x^2y^2+1)-xy(xy-1)-1}.$$

Opgelost *door* D. Bierens de Haan, J. Bassan, C. P. Bunger, J. Sjoenis en R. van de Weerd.

Oplossing van D. Bierens de Haan.

Voor de opgegevene vergelijking kan voereerst geschreven worden

$$\frac{x\partial y}{y\partial x} = \frac{(2x^2+1)(x^2y^2+1)-xy}{(2y^2-1)(x^2y^2+1)+xy};$$

vervolgens de breuken verdrijvende, komt er

$$(2y^2-1)(x^2y^2+1)x\partial y+x^2y\partial y=(2x^2+1)(x^2y^2+1)y\partial x-xy^2\partial x,$$

of, de termen verplaatsende en paarsgewijze vereenigende,

$$(x^2y^2+1)\{(2y^2-1)x\partial y-(2x^2+1)y\partial x\}+xy(x\partial y+y\partial x)=0,$$

en, vervolgens door x^2y^2+1 deelende,

$$(2y^2-1)x\partial y-(2x^2+1)y\partial x+\frac{xy(x\partial y+y\partial x)}{1+x^2y^2}=0.$$

Hiervoor kan men wederom schrijven

$$2y^2x\partial y-2x^2y\partial x-(x\partial y+y\partial x)+\frac{xy(x\partial y+y\partial x)}{1+x^2y^2}=0,$$

zoodat men dan, na deeling door xy, verkrijgt

$$2y\partial y-2x\partial x-\frac{x\partial y+y\partial x}{xy}+\frac{x\partial y+y\partial x}{1+x^2y^2}=0,$$

of $$2y\partial y-2x\partial x-\frac{\partial.xy}{xy}+\frac{\partial.xy}{1+x^2y^2}=0;$$

alsnu kan elke term dadelijk geïntegreerd worden, en men heeft alzoo, voor de integraal der opgegevene differentiaalvergelijking,

$$y^2-x^2-\textit{Nep. Log. } xy+\textit{Boog Tang. } xy=C.$$

LV. Voorstel.

Door S. Dijk, Cornsz.

De waarde van y te vinden, uit de vergelijking

$$\frac{\partial y}{\partial\phi}=\frac{\textit{Cos.}^5\phi-y-\textit{Cos.}^7\phi}{\frac{1}{2}\textit{ Sin. }2\phi}.$$

Digitized by Google

Opgelost *door* J. S. Speijer, R. van de Weerd, J. Bassan, W. L. Ivanoh, D. Bierens de Haan, S. Dik, Cornsz., H. Middelburg, W. C. Verseput *en* C. P. Burger.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat $\frac{1}{2}\ Sin.\ 2\phi = Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi$ is, zal men voor de gegevene vergelijking kunnen schrijven

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{Cos.^5\ \phi - Cos.^7\ \phi - y}{Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi};$$

dus ook $Sin.\phi Cos.\phi \partial y = Cos.^5\phi(1 - Cos.^2\phi)\partial\phi - y\partial\phi$,

of, daar $1 - Cos.^2\ \phi = Sin.^2\ \phi$ is,

$$Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi \partial y + y\partial\phi = Sin.^2\ \phi\ Cos.^5\ \phi\partial\phi.$$

Deelen wij nu de beide leden dezer vergelijking door $Cos.^2\phi$, dan komt er, omdat $\frac{Sin.\phi}{Cos.\phi} = Tang.\ \phi$ en $\frac{\partial\phi}{Cos.^2\ \phi} = \partial.Tang.\phi$ is, de nieuwe vergelijking

$$Tang.\ \phi.\partial y + y\partial.Tang.\phi = Sin.^2\ \phi\ Cos.^3\ \phi\partial\phi,$$

en deze is gemakkelijk te integreren. Wij hebben namelijk terstond

$$yTang\phi = \int Sin.^2\phi Cos.^3\phi\partial\phi = \int Sin.^2\phi(1 - Sin.^2\phi)\partial.Sin.\phi$$
$$= \int Sin.^2\phi\partial.Sin.\phi - \int Sin.^4\phi\partial.Sin\phi,$$

of $y\ Tang.\ \phi = \frac{1}{3}\ Sin.^3\ \phi - \frac{1}{5}\ Sin.^5\ \phi + C$;

waaruit voor de gevraagde waarde van y volgt

$$y = \frac{Sin.^3\ \phi}{Tang.\ \phi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\ Sin.^2\ \phi\right) + \frac{C}{Tang.\ \phi}.$$

Deze waarde kan men naar welgevallen tot eene der volgende gedaanten herleiden:

$$y = Sin.^3\ \phi\ Cot.\ \phi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\ Sin.^2\ \phi\right) + C\ Cot.\ \phi,$$
$$y = \tfrac{1}{15} Sin.^2\ \phi\ Cos.\ \phi\ (5 - 3\ Sin.^2\ \phi) + C\ Cot.\ \phi,$$
$$y = \tfrac{1}{15} Sin.^2\ \phi\ Cos.\ \phi\ (2 + 3\ Cos.^2\ \phi) + C\ Cot.\ \phi,$$
$$y = \tfrac{1}{15} Cos.\ \phi(2 + Cos.^2\phi - 3\ Cos.^4\phi) + C\ Cot.\ \phi.$$

LVI. Vooorstel.

Door R. van de Weerd.

Wanneer een lichtend punt en een ondoorschijnende cirkel, met betrekking tot een horizontaal vlak, in stelling gegeven zijn, en ook de straal des cirkels bekend is, vraagt men den inhoud der schaduw te vinden, door den cirkel op het horizontale vlak geworpen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, C. P. Burger, D. Bierens de Haan *en* R. van de Weerd.

Digitized by Google

Oplossing van J. Badon Ghijsen.

Laat YY′ (Fig. 36) de gemeene doorsnede zijn van het horizontale vlak YP, met het vlak YQ, waarin de gegeven cirkel gelegen is; zij M het middelpunt van dien cirkel, MR deszelfs straal en M′ de projectie van het punt M op het horizontale vlak YP; dan kunnen wij door MM′ een vlak brengen, dat ergens in O loodregt op YY′ staat, en dat vlak is dan vooreerst verticaal, terwijl hetzelve verder de vlakken YP en YQ snijdt volgens lijnen OM′ en OM, die in O almede loodregt op YY′ zijn, en met elkander den standhoek MOM′ vormen, waaronder het horizontale vlak door het vlak van den cirkel gesneden wordt.

Nemen wij OM′ tot as der x, OY tot as der y, en eene door O getrokkene verticale lijn OZ tot as der z aan, dan zijn deze coördinaten-assen onderling regthoekig. Laat verder de stand en de grootte van den cirkel bepaald zijn, door de gegevens *hoek* MOM′ $= \alpha$, OM $= m$ en MR $= r$, dan zijn de vergelijkingen van den cirkel, zoo als genoegzaam bekend is,

$$(x\ Sec.\ \alpha - m)^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$z = x\ Tang.\ \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

stellende x, y en z de coördinaten van een onbepaald punt des omtreks voor.

Zij C het lichtende punt, welks stand bepaald is door deszelfs gegevene coördinaten OA $= a$, AB $= b$ en BC $= c$; indien wij dan uit C, door een onbepaald punt I van den omtrek des cirkels, eene lijn CI′ trekken, het horizontale vlak ergens in I′ ontmoetende, heeft deze lijn, als door de punten (a, b, c) en (x, y, z) gaande, tot vergelijkingen

$$Y - y = \frac{b - y}{a - x}(X - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en

$$Z - z = \frac{c - z}{a - x}(X - x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin X, Y en Z de coördinaten van een onbepaald punt der lijn CI′ verbeelden.

Wanneer men tusschen de vier voorgaande vergelijkingen, de grootheden x, y en z elimineert, zal de komende eindvergelijking eene betrekking van afhankelijkheid tusschen X,

Digitized by Google

Y en Z aanwijzen, welke geheel onafhankelijk is van de plaats, waar men het punt I in den omtrek genomen heeft. In die eindvergelijking zullen dus X, Y en Z de coördinaten voorstellen van een onbepaald punt van elke willekeurige lijn, uit C door den omtrek des cirkels getrokken, dat is, die eindvergelijking zal de vergelijking zijn van het kegelvlak, dat C tot top en den gegeven cirkel tot rigtlijn heeft. Stelt men in de genoemde eindvergelijking $Z = 0$, dan zal de komende vergelijking tusschen X en Y, blijkbaar de vergelijking zijn van de kromme lijn, volgens welke het horizontale vlak, door het genoemde kegelvlak gesneden wordt; en deze kromme lijn is dan de omtrek der schaduw, door den cirkel op het horizontale vlak geworpen.

Daar wij alleen de laatstgenoemde kromme lijn, en geenszins het kegelvlak, behoeven te kennen, kunnen wij, in plaats van eerst x, y en z te elimineren en daarna $Z = 0$ te stellen, beginnen met $Z = 0$ te stellen, en vervolgens de eliminatie van x, y en z bewerkstelligen. En daar de vergelijking (4), die de eenige is waarin Z voorkomt, voor $Z = 0$ verandert in

$$-z = \frac{c-z}{a-x}(X-x), \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

hebben wij dan slechts x, y en z uit de vier vergelijkingen (1), (2), (3) en (4') te verdrijven, om de vergelijking van den omtrek der schaduw te bekomen.

Uit (2) en (4') hebben wij vooreerst

$$-x\,Tang.\,\alpha = \frac{c - x\,Tang.\,\alpha}{a-x}(X-x),$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \frac{c\,X}{X\,Tang.\,\alpha + c - a\,Tang.\,\alpha} = \frac{c\,X\,Cot.\,\alpha}{X + c\,Cot.\,\alpha - a},$$

of zoo wij ter bekorting $c\,Cot.\,\alpha - a = n$ stellen,

$$x = \frac{c\,X\,Cot.\,\alpha}{X+n}; \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

en hierdoor wordt dan volgens (2)

$$z = x\,Tang.\,\alpha = \frac{c\,X}{X+n}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

alsmede

$$x\,Sec.\,\alpha = \frac{c\,X\,Cosec.\,\alpha}{X+n} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Digitized by Google

Zoo wij vervolgens (3) door (4') deelen, komt er

$$\frac{Y-y}{-z} = \frac{b-y}{c-z},$$

en hieruit y afzonderende, vinden wij

$$y = Y - \frac{(Y-b)z}{c},$$

welke waarde door (6) overgaat in

$$y = Y - \frac{(Y-b)X}{X+n},$$

of na herleiding in

$$y = \frac{bX+nY}{X+n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Brengen wij dus eindelijk de waarden (7) en (8) in (1) over, zoo verkrijgen wij, voor de vergelijking van den omtrek der schaduw,

$$\left\{\frac{cX\,Cosec.\,\alpha}{X+n} - m\right\}^2 + \left\{\frac{bX+nY}{X+n}\right\}^2 = r^2;$$

of, na verdrijving der breuken,

$$\{(cCosec\,\alpha - m)X - mn\}^2 + (bX+nY)^2 = r^2(X+n)^2$$

en na ontwikkeling en rangschikking

$$n^2Y^2 + 2bnXY + \{(cCosec.\alpha - m)^2 + b^2 - r^2\}X^2$$
$$-2n\{mcCosec.\alpha - (m^2-r^2)\}X + n^2(m^2-r^2) = 0. \quad (9)$$

Deze vergelijking wijst naar behooren eene kegelsnede aan; immers is het genoegzaam bekend, dat het oppervlak van eenen scheven kegel met cirkelvormig grondvlak, door een willekeurig plat vlak, en dus ook hier door het horizontale vlak, volgens eene gewone kegelsnede gesneden wordt.

Naargelang van den stand van het lichtende punt, kan deze kegelsnede eene paraboql, een hyperbool of eene ellips wezen; daar echter alleen in het laatste geval de vraag te pas kan komen, om den inhoud der schaduw te berekenen, moeten wij onderstellen, dat het lichtende punt in zulk eenen stand met betrekking tot den ondoorschijnenden cirkel en het horizontale vlak gegeven is, dat de vergelijking (9) werkelijk tot eene ellips behoort.

De inhoud nu eener ellips, welker vergelijking ten opzigte van onderling regthoekige assen is

$$AY^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + F = 0,$$

wordt uitgedrukt door de formule

Digitized by Google

$$I = 2\pi \frac{AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF}{\sqrt{(4AC - B^2)^3}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

(zie *Verzameling van Wisk. Voorstellen*, Deel V, LIII Voorstel); en de begeerde inhoud der schaduw zal dus gevonden worden, zoo men in deze formule de waarden substitueert der coëfficiënten, die in de vergelijking (9) voorkomen, te weten:

$$A = n^2$$
$$B = 2bn,$$
$$C = (c\ Cosec.\ \alpha - m)^2 + b^2 - r^2,$$
$$D = 0,$$
$$E = -2n\{mc\ Cosec.\ \alpha - (m^2 - r^2)\},$$
$$F = n^2(m^2 - r^2).$$

Voor $D = 0$, verandert de formule (10) vooreerst in

$$I = 2\pi \frac{AE^2 - F(4AC - B^2)}{\sqrt{(4AC - B^2)^3}},$$

terwijl wij verder vinden:

$$AE^2 = 4n^4\{mc\ Cosec.\ \alpha - (m^2 - r^2)\}^2,$$
$$4AC - B^2 = 4n^2\{(c\ Cosec.\ \alpha - m)^2 - r^2)\},$$
$$F(4AC - B^2) = 4n^4(m^2 - r^2)\{c^2\ Cosec.^2\ \alpha - 2mc\ Cosec.\ \alpha + (m^2 - r^2)\},$$

en

$$\sqrt{(4AC - B^2)^3} = 8n^3\sqrt{\{(c\ Cosec.\ \alpha - m)^2 - r^2\}^3},$$

waardoor wij hebben

$$I = \pi n \frac{\{mc\ Cosec.\ \alpha - (m^2 - r^2)\}^2 - (m^2 - r^2)\{c^2\ Cosec.^2\ \alpha - 2mc\ Cosec.\ \alpha + (m^2 - r^2)\}}{\sqrt{\{(c\ Cosec.\ \alpha - m)^2 - r^2\}^3}},$$

Digitized by Google

of na den teller door ontwikkeling vereenvoudigd te hebben

$$I = \frac{\pi n r^2 c^2 \ Cosec.^2 \ \alpha}{V\{(c \ Cosec. \ \alpha - m)^2 - r^2\}^3}.$$

Hierin nu weder voor n de waarde $n = c \ Cot. \ \alpha - a$ stellende, komt er eindelijk

$$I = \frac{\pi(c \ Cot. \ \alpha - a) r^2 c^2 \ Cosec.^2 \ \alpha}{V\{(c \ Cosec. \ \alpha - m)^2 - r^2\}^3}, \quad . \quad . \quad (11)$$

zoodat dan de inhoud der schaduw in de gegevens α, m, r, a en c, is uitgedrukt.

Het is opmerkelijk, dat de coördinaat b niet in de formule (11) voorkomt; want hieruit volgt, dat de schaduw niet van inhoud verandert, indien het lichtende punt evenwijdig met YY' bewogen wordt. Bij deze beweging van het lichtende punt, zal echter de gedaante der schaduw, hoezeer altijd eene ellips blijvende, veranderen; want de coördinaat b komt wel in de vergelijking (9) der ellips voor.

De formule (11) kan, door het aannemen van andere gegevens ter bepaling van den stand van het lichtende punt, nog vereenvoudigd worden. Zij namelijk C' de projectie van dat punt op het vlak XOY; trekken wij dan in dat vlak de lijnen MD evenwijdig met OX, en C'D evenwijdig met OM, welke lijnen elkander ergens in D ontmoeten, dan kunnen wij den betrekkelijken stand van het punt C bepalen door de gegevens MD $= p$ en C'D $= q$; benevens CC' $=$ AB $= b$, waarvan echter de inhoud der schaduw is gebleken onafhankelijk te zijn. Trekken wij nu AC', MD in E snijdende, dan is C'DE een regthoekige driehoek, waarin *hoek* C'DE $= \alpha$ en C'E $=$ C'A $-$ MM' $= c - m \ Sin. \ \alpha$ is; hieruit volgt

$$DE = C'E \ Cot. \ \alpha = c \ Cot. \ \alpha - m \ Cos. \ \alpha,$$

$$C'D = C'E \ Cosec. \ \alpha = c \ Cosec. \ \alpha - m;$$

voorts is $EM = OM' - OA = m \ Cos. \ \alpha - a$,

dus $p = DM = DE + EM = c \ Cot. \ \alpha - a$,

en $q = C'D = c \ Cosec. \ \alpha - m$,

waardoor de formule (11) overgaat in

$$I = \frac{\pi p (q + m)^2 r^2}{V(q^2 - r^2)^3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hoezeer hierin de hoek α niet meer voorkomt, blijft echter I afhankelijk van α, omdat zonder tusschenkomst van

Digitized by Google

dien hoek de gegevens p en q den stand van het punt C niet kunnen bepalen, of wel omdat, bij een onveranderden stand van het punt C, de hoek α niet veranderen kan, zonder dat p en q andere waarden verkrijgen.

Tot de bestaanbaarheid van I wordt blijkens (12) gevorderd, dat $q^2 > r^2$ of $C'D^2 > MR^2$ zij; het punt C moet dus hooger of lager boven het horizontale vlak gelegen zijn, dan het hoogste of laagste punt R of R' van den schaduwgevenden cirkel. In dit geval is $(c\ Cosec.\ \alpha - m)^2 > r^2$, dus $4AC > B^2$ en de vergelijking (9) behoort dan werkelijk tot eene ellips. Ligt echter C lager dan R', zoo bestaat er geen eigenlijke schaduw, maar de ellips is dan de doorsnede van den verlengden schaduwkegel met het horizontale vlak.

Is $q^2 = r^2$, zoo wordt $I = \infty$, en het lichtende punt ligt dan even hoog als het hoogste of laagste punt van den cirkel. In dit geval is $4AC = B^2$, en de vergelijking (9) behoort dan tot eene parabool, zoodat er geene begrensde schaduw is.

Is $q^2 < r^2$, zoo wordt I onbestaanbaar, en het lichtende punt ligt dan tusschen de horizontale vlakken, door de hoogste en laagste punten R en R' van den cirkel gebragt. In dat geval is $4AC < B^2$, en de vergelijking (9) behoort dan tot eene hyperbool, zoodat er almede geene begrensde schaduw bestaat.

Wil men stellen, dat het vlak des cirkels evenwijdig met het horizontale vlak is, dan is $\alpha = 0$, dus $Cot.\ \alpha = \infty$, en $Cosec.\ \alpha = \infty$; terwijl verder mede $a = \infty$, $m = \infty$, $p = \infty$ en $q = \infty$ wordt. In dit geval geven de formulen (11) of (12) $I = \frac{\infty}{\infty}$. Stellen wij echter, dat gegeven is $AM' = d$ en $MM' = h$, dan geven de gelijkvormige driehoeken DC'E en OMM', de evenredigheid

$$DC' : OM = C'E : MM' \text{ of } q : m = o - h : h,$$

waaruit volgt

$$q = \frac{o - h}{h} m$$

en

$$q + m = \frac{o}{h} m;$$

kunnende verder uit den regthoekigen driehoek DC'E afgeleid worden

Digitized by Google

$$DE = \sqrt{(DC'^2 - C'E^2)} = \sqrt{\left\{q^2 - (c-h)^2\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{(c-h)^2m^2}{h^2} - (c-h)^2\right\}} = \frac{c-h}{h}\sqrt{(m^2-h^2)},$$

waarnit volgt $$p = DM = AM' + DE = d + \frac{c-h}{h}\sqrt{(m^2 - h^2)}.$$

Door deze waarden gaat nu de formule (12) over in

$$I = \frac{\pi r^2 c^2 m^2 \left\{dh + (c-h)\sqrt{(m^2-h^2)}\right\}}{\sqrt{\left\{(c-h)^2m^2 - h^2r^2\right\}^3}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

en hierin $m = \infty$ nemende, als wanneer $dh + (c-h)\sqrt{(m^2-h^2)}$ in $(c-h)m$ en $(c-h)^2m^2 - h^2r^2$ in $(c-h)^2m^2$ overgaat, komt er

$$I = \frac{\pi r^2 c^2}{(c-h)^2},$$

voor het bijzondere geval, dat de cirkel horizontaal is. Deze uitkomst kan echter, door eene afzonderlijke beschouwing van dit geval, dadelijk langs eenen korteren weg gevonden worden.

LVII. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Hetzelfde als in het voorgaande voorstel wordt gevraagd, indien de schaduw op het horizontale vlak geworpen wordt, door eenen op dat vlak staanden gewonen kegel, die in stelling en grootte gegeven is.

Opgelost *door* C. P. Burger, J. S. Speijer, G. Koster *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* C. P. Burger.

Laat P (Fig. 37) het lichtende punt voorstellen, en ABC de kegel, welke met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat. Indien men dan uit P eene loodlijn op het horizontale vlak laat vallen, en het voet-

Digitized by Google

punt Q van die loodlijn, met het middelpunt O van het grondvlak des kegels vereenigt, kan men als gegevens aannemen: de lijnen $OQ = a$ en $PQ = b$, benevens de hoogte des kegels $AO = k$ en de straal van zijn grondvlak $OB = OC = r$.

Zoo men door P en A eene lijn trekt, zal deze het verlengde van QO in een punt D van het horizontale vlak snijden; dit punt D is dan de schaduw van den top A des kegels op het horizontale vlak, en zoo men verder uit D de beide raaklijnen DE en DF aan zijn grondvlak trekt, zullen deze raaklijnen en de boog ECF, tusschen de raakpunten gelegen, de schaduw begrenzen, waarvan de inhoud berekend moet worden.

Hiertoe heeft men, uit de gelijkvormigheid der driehoeken AOD en PQD,

$$OD : AO = QD : PQ,$$

dus $$OD : AO = QD - OD : PQ - AO,$$

en $$OD = \frac{QD - OD}{PQ - AO} \times AO = \frac{ak}{b - k};$$

voorts volgt, uit den regthoekigen driehoek OED of OFD,

$$DE = DF = \sqrt{\left\{OD^2 - r^2\right\}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{ak}{b-k}\right)^2 - r^2\right\}},$$

dus

$$\textit{Inh. drieh.}\ OED = \textit{Inh. drieh.}\ OFD = \tfrac{1}{2}r\sqrt{\left\{\left(\frac{ak}{b-k}\right)^2 - r^2\right\}},$$

en

$$\textit{Inh. vierh.}\ EDFO = r\sqrt{\left\{\left(\frac{ak}{b-k}\right)^2 - r^2\right\}} = r^2\sqrt{\left\{\left(\frac{ak}{r(b-k)}\right)^2 - 1\right\}};$$

eindelijk is $$\textit{Cos.}\ DOE = \frac{OE}{OD} = \frac{r(b-k)}{ak},$$

dus $$\textit{Boog}\ CE = r\ \textit{Boog Cos.}\ \frac{r(b-k)}{ak},$$

en

$$\textit{Inh. Sect.}\ EOFC = \tfrac{1}{2}r \times \textit{Boog}\ ECF = r \times \textit{Boog}\ CE = r^2\ \textit{Boog Cos.}\ \frac{r(b-k)}{ak}.$$

Voor den gevraagden inhoud I der schaduw, hebben wij dus

$$I = \textit{Inh. vierh.}\ EDFO - \textit{Inh. Sect.}\ EOFC =$$

$$= r^2\sqrt{\left\{\left(\frac{ak}{r(b-k)}\right)^2 - 1\right\}} - r^2\ \textit{Boog Cos.}\ \frac{r(b-k)}{ak}.$$

Digitized by Google

AANMERKINGEN *uit de oplossing van* J. S. SPEIJER.

1°. Indien de gegevene kegel een scheve kegel met cirkelvormig grondvlak is, welks as AO niet loodregt op het grondvlak staat, zoo als in Fig. 38, kan men uit het lichtende punt P, evenwijdig aan de as AO, eene lijn PQ trekken, welke het horizontale vlak ergens in Q ontmoet. Neemt men dan als gegevens aan OQ $= a$, PQ $= b$, AO $= h$ en OB $=$ OC $= r$, zoo blijft de voorgaande berekening van den inhoud der schaduw zonder eenige verandering stand houden.

2°. Als $b = h$ is, wordt $I = \infty$; de kegel werpt dan geene begrensde schaduw op het horizontale vlak, en inderdaad loopt in dit geval de lijn PA evenwijdig met hetzelve.

3°. Als $b < h$ is, werpt de kegel almede geene begrensde schaduw op het horizontale vlak. In dit geval geeft de gevondene formule voor I den inhoud van dat gedeelte des horizontalen vlaks, hetwelk aan de verlichte zijde des kegels tusschen de verlengde schaduwlijnen begrepen is. Dit gedeelte wordt in Fig. 39 door DECFD voorgesteld. Opdat er dus eene begrensde schaduw zij, moet $b > h$ zijn, zoó als in Fig. 37 en 38 ondersteld is.

4°. Tot de bestaanbaarheid van I wordt gevorderd, dat men hebbe $\frac{r(b-h)}{ah} < 1$, waaruit terstond volgt, dat $b < \frac{(a+r)h}{r}$ moet wezen. Verlengt men (Fig. 37 of 38) AC, totdat zij PQ of haar verlengde in eenig punt S ontmoet, hetwelk wij ter vermijding van omslag in onze figuren niet hebben afgebeeld, dan is

$$QS : AO = QC : OC$$

en dus $$QS = \frac{QC \times AO}{OC} = \frac{(a+r)h}{r}.$$

De voorwaarde voor de bestaanbaarheid van I is dus eenvoudig deze, dat het lichtende punt buiten het verlengde oppervlak van den kegel, en niet op of binnen dat oppervlak, moet gelegen zijn.

Digitized by Google

LVIII. VOORSTEL.

Door T. A. F. DELPRAT.

Men vraagt zonder behulp der bolvormige driehoeksmeting de formule te vinden, waardoor een gemeten hoek tot den horizon herleid wordt.

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, H. MIDDELBURG EN R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC $= \alpha$ (Fig. 40) de gegeven hoek zijn, welke tot den horizon moet herleid worden. Indien men nu door BA en BC verticale vlakken laat gaan, zullen deze elkander volgens de verticale lijn BZ, en het door B gaande horizontale vlak volgens BX en BY doorsnijden. De hoek XBY is dan de begeerde hoek.

Om dien hoek te berekenen, moeten gegeven zijn de hoeken ABZ $= \beta$ en CBZ $= \gamma$, welke de gezigtslijnen BA en BC met de verticaal maken. Alsdan neme men naar welgevallen BD $=$ BE $= a$, trekke de verticale lijnen DX en EY, daarna XY en vervolgens DF evenwijdig met XY.

Omdat nu DBX en EBY de complementen zijn van de waargenomene hoeken β en γ, zoo is, in de regthoekige driehoeken BXD en BYE,

$$BX = BD \times Cos.\ DBX = a\ Sin.\ \beta,$$
$$BY = BE \times Cos.\ EBY = a\ Sin.\ \gamma,$$
$$DX = BD \times Sin.\ DBX = a\ Cos.\ \beta,$$
en
$$EY = BE \times Sin.\ EBY = a\ Cos.\ \gamma,$$

terwijl het verschil der beide laatste waarden geeft

$$EF = EY - DX = a(Cos.\ \gamma - Cos.\ \beta).$$

Voorts is in den gelijkbeenigen driehoek DBE, waarin de tophoek DBE $= \alpha$ is,

$$DE^2 = 2a^2(1 - Cos.\ \alpha);$$

in den regthoekigen driehoek EFD zijn dan de zijden DE en EF bekend, en dus ook

$$DF^2 = DE^2 - EF^2 = a^2\{2(1 - Cos.\alpha) - (Cos.\gamma - Cos.\beta)^2\}.$$

Stellen wij nu hoek XBY $= \phi$, dan is, in den driehoek XBY,

$$XY^2 = BX^2 + BY^2 - 2\ BX \times BY \times Cos.\ \phi,$$

of, voor BX en BY de bovengevondene waarden substituerende,

Digitized by Google

$XY^2 = a^2(Sin.^2\beta + Sin.^2\gamma - 2\,Sin.\beta\,Sin.\gamma\,Cos.\phi)$; zoodat wij, daar DF = XY is, door gelijkstelling der voor DF^2 en XY^2 verkregene uitdrukkingen, de vergelijking

$2(1-Cos.\alpha)-(Cos.\gamma-Cos.\beta)^2 = Sin.^2\beta+Sin.^2\gamma-2Sin.\beta Sin.\gamma Cos.\phi$

verkrijgen; waarvoor, omdat $Sin.^2\beta = 1 - Cos.^2\beta$ en $Sin.^2\gamma = 1 - Cos.^2\beta$ is, ook geschreven kan worden

$2(1-Cos.\alpha)-(Cos\,\gamma-Cos.\beta)^2 = 2-Cos.^2\beta-Cos.^2\gamma-2Sin.\beta Sin.\gamma Cos.\phi$.

Zoo wij deze vergelijking ontwikkelen, de termen, die elkander vernietigen, weglaten, en vervolgens door 2 deelen, komt er

$$-Cos.\,\alpha + Cos.\,\beta\,Cos.\,\gamma = -Sin.\,\beta\,Sin.\,\gamma\,Cos.\,\phi,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$Cos.\,\phi = \frac{Cos.\,\alpha - Cos.\,\beta\,Cos.\,\gamma}{Sin.\,\beta\,Sin.\,\gamma}.$$

Aanmerking *van* C. P. Burger. Van dit vraagstuk vindt men eene oplossing, door platte driehoeksmeting, in het *Leerboek van den Hoogleeraar* Lobatto, *Vraagst.* V, bl. 75.

LIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Men vraagt langs den kortsten weg de formule te vinden, waardoor een gemeten hoek tot het middelpunt der standplaats herleid wordt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, H. Middelburg, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij O (Fig. 41) het middelpunt eener standplaats, waaruit *hoek* AOB = α moet waargenomen worden, wordende die hoek gevormd door de gezigtsstralen naar twee verafgelegene punten A en B loopende. Indien dan dit middelpunt ontoegankelijk is, neemt men, in een zeer nabijgelegen punt C, *hoek* ACB = α' waar; en de herleiding tot het middelpunt der standplaats bestaat dan daarin, dat men uit den waargenomen hoek α', den hoek α berekent, welken men had moeten waarnemen. Hiertoe moeten vooreerst de afstanden AC = a en BC = b bekend zijn, en verder moet *hoek* ACO = β waargenomen, alsmede de afstand OC = r gemeten worden; zijnde dan uit den aard der zaak r zeer klein in betrekking tot a en b.

Uit de driehoeken AOC en BOC volgt:

Digitized by Google

$$\textit{hoek}\ \mathrm{BOC} + \alpha + \beta = 180^\circ - \textit{hoek}\ \mathrm{A}$$

en $$\textit{hoek}\ \mathrm{BOC} + \alpha' + \beta = 180^\circ - \textit{hoek}\ \mathrm{B};$$

zoodat wij door aftrekking hebben

$$\alpha - \alpha' = \textit{hoek}\ \mathrm{B} - \textit{hoek}\ \mathrm{A}$$

of $$\alpha = \alpha' + \textit{hoek}\ \mathrm{B} - \textit{hoek}\ \mathrm{A},$$

weshalve het er alleen op aankomt de hoegrootheid der hoeken A en B te vinden.

Beschrijven wij daartoe uit A, met $AC = a$ als straal eenen cirkelboog CD en met de eenheid als straal eenen cirkelboog ϕ, dan is $CD = a\phi$, terwijl deze boog CD, wegens deszelfs betrekkelijke kleinheid, als eene regte lijn, en dus OCD als een driehoek regthoekig in D mag aangemerkt worden. In dien driehoek nu is $\textit{hoek}\ \mathrm{OCD} = \textit{hoek}\ \mathrm{ACO} - \textit{hoek}\ \mathrm{ACD} = \beta - 90^\circ$, en derhalve

$$CD = OC\ \textit{Cos.}\ OCD \quad \text{of} \quad a\phi = r\ \textit{Sin.}\ \beta,$$

waaruit volgt $$\phi = \frac{r\ \textit{Sin.}\ \beta}{a}.$$

Beschrijven wij uit B, met $BC = b$ en met de eenheid, cirkelbogen CE en ϕ', dan is desgelijks $CE = b\phi'$; en OCE een driehoek, waarin de hoek OEC regt en $\textit{hoek}\ \mathrm{OCE} = \alpha' + \beta - 90^\circ$ is; dit geeft

$$CE = OC\ \textit{Cos.}\ OCE \quad \text{of} \quad b\phi' = r\ \textit{Sin.}\ (\alpha' + \beta),$$

waaruit volgt $$\phi' = \frac{r\ \textit{Sin.}\ (\alpha' + \beta)}{b}.$$

Dewijl verder $180^\circ = 648000''$ is, en men voor het Ludolfiaansche getal kan nemen $\pi = 648000\ \textit{Sin.}\ 1''$, zoo hebben wij

$$\textit{hoek}\,\mathrm{A} = \frac{180^\circ}{\pi}\phi = \frac{1''}{\textit{Sin.}1''}\phi \text{ en } \textit{hoek}\,\mathrm{B} = \frac{180^\circ}{\pi}\phi' = \frac{1''}{\textit{Sin.}1''}\phi';$$

in seconden rekenende, is dus

$$\textit{hoek}\,\mathrm{A} = \frac{\phi}{\textit{Sin.}1''} = \frac{r\,\textit{Sin}\,\beta}{a\,\textit{Sin.}1''} \text{ en } \textit{hoek}\,\mathrm{B} = \frac{\phi'}{\textit{Sin.}1''} = \frac{r\,\textit{Sin.}(\alpha'+\beta)}{r\,\textit{Sin.}1''},$$

en wij hebben alzoo ten laatste

$$\alpha = \alpha' + \frac{r\ \textit{Sin.}\ (\alpha' + \beta)}{b\ \textit{Sin.}\ 1''} - \frac{r\ \textit{Sin.}\ \beta}{a\ \textit{Sin.}\ 1''}.$$

Deze formule wordt gewoonlijk op eene andere wijze opgemaakt, en wel door $OA = a$ en $OB = b$ te stellen. Daar echter OA en OB niet bekend zijn, zoo lang de herleiding tot het middelpunt niet volbragt is, wordt dan bij

Digitized by Google

dier formule de opmerking gevoegd, dat men, zonder merkbaar van de waarheid af te wijken de afstanden CA en CB, in plaats van OA en OB in rekening kan brengen.

Lagen de punten A, B, C en O op den omtrek van eenen cirkel, dan zou men hebben

$$hoek\ A = hoek\ B \text{ en } a = a';$$

waren de punten A en B oneindig ver van O en C verwijderd, dan zou men hebben

$$hoek\ A = 0,\ hoek\ B = 0 \text{ en } a = a';$$

zoodat er in deze gevallen geene herleiding noodig is.

Mogt men, voor bekende eindige waarden van a en b, vinden dat $\frac{r\ Sin.\ (a' + \beta)}{b\ Sin.\ 1''} = \frac{r\ Sin.\ \beta}{a\ Sin.\ 1''}$ en derhalve $a = a'$ was, dan zou men daaruit omgekeerd besluiten, dat de punten A, B, C en O op den omtrek eens cirkels lagen.

LX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

De kromme lijn na te sporen, welker vergelijking, ten opzigte van onderling regthoekige, coördinaten-assen, is $y = a\ Sin.\ \frac{b}{x}$.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Spijer en R. van de Weerd.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Dewijl in de gegevene vergelijking

$$y = a\ Sin.\ \frac{b}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

de sinus niet buiten de grenzen + 1 en — 1 kan vallen, zal y geene waarden buiten de grenzen + a en — a kunnen hebben. Nemen wij dus twee onderlmg regthoekige coördinaten-assen XX' en YY' aan (Fig. 42) maken wij op de ordinaten-as OA = OA' = a, en trekken wij door A en A' de lijnen VV' en UU' evenwijdig met XX', dan zal onze kromme geheel tusschen deze beide lijnen liggen.

Daar voorts de vergelijking (1) onveranderd blijft, wanneer men gelijktijdig de teekens van x en y verandert, zullen de deelen der kromme, binnen de hoeken X'OY' en XOY gelegen, respectievelijk gelijk en gelijkvormig zijn aan

Digitized by Google

de deelen, die zich binnen de hoeken XOY en XOY' bevinden. Derhalve zullen wij alleen de positieve waarden van x in aanmerking behoeven te nemen, zoodat wij dan ook in de volgende beschouwingen de negatieve waarden van x stilzwijgend uitsluiten.

Ten einde in onze beschouwingen geregeld te kunnen voortgaan, beginnen wij met uit de vergelijking (1) de achtervolgende differentiaalquotiënten op te maken; hiervoor vinden wij, na behoorlijke herleiding:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{ab}{x^2} Cos.\ \frac{b}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{ab^2}{x^4} Sin.\ \frac{b}{x} + \frac{2ab}{x^3} Cos.\ \frac{b}{x}, \quad \ldots \quad (3)$$

en

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{ab(b^2-6x^2)}{x^6} Cos.\ \frac{b}{x} + \frac{6ab^2}{x^5} Sin.\ \frac{b}{x}. \quad \ldots \quad (4)$$

Om de punten te vinden, welke onze kromme met de as der x gemeen heeft, stellen wij $y = 0$; dan is volgens (1)

$$Sin.\ \frac{b}{x} = 0, \text{ dus } \frac{b}{x} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \text{ enz.};$$

gemakshalve $b = m\pi$ stellende, als wanneer m de middellijn is van eenen cirkel, welks omtrek gelijk b is, verkrijgen wij, voor de met $y = 0$ overeenstemmende abscissen, de waarden

$x = \infty$, $x = m$, $x = \frac{1}{2}m$, $x = \frac{1}{3}m$, $x = \frac{1}{4}m$, *enz.*,

waarvan de eerste aantoont, dat de as OX eene asymptoot der kromme is, terwijl de overigen doen zien, dat men slechts OB $= m$, OC $= \frac{1}{2}m$, OD $= \frac{1}{3}m$, OE $= \frac{1}{4}m$, *enz.* behoeft te nemen, om de punten B, C, D, E, *enz.* te vinden, welke de kromme met OX gemeen heeft. Met de laatstgenoemde waarden van x, stemt volgens (2) overeen:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0, \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\pi a}{m}, \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{4\pi a}{m}, \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{9\pi a}{m}, \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{16\pi a}{m}, \text{ enz.}$$

en

$$\frac{x\partial y}{\partial x}=0, \frac{x\partial y}{\partial x}=\pi a, \frac{x\partial y}{\partial x}=-2\pi a, \frac{x\partial y}{\partial x}=3\pi a, \frac{x\partial y}{\partial x}=-4\pi a, \text{ enz.};$$

hierdoor wordt vooreerst de asymptoot OX, en vervolgens de rigting van de raaklijnen in de punten B, C, D, E, *enz.* gevonden. Deze achtervolgende raaklijnen, namelijk, snijden beurtelings het negatieve en het positieve deel van de ordi-

Digitized by Google

naten-as, in punten op de afstanden πa, $2\pi a$, $3\pi a$, $4\pi a$, *enz.* van den oorsprong O verwijderd.

Om de punten te vinden, welke de kromme met de lijn VV' gemeen heeft, stellen wij $y = a$; dan is volgens (1)

$$Sin.\frac{b}{x} = 1, \text{ dus } \frac{b}{x} = \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi, \tfrac{9}{2}\pi, \text{ enz.};$$

de met $y = a$ overeenstemmende waarden van de abscissen, zijn dus

$$x = 2m, \; x = \tfrac{2}{5}m, \; x = \tfrac{2}{9}m, \text{ enz.}$$

en voor deze waarden van x is volgens (2) altijd $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Nemen wij dus $AB' = 2m$, $AD' = \frac{2}{5}m$, $AF' = \frac{2}{9}m$, *enz.*, dan zijn B', D', F', *enz.*, de punten der kromme, die zij met VV' gemeen heeft, en in welke zij door VV' geraakt wordt.

Stellen wij $y = -a$, dan is volgens (1)

$$Sin.\frac{b}{x} = -1, \text{ dus } \frac{b}{x} = \tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{7}{2}\pi, \tfrac{11}{2}\pi, \text{ enz.},$$

zoodat de met $y = -a$ overeenstemmende abscissen zijn:

$$x = \tfrac{2}{3}m, \; x = \tfrac{2}{7}m, \; x = \tfrac{2}{11}m, \text{ enz.},$$

terwijl volgens (2) voor deze waarden van x mede altijd $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ is; nemen wij alzoo $A'C' = \frac{2}{3}m$, $A'E' = \frac{2}{7}m$, $A'G' = \frac{2}{11}m$, *enz.*, dan zijn C', E', G', *enz.* de punten, die de kromme met UU' gemeen heeft, en in welke zij door UU' geraakt wordt.

Laat men x, van $x = \infty$ tot $x = 2m$ afnemen, zoo groeit y van $y = 0$ tot $y = a$ aan; hierdoor ontstaat het gedeelte der kromme, dat tusschen het oneindig ver afgelegen punt der asymptoot en het punt B' gelegen is. Laat men x, van $x = 2m$ tot $x = \frac{2}{3}m$ afnemen, zoo neemt ook y af, en wel van $y = +a$ tot $y = -a$; hierdoor ontstaat het deel B'BC', waardoor OX in B gesneden wordt. Laat men x, van $x = \frac{2}{3}m$ tot $x = \frac{2}{5}m$ afnemen, zoo groeit y wederom aan van $y = -a$ tot $y = +a$, waardoor het deel C'CD' der kromme ontstaat, hetwelk OX in C snijdt; en op deze wijze kan men onophoudelijk voortgaan. Van het punt B' naar de lijn AA' gerekend, gaat dus de kromme onophoudelijk tusschen de lijnen VV' en UU' heen

Digitized by Google

en weder, steeds nader en nader aan de lijn AA' komende, maar zonder ooit die lijn te kunnen bereiken.

Uit het voorgaande is het klaar, dat elk deel der kromme lijn, hetwelk zich van eenig punt van VV' tot eenig punt van UU' uitstrekt, een buigpunt moet hebben. Deze buigpunten worden blijkens (3) gevonden door te stellen

$$-\frac{ab^2}{x^4}\,Sin.\frac{b}{x}+\frac{2ab}{x^3}\,Cos.\frac{b}{x}=0,$$

en de eindige waarden van x op te sporen, welke aan deze vergelijking voldoen. Uit dezelve volgt onmiddellijk

$$\left.\begin{array}{rl} & Cot.\frac{b}{x}=\frac{1}{2}.\frac{b}{x},\ \ldots\ldots \\ \text{of} & Cot.\frac{m\pi}{x}=\frac{1}{2}.\frac{m\pi}{x};\ \ldots\ldots \end{array}\right\}(5)$$

zoodat het vinden der buigpunten teruggebragt is tot het vinden van de bogen, welker helften gelijk zijn aan hunne cotangenten. Uit (5) volgt

$$Cos.\frac{b}{x}=\frac{b}{\sqrt{(b^2+4x^2)}}\text{ en }Sin.\frac{b}{x}=\frac{2x}{\sqrt{(b^2+4x^2)}},$$

en door substitutie dezer waarden gaat (4) over in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^3}=\frac{ab^2(b^2+6x^2)}{x^6\sqrt{(b^2+4x^2)}},$$

waaruit blijkt, dat het derde differentiaalquotiënt, voor de waarden van x, die aan de vergelijking (5) voldoen, noch 0, noch ∞ wordt, en dat alzoo die waarden van x werkelijk buigpunten aanwijzen.

In het eerste, derde, vijfde cirkelkwadrant, en in het algemeen in elk kwadrant van onevenen rang, kan een boog $\frac{m\pi}{x}$ gevonden worden, welke aan de vergelijking (5) voldoet; deze bogen zijn, in graden en minuten, nagenoeg de bogen van 61°54', 208°46', 376°55', 551°44', 728°56', *enz.* Neemt men dien boog uit het eerste kwadrant, dan vindt men, voor de overeenkomstige waarde van x, nagenoeg $x=2{,}9m$; waardoor het buigpunt P, in den van B' af oneindig voortloopenden tak, wordt aangewezen. Neemt men dien boog uit een der andere kwadranten, zoo vindt men:

Digitized by Google

voor het 3de, x tusschen m en $\frac{2}{3}m$, of tusschen OB en A'C';
voor het 5de, x » $\frac{1}{2}m$ en $\frac{2}{5}m$, of » OC en AD';
voor het 7de, x » $\frac{1}{3}m$ en $\frac{2}{7}m$, of » OD en A'E';
voor het 9de, x » $\frac{1}{4}m$ en $\frac{2}{9}m$, of » OE en AF';
enz. *enz.*;

door al welke waarden nu de bestaande buigpunten Q, R, S, T, *enz.*, worden aangewezen.

Substitueren wij de differentiaalquotiënten (2) en (3) in de algemeene formule

$$R = -\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

zoo vinden wij, voor den kromtestraal onzer kromme,

$$R = \frac{\sqrt{\left\{x^4 + a^2b^2 Cos.^2 \frac{b}{x}\right\}^3}}{abx^2\left\{bSin.\frac{b}{x} - 2xCos.\frac{b}{x}\right\}}; \quad \ldots \quad (6)$$

wordende in de buigpunten P, Q, R, S, *enz.* deze kromtestraal oneindig groot.

Voor $y = 0$, is $Sin.\frac{b}{x} = 0$ en $Cos.\frac{b}{x} = \pm 1$; dus

$$R = \pm\frac{\sqrt{(x^4 + a^2b^2)^3}}{2abx^3};$$

deze formule, waarin dan $x = OB = m$, $x = OC = \frac{1}{2}m$, $x = OD = \frac{1}{3}m$, *enz.* moet genomen worden, geeft de hoegrootheid der kromtestralen voor de punten B, C, D, *enz.*; zullende men voor deze achtervolgende punten bij afwisseling het bovenste en onderste teeken moeten gebruiken. Voor deze opvolgende waarden van x, wordt R steeds grooter en al spoedig zeer groot; zoodat de deelen der kromme tot AA' naderende, meer en meer regt schijnen zullen.

Voor $y = a$, is $Sin.\frac{b}{x} = 1$, en $Cos.\frac{b}{x} = 0$, dus volgens (6)

$$R = \frac{x^4}{ab^2};$$

Digitized by Google

deze formule, waarin nu $x = AB' = 2m$, $x = AD' = \frac{2}{5}m$, $x = AF' = \frac{2}{9}m$, *enz.*, genomen moet worden, geeft de hoegrootheid der kromtestralen voor de punten B', D', F', *enz.*

Voor $y = -a$, is *Sin.* $\frac{b}{x} = -1$ en *Cos.* $\frac{b}{x} = 0$, dus

$$R = -\frac{x^4}{ab^2},$$

waarin $x = A'C' = \frac{2}{3}m$, $x = A'E' = \frac{2}{7}m$, $x = A'G' = \frac{2}{11}m$, *enz.* moet genomen worden, en waardoor dan de kromtestralen der punten C', E', G', *enz.* gevonden zijn.

Het voorgaande zal genoegzaam zijn, om den loop der voorgestelde kromme lijn te beoordeelen. Alleen willen wij nog opmerken, dat zij de projecte is van de kromme van dubbele kromming, welke ontstaat zoo men eene gelijkzijdige hyperbool met haar vlak om eenen gewonen cilinder windt, wiens straal gelijk *a* is. Hierbij moet dan eene hyperbool gebezigd worden, welke $xy = b$ tot vergelijking op hare asymptoten heeft; voorts moet de eene asymptoot op het oppervlak des cilinders evenwijdig aan deszelfs as gelegd, en de andere asymptoot om den cirkel gewonden worden, dien men als het grondvlak des cilinders kan aanmerken; terwijl eindelijk de projectie genomen moet worden op het platte vlak, dat den cilinder volgens de eerstgenoemde asymptoot der hyperbool raakt, of op een daarmede evenwijdig vlak.

LXI. Voorstel.

Door G. L. Kepper.

Wanneer men van een zeker getal weet, dat het aantal van al deszelfs deelers (de eenheid en het getal zelve mede als deelers beschouwende) oneven is, en dat de som der twee grootste deelers 864 is, welk kan dan het bedoelde getal zijn?

Opgelost *door* G. L. Kepper, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. S. Speijer, R. van de Weerd, J. H. van Kooten, P. Krom *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* G. L. Kepper.

Elke ontbinding van een getal, in twee onderling ongelijke factoren, leert twee deelers van dat getal kennen; de ontbinding van een getal, in twee onderling gelijke factoren,

Digitized by Google

levert echter slechts éénen deeler van hetzelve op; maar alleen de kwadraatgetallen laten eene ontbinding in twee onderling gelijke factoren toe, en derhalve kunnen ook alleen kwadraatgetallen een oneven aantal deelers hebben.

Het gevraagde getal zal dus vooreerst een kwadraatgetal moeten wezen. Stellen wij hetzelve door x^2, en deszelfs deeler, in grootte het naast aan x^2 komende, door y voor, dan hebben wij de vergelijking

$$x^2 + y = 864 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin

$$x^2 > y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zal moeten wezen.

Uit (1) volgt onmiddellijk, dat men moet hebben

$$x^2 < 864 \text{ of } x < 30;$$

uit verbinding van (1) met (2) volgt desgelijks, dat men moet hebben

$$2x^2 > 864 \text{ of } x > 20;$$

de eenige waarden van x, welke tusschen deze grenzen vallen, zijn:

$$x = 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 \text{ en } 29;$$

waarmede dan blijkens (1) voor x^2 en y overeenstemmen de waarden:

$$x^2 = 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784 \text{ en } 841;$$
$$y = 423, 380, 335, 288, 239, 188, 135, 80 \text{ en } 23;$$

daar nu y een deeler van x^2 moet zijn, en van de bovenstaande waarden alleen $x^2 = 576$ door de overeenkomstige $y = 288$ deelbaar is, is ook 576 het gevraagde getal.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Indien men het voorstel oplost, met weglating der voorwaarde dat het aantal deelers oneven is, vindt men hetzelfde getal 576; die voorwaarde is alzoo een gevolg van de andere, en dus als overtollig aan te merken. Zij namelijk x de kleinste deeler die op de eenheid volgt, en y de grootste deeler die aan het getal zelve voorafgaat, dan is xy het begeerde getal, en men heeft de vergelijking

$$xy + y = 864 \text{ of } (x + 1)y = 864,$$

waarin x grooter dan 1, maar overigens zoo klein mogelijk moet zijn. Hieruit volgt, dat $x + 1$ grooter dan 2, maar overigens de kleinste deeler van 864 moet wezen; alzoo is

$$x + 1 = 3,\ x = 2,\ y = \frac{864}{x+1} = 288 \text{ en } xy = 576.$$

Digitized by Google

LXII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Er zijn vijf getallen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken. Het gedurig product van het 2de, 3de en 4de getal, is 1053 *kleiner dan driemaal de derde magt van het 1ste getal. Zoo nu het 2de getal tot het 3de plus* 3 *staat, gelijk het 3de getal min* 3 *staat tot het vierde, begeert men deze rekenkunstige reeks te vinden.*

Opgelost *door* J. B. Gebl, J. A. Hanken, J. Heemskerk, Az., J. H. van Kooten, P. Krom, H. Middelburg, J. S. Speijer, J. A. Stamkart *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. B. Gebl.

Laat de begeerde reeks voorgesteld worden door

$$x - 2y,\ x - y,\ x,\ x + y \text{ en } x + 2y,$$

dan is $x(x^2 - y^2) = 3(x - 2y)^3 - 1053, \ldots$ (1)

en $x - y : x + 3 = x - 3 : x + y. \ldots$ (2)

Uit (2) volgt onmiddellijk

$$x^2 - y^2 = x^2 - 9;$$

dus $y^2 = 9$ en $y = \pm 3$.

In de eerste plaats $y = +3$ nemende, gaat de vergelijking (1) over in

$$x(x^2 - 9) = 3(x - 6)^3 - 1053;$$

zij wordt alsdan na behoorlijke herleiding

$$2x^3 - 54x^2 + 333x - 1701 = 0,$$

en $x = \frac{3z}{2}$ stellende,

$$z^3 - 18z^2 + 74z - 252 = 0$$

of $(z - 14)(z^2 - 4z + 18) = 0,$

waaruit gevonden wordt

$$z = 14 \text{ en } z = 2 \pm \sqrt{-14};$$

hiermede stemt overeen

$$x = 21 \text{ en } x = 3 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-14},$$

en wij hebben dus voor de gevraagde reeks:

1°. 15, 18, 21, 24, 27;

2°. $-3+\frac{3}{2}\sqrt{-14}, \frac{3}{2}\sqrt{-14}, 3+\frac{3}{2}\sqrt{-14}, 6+\frac{3}{2}\sqrt{-14}, 9+\frac{3}{2}\sqrt{-14}$;

3°. $-3-\frac{3}{2}\sqrt{-14}, -\frac{3}{2}\sqrt{-14}, 3-\frac{3}{2}\sqrt{-14}, 6-\frac{3}{2}\sqrt{-14}, 9-\frac{3}{2}\sqrt{-14}$.

In de tweede plaats $y = -3$ nemende, wordt de vergelijking (1)

Digitized by Google

$$x(x^2 - 9) = 3(x + 6)^3 - 1053;$$

dat is, na behoorlijke herleiding,

$$2x^3 + 54x^2 + 333x - 405 = 0,$$

en $x = \frac{3z}{2}$ stellende

$$z^3 + 18z^2 + 74z - 60 = 0$$

of $$(z + 10)(z^2 + 8z - 6) = 0,$$

waaruit gevonden wordt

$$z = -10 \text{ en } z = -4 \pm \sqrt{22};$$

hiermede stemt overeen

$$x = -15 \text{ en } x = -6 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{22},$$

en wij hebben dus voor de gevraagde reeks almede:

4°. $-9, \quad -12, \quad -15, \quad -18, \quad -21;$

5°. $\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -3+\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -6+\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -9+\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -12+\tfrac{3}{2}\sqrt{22};$

6°. $-\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -3-\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -6-\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -9-\tfrac{3}{2}\sqrt{22}, -12-\tfrac{3}{2}\sqrt{22}.$

Er zijn dus in het geheel zes antwoorden op de vraag, waarvan echter slechts het eerste in aanmerking komt, indien men positieve en meetbare getallen begeert.

LXIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Vijf getallen te vinden, zoodanig, dat indien men de derde magten van elk dezer getallen door de som van al die getallen deelt, de respectieve quotiënten 1, 3, 5, 7 en 9 zijn.

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, J. B. Geel, P. Krom, J. A. Stamkart *en* R. van de Weerd.

I. Oplossing *van* J. A. Hansen.

De te vinden getallen door x, y, z, v, w, en derzelver som door s voorstellende, moet men hebben:

$$\frac{x^3}{s} = 1, \text{ dus } x^3 = s, \text{ en } x = \sqrt[3]{s};$$

$$\frac{y^3}{s} = 3, \text{ " } y^3 = 3s, \text{ " } y = \sqrt[3]{3s};$$

$$\frac{z^3}{s} = 5, \text{ " } z^3 = 5s, \text{ " } z = \sqrt[3]{5s};$$

$$\frac{v^3}{s} = 7, \text{ " } v^3 = 7s, \text{ " } v = \sqrt[3]{7s};$$

$$\frac{w^3}{s} = 9, \text{ " } w^3 = 9s, \text{ " } w = \sqrt[3]{9s}.$$

Digitized by Google

Daar $x + y + z + v + w = s$ is, volgt hieruit terstond

$$s = \sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{3s} + \sqrt[3]{5s} + \sqrt[3]{7s} + \sqrt[3]{9s},$$

dat is, na deeling door $\sqrt[3]{s}$,

$$\sqrt[3]{s^2} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9},$$

en hieruit den vierkantswortel nemende, komt er, omdat $x = \sqrt[3]{s}$ is, onmiddellijk

$$x = \sqrt{\{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9}\}};$$

zijnde dan verder $y = x\sqrt[3]{3}$, $z = x\sqrt[3]{5}$, $v = x\sqrt[3]{7}$ en $w = x\sqrt[3]{9}$.

II. Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

De begeerde getallen zijn, blijkens de voorgaande oplossing, onmeetbaar, indien men verlangt, dat 1, 3, 5, *enz.* de volkomene quotiënten der deelingen zijn. Men kan echter verlangen meetbare getallen te vinden, die aan de vraag voldoen, onder beding, dat er bij de deelingen, wel de geheele getallen 1, 3, 5, *enz.* tot quotiënten komen, maar dat daarbij tevens nog resten kleiner dan de deeler mogen overblijven.

Om het voorstel in deze onderstelling op te lossen, hebben wij, door a, b, c, d en e positieve getallenwaarden kleiner dan de eenheid voorstellende,

$$\frac{x^3}{s} = 1 + a, \text{ en dus } x = \sqrt[3]{s(1+a)};$$

$$\frac{y^3}{s} = 3 + b, \quad \text{»} \quad y = \sqrt[3]{s(3+b)};$$

$$\frac{z^3}{s} = 5 + c, \quad \text{»} \quad z = \sqrt[3]{s(5+c)};$$

$$\frac{v^3}{s} = 7 + d, \quad \text{»} \quad v = \sqrt[3]{s(7+d)};$$

$$\frac{w^3}{s} = 9 + e, \quad \text{»} \quad w = \sqrt[3]{s(9+e)};$$

hieruit volgt dan:

$$s = \sqrt[3]{s(1+a)} + \sqrt[3]{s(3+b)} + \sqrt[3]{s(5+c)} + \sqrt[3]{s(7+d)} + \sqrt[3]{s(9+e)},$$

of

$$\sqrt[3]{s^2} = \sqrt[3]{(1+a)} + \sqrt[3]{(3+b)} + \sqrt[3]{(5+c)} + \sqrt[3]{(7+d)} + \sqrt[3]{(9+e)}.$$

Stellen wij dus ter bekorting

$$\sqrt[3]{(1+a)} + \sqrt[3]{(3+b)} + \sqrt[3]{(5+c)} + \sqrt[3]{(7+d)} + \sqrt[3]{(9+e)} = A^2, \ldots\ldots (1)$$

dan hebben wij $\sqrt[3]{s^2} = A^2$, $\sqrt[3]{s} = A$, en bijgevolg

Digitized by Google

$x = A\sqrt[3]{(1+a)}$, $y = A\sqrt[3]{(3+b)}$, $z = A\sqrt[3]{(5+c)}$, $v = A\sqrt[3]{(7+d)}$ en $w = A\sqrt[3]{(9+e)}$; . . . (2)
zoodat nu alle meetbare waarden, welke men voor x, y, z, v en w verkrijgen kan, door in de vormen (1) en (2) aan a, b, c, d en e positieve waarden kleiner dan de eenheid toe te kennen, aan de vraag zullen beantwoorden. De hiertoe vereischte waarden van a, b, *enz.* zullen altijd meetbaar zijn, zoo als uit de vergelijkingen $\frac{x^3}{z} = 1 + a$, $\frac{y^3}{z} = 3 + b$, *enz.* blijkt; maar A, $\sqrt[3]{(1+a)}$, $\sqrt[3]{(3+b)}$, *enz.* mogen zeer wel onmeetbaar zijn, indien zij slechts meetbare producten $A\sqrt[3]{(1+a)}$, $A\sqrt[3]{(3+b)}$, *enz.* opleveren.

Wij zullen ons niet ophouden, met het opsporen der waarden kleiner dan 1, welke men aan a, b, *enz.* moet geven, om voor de onbekenden meetbare getallen te verkrijgen. In plaats daarvan merken wij op, dat de onmeetbare waarden, welke men voor de onbekenden verkrijgt, door a, b, c, *enz.*, òf alle gelijk 0, òf alle gelijk 1 te nemen, noodwendig grenzen zijn, waartusschen de begeerde meetbare waarden der onbekenden moeten vallen. Gemakshalve $\sqrt{\{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{9}\}} = P$ en $\sqrt{\{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{10}\}} = Q$ stellende, blijkt dan, dat men zal moeten hebben:

$$\left.\begin{array}{llllllll} x > P\sqrt[3]{1} & \text{en} & < Q\sqrt[3]{2}, & \text{of} & x > 2{,}854 & \text{en} & < 3{,}742; \\ y > P\sqrt[3]{3} & \text{en} & < Q\sqrt[3]{4}, & \text{»} & y > 4{,}116 & \text{en} & < 4{,}714; \\ z > P\sqrt[3]{5} & \text{en} & < Q\sqrt[3]{6}. & \text{»} & z > 4{,}880 & \text{en} & < 5{,}396; \\ v > P\sqrt[3]{7} & \text{en} & < Q\sqrt[3]{8}, & \text{»} & v > 5{,}460 & \text{en} & < 5{,}939; \\ w > P\sqrt[3]{9} & \text{en} & < Q\sqrt[3]{10}, & \text{»} & w > 5{,}936 & \text{en} & < 6{,}298. \end{array}\right\} \quad . . . . . \quad (3)$$

Het is echter niet voldoende, tusschen deze grenzen willekeurige waarden voor al de onbekenden te nemen. Want neemt men voor ééne onbekende eene waarde zeer digt bij de kleinste grens, dan zal daaruit volgen, dat de waarden van a, b, c, *enz.* alle zeer digt bij 0 komen; en neemt men tevens voor eene andere onbe-

Digitized by Google

kende eene waarde zeer digt bij de grootste grens, zoo zal daaruit volgen, dat de waarden van a, b, c, enz. alle zeer digt bij 1 komen; hetgeen blijkbaar met elkander strijdt. Neemt men dus eene onbekende willekeurig tusschen de gevondene grenzen, dan worden daardoor de grenzen, waartusschen de overige genomen moeten worden, vernaauwd.

Uit (2) volgt de aaneengeschakelde evenredigheid:

$$x : y : z : v : w =$$

$$\sqrt[3]{(1+a)} : \sqrt[3]{(3+b)} : \sqrt[3]{(5+c)} : \sqrt[3]{(7+d)} : \sqrt[3]{(9+e)} \ldots (4)$$

en het zal dus ook noodig zijn, voor de onbekenden zulke waarden te nemen, dat in deze verhoudingen, de waarden van a, b, c, enz. alle tusschen 0 en 1 kunnen vallen tan zij sommige gelijk nul mogten genomen worden.

Neemt men echter voor de onbekenden, waarden tusschen de grenzen (3), en zoodanig, dat derzelver verhoudingen toelaten, dat in (4) de waarden van a, b, c, d en e alle positief en kleiner dan 1 zijn, dan zullen deze waarden aan de vraag voldoen.

Indien wij b. v. nemen:

$$x = 3,\ y = 4\tfrac{1}{3},\ z = 5,\ v = 5\tfrac{2}{3} \text{ en } w = 6,$$

zijn de beide genoemde voorwaarden vervuld; alsdan is $s = 24$, en wij hebben dan ook:

$$\frac{x^3}{s} = \frac{27}{24} = 1\ \tfrac{1}{8},$$

$$\frac{y^3}{s} = \frac{81\frac{10}{27}}{24} = 3\ \tfrac{25}{648},$$

$$\frac{z^3}{s} = \frac{125}{24} = 5\ \tfrac{5}{24},$$

$$\frac{v^3}{s} = \frac{181\frac{26}{27}}{24} = 7\ \tfrac{377}{648},$$

$$\frac{w^3}{s} = \frac{216}{24} = 9;$$

zoodat nu de bedoelde deelingen, werkelijk de geheele getallen 1, 3, 5, 7 en 9 tot quotiënten opleveren, maar bovendien de vier eerste deelingen resten kleiner dan de deeler laten overblijven.

Digitized by Google

LXIV. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Welke zijn de drie getallen, welker som 33 is, en van welke de som der vierkanten 425 bedraagt?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., J. B. Grel, J. H. van Kooten, R. van de Weerd *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Onder de drie begeerde getallen is er zeker één, dat grooter dan het derde gedeelte van hunne gegevene som is, en wij kunnen dus dit getal door $x + 11$ voorstellen; stellen wij voorts van de beide anderen het kleinste door y, en het grootste door $y + z$ voor, dan hebben wij de vergelijkingen

$$(x + 11) + y + (y + z) = 33 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$(x + 11)^2 + y^2 + (y + z)^2 = 425, \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin x, y en z alle positief zijn.

Uit (1) volgt $$2y + z = 22 - x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en uit (2) $$2y^2 + 2yx + x^2 = 304 - 22x - x^2; \quad . \quad . \quad (4)$$

deze laatste vergelijking met 2 vermenigvuldigende, en er vervolgens het vierkant der vergelijking (3) aftrekkende, komt er

$$z^2 = 124 - 3x^2$$

of $$z = \sqrt{(124 - 3x^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waaruit blijkt, dat $124 - 3x^2$ een volkomen vierkant moet wezen.

Begeert men nu een antwoord in geheele getallen, dan kan men hiertoe voor x geene andere waarden nemen, dan $x = 1$, $x = 5$ of $x = 6$.

Voor $x = 1$, wordt $z = 11$, terwijl dan uit (3) volgt $y = 11 - \frac{1}{2}(x + z) = 5$; de begeerde getallen $x + 11$, y en $y + z$ zijn dus in dit geval 12, 5 en 16.

Voor $x = 5$, wordt $z = 7$ en $y = 5$, zoodat men dan voor de begeerde getallen wederom de voorgaande waarden, in eene omgekeerde volgorde, verkrijgt.

Voor $x = 6$, wordt $z = 4$ en $y = 6$, waardoor men voor de gevraagde getallen ook nog vindt: 17, 6 en 10.

Meer dan deze beide antwoorden op de vraag, kunnen in geheele getallen niet gevonden worden.

Digitized by Google

Begeert men echter een antwoord in rationale gebrokens, dan kan men voor x elke meetbare waarde nemen, welke de uitdrukking $124 - 3x^2$ tot een volkomen vierkant maakt. Om deze waarden van x te vinden, kan men stellen

$$\sqrt{(124 - 3x^2)} = 11 - m(x - 1);$$

dan volgt hieruit

$$124 - 3x^2 = 121 - 22m(x - 1) + m^2(x - 1)^2,$$

dat is $m^2(x - 1)^2 - 22m(x - 1) + 3(x^2 - 1) = 0.$

of na deeling door $x - 1$

$$m^2(x - 1) - 22m + 3(x + 1) = 0,$$

waaruit dadelijk gevonden wordt:

$$x = \frac{m^2 + 22m - 3}{m^2 + 3},$$

$$z = \sqrt{(124 - 3x^2)} = \frac{-11m^2 + 6m + 33}{m^2 + 3},$$

$$y = 11 - \tfrac{1}{2}(x + z) = \frac{16m^2 - 14m + 18}{m^2 + 3},$$

$$x + 11 = \frac{12m^2 + 22m + 30}{m^2 + 3},$$

en

$$y + z = \frac{5m^2 - 8m + 51}{m^2 + 3};$$

alzoo zijn dan

$$\frac{12m^2+22m+30}{m^2+3}, \quad \frac{16m^2-14m+18}{m^2+3} \quad \text{en} \quad \frac{5m^2-8m+51}{m^2+3},$$

voor alle willekeurige waarden van m, getallen die aan de vraag voldoen; mits men slechts m zoodanig neme, dat men positieve getallen vindt.

Voor $m = 0$ en $m = 1$, verkrijgt men de bovengevondene antwoorden in geheele getallen. Voor $m = 2$, verkrijgt men tot een antwoord in gebrokens: $17\frac{3}{7}$, $7\frac{5}{7}$ en $7\frac{6}{7}$.

LXV. Voorstel.

Door P. Krom.

Vier getallen te vinden, welke eene gewone evenredigheid uitmaken, zoodanig, dat de som der termen het getal is, waardoor de inhoud van eenen driehoek wordt aangewezen, welke zijden 8, 15 en 17 zijn; dat de som van de vierkanten der termen 2 minder is, dan 9 maal het product der beide uiterste of middelste termen; en dat het gedurig product der termen 19600 is.

Digitized by Google

Opgelost *door* P. Krom, J. S. Spruijt, J. B. Geel, J. H. van Kooten, H. Middelburg, J. A. Stamkart, R. van de Weerd, J. A. Hansen *en* J. Heemskerkerk, Az.

Oplossing *van* P. Krom.

De driehoek, welks zijden 8, 15 en 17 zijn, is regthoekig, omdat $8^2 + 15^2 = 17^2$ is; de inhoud van dien driehoek wordt alzoo door het halve product der regthoekszijden, dat is door $\frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$, uitgedrukt.

Stellen wij dus de gevraagde getallen door x, y, z en w voor, zoo hebben wij de vergelijkingen:

$$xw = yz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x + y + z + w = 60, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2 = 9xw = 9yz, \quad . \quad (3)$$

en

$$xyzw = 19600. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De vergelijkingen (1) en (4) met elkander verbindende, vinden wij dadelijk

$$x^2w^2 = y^2z^2 = 19600,$$

en dus is

$$xw = yz = \sqrt{19600} = 140; \quad \ldots \quad (5)$$

kunnende de waarde van xw of yz niet negatief genomen worden, omdat hierdoor volgens (3) de som van de vierkanten der termen negatief zou worden, hetgeen onbestaanbaar is. De vergelijking (3) gaat dan door substitutie der waarde (5) over in

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1258. \quad \ldots \quad (6)$$

Indien men nu de vergelijking (2) in het vierkant brengt, hiervan de vergelijking (6) aftrekt, en de overblijvende vergelijking door 2 deelt, bekomt men

$$xy + xz + xw + yz + yw + zw = 1171,$$

of, na voor xw en yz de waarden (5) gesubstitueerd te hebben,

$$xy + xz + yw + zw = 891,$$

dat is

$$(x + w)(y + z) = 891. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Van $x + w$ en $y + z$ is dan door (2) de som, en door (7) het product bekend, zoodat men daaruit op de gewone wijze vindt

$$\left.\begin{array}{l} x + w = 33 \text{ en } y + z = 27 \\ \text{of} \quad x + w = 27 \text{ en } y + z = 33 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Van x en w, alsmede van y en z, is nu door (8) de som en door (5) het product bekend; op dezelfde wijze

Digitized by Google

vindt men dan daaruit ook weder: zoo men $x + w = 33$ en $y + z = 27$ neemt,

$x = 28$ en $w = 5$ of $x = 5$ en $w = 28$;
$y = 20$ en $z = 7$ of $y = 7$ en $z = 20$;

of zoo men $x + w = 27$ en $y + z = 33$ neemt,

$x = 20$ en $w = 7$ of $x = 7$ en $w = 20$;
$y = 28$ en $z = 5$ of $y = 5$ en $z = 28$.

De vier gevraagde getallen zijn dus: 5, 7, 20 en 28. De volgorde, waarin zij eene gewone evenredigheid uitmaken, is in zoo verre geheel willekeurig, dat slechts de producten der uiterste en middelste termen gelijk aan 140 behoeven te wezen.

LXVI. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Men vraagt eenen regthoekigen driehoek te construeren, als gegeven zijn: eene regthoekszijde, en het afliggende segment, dat van de hypothenusa, door eene loodlijn uit den regten hoek op dezelve nedergelaten, wordt afgesneden.

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Sprijer, J. B. Geel, H. Middelburg, R. van de Weerd *en* P. Krom.

I. Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laat de gegevene regthoekszijde door a, en het gegevene afliggende segment der hypothenusa door b voorgesteld worden. Op eene onbepaalde regte lijn (Fig. 43), neme men dan $AB = b$ en deele deze middendoor in C; voorts stelle men, loodregt op AB, de lijn $BD = a$, en beschrijve uit C met CD als straal eenen cirkelboog, die de onbepaalde regte lijn naar de zijde van BD snijdt in E; eindelijk beschrijve men op AE als middellijn eenen halven cirkel, die BD snijdt in F, en trekke de lijnen AF en EF, dan is AEF de begeerde driehoek.

Want men heeft:

$$EC^2 = CD^2 = BD^2 + BC^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2,$$

dus

$$EC^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2 = a^2,$$

$$EC + \tfrac{1}{2}b : a = a : EC - \tfrac{1}{2}b,$$

of

$$AE : a = a : BE.$$

Maar daar de driehoek AEF, als in een halven cirkel staande, regthoekig in F is, is ook

$$AE : EF = EF : BE.$$

Digitized by Google

Uit deze evenredigheid, vergeleken met de laatstvoorgaande, blijkt dat $EF = a$ is, terwijl door de constructie $AB = b$ is, en AFE een regte hoek. De driehoek AFE voldoet alzoo aan het gevraagde.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien ABC (Fig. 44) de begeerde driehoek is, waarin men, BD loodregt op AC getrokken zijnde, als gegevens heeft $AB = a$ en $CD = b$, zoo stelle men $AC = x$, waardoor $AD = x - b$ is. Volgens eene bekende eigenschap der regthoekige driehoeken is

$$AD \times AC = AB^2 \text{ of } (x - b)x = a^2,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)};$$

zijnde hier, omdat $AC > AB$ of $x > a$ moet zijn, alleen

$$x = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}.$$

Hieruit vloeit nu de volgende eenvoudige constructie voort.

Op de beenen van eenen regten hoek B, neme men $AB = a$ en $BE = \tfrac{1}{2}b$; trekke AE, en na deze verlengd te hebben, zoodanig, dat $EF = EB$ is, beschrijve men uit A met AF als straal eenen cirkelboog, BC snijdende in C. Na dan AC getrokken te hebben, is ABC de begeerde driehoek, want door deze constructie is $AE^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$ en $AC = AF = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}$.

LXVII. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Op eene regte lijn AB ***genomen zijnde een deel*** AC (Fig. 45), ***heeft men op*** AB ***en*** AC ***als middellijnen halve cirkels beschreven; en wel aan denzelfden kant van de lijn*** ACB. ***Verder heeft men tusschen deze halve omtrekken twee andere cirkels beschreven, die zoowel elkander als de beide eerstgenoemde cirkels raken. Indien nu de stralen der beide laatstbeschrevene cirkels gegeven zijn, wil men daaruit de onderlinge betrekking bepalen der loodlijnen, uit hunne middelpunten op*** AB ***nedergelaten; onafhankelijk van de grootte der middellijnen*** AB ***en*** AC.

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* J. A. Hansen.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laten D en E de middelpunten zijn van de halve cirkels op AB en AC beschreven. Indien dan F en G de middel-

Digitized by Google

punten zijn van de cirkels, die elkander en de beide halve omtrekken raken, zullen wij de betrekking moeten vinden van de loodlijnen FL en GM, die uit deze punten op AB nedergelaten zijn.

Daartoe stellen wij FL $=y$, GM $=y'$, voorts AL $=x$ en AM $=x'$. Na dan de vier middelpunten op alle mogelijke wijzen door regte lijnen DG, DF, EG, EF en FG vereenigd te hebben, welke regte lijnen, gelijk bekend is, zoo noodig verlengd zijnde, door de raakpunten P, I, Q, R en H gaan, stellen wij nog AD $=r$, AE $=m$, en nemen als gegevens aan FR $=a$ en GH $=b$.

Uit de regthoekige driehoeken DLF en ELF, volgt nu

$$FL^2 = DF^2 - DL^2 \quad \text{en} \quad FL^2 = EF^2 - EL^2;$$

dat is:

$$y^2 = (r-a)^2-(x-r)^2 = (x-a)(2r-x-a)$$

en $$y^2 = (m+a)^2-(x-m)^2 = (x+a)(2m-x+a);$$

hierdoor hebben wij dan de vergelijking

$$(x-a)(2r-x-a) = (x+a)(2m-x+a),$$

uit welke, door x af te zonderen, gemakkelijk gevonden wordt

$$x = \frac{a(r+m)}{r-m}; \quad \ldots\ldots\ (1)$$

en deze waarde van x, in eene der bovenstaande waarden van y^2 overbrengende, komt er na herleiding

$$y^2 = \frac{4arm(r-m-a)}{(r-m)^2}. \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Uit de regthoekige driehoeken DMG en EMG volgt desgelijks:

$$GM^2 = DG^2 - DM^2, \quad GM^2 = EG^2 - EM^2,$$

$$y'^2 = (r-b)^2-(x'-r)^2 = (x'-b)(2r-x'-b),$$

$$y'^2 = (m+b)^2-(x'-m)^2 = (x'+b)(2m-x'+b),$$

$$x' = \frac{b(r+m)}{r-m}, \quad \ldots\ldots\ (3)$$

en $$y'^2 = \frac{4brm(r-m-b)}{(r-m)^2}. \quad \ldots\ldots\ (4)$$

De middelpunten F en G zijn nu genoegzaam bepaald, indien behalve de stralen a en b ook de stralen r en m gegeven zijn. Daar er echter naar eene onderlinge betrekking van y en y' onafhankelijk van de waarden van r en m ge-

Digitized by Google

vraagd wordt, zullen wij ter verdrijving van r en m nog gebruik moeten maken van de voorwaarde, dat ook de cirkels IOR en PHQ elkander raken. Trekken wij te dien einde FN evenwijdig met AB, dan is GN $= y' - y$, FN $= x - x'$ en FG $= a + b$, zoodat uit den regthoekigen driehoek FNG volgt

$$(y' - y)^2 + (x - x')^2 = (a + b)^2;$$

maar volgens (1) en (3) is

$$x - x' = \frac{(a - b)(r + m)}{r - m}$$

en dus

$$(x-x')^2 = (a-b)^2\left(\frac{r+m}{r-m}\right)^2 = (a-b)^2\left\{1 + \frac{4rm}{(r-m)^2}\right\},$$

waardoor wij verkrijgen

$$(y'-y)^2 + (a-b)^2 + \frac{4rm(a-b)^2}{(r-m)^2} = (a+b)^2$$

of $$(y'-y)^2 + \frac{4rm(a-b)^2}{(r-m)^2} = 4ab.$$

Om nu ook den tweeden term dezer vergelijking van r en m te bevrijden, hebben wij uit (2) en (4)

$$\frac{y^2}{a} = \frac{4rm(r-m-a)}{(r-m)^2} \quad \text{en} \quad \frac{y'^2}{b} = \frac{4rm(r-m-b)}{(r-m)^2},$$

waaruit door aftrekking volgt

$$\frac{y'^2}{b} - \frac{y^2}{a} = \frac{4rm(a-b)}{(r-m)^2},$$

zoodat dan de voorgaande vergelijking wordt

$$(y'-y)^2 + (a-b)\left\{\frac{y'^2}{b} - \frac{y^2}{a}\right\} = 4ab,$$

of na verdrijving der breuken

$$ab(y'-y)^2 + (a-b)(ay'^2-by^2) = 4a^2b^2,$$

en na ontwikkeling

$$a^2y'^2 - 2aby'y + b^2y^2 = 4a^2b^2.$$

Het voorste lid een volkomen vierkant zijnde, hebben wij dus eindelijk

$$ay' - by = 2ab, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

waardoor dan de gevraagde betrekking wordt aangewezen.

Aanmerkingen. 1°. Voor de vergelijking (5) schrijven wij alleen $ay' - by = 2ab$ en niet $ay' - by = \pm 2ab$, want het is gemakkelijk in te zien, dat ay' altijd grooter

Digitized by Google

dan by is. Immers daar de raking boven AB moet plaats hebben, is $a > b$. Door nu de vergelijkingen (2) en (4) in elkander te deelen, komt er

$$\frac{a^2y'^2}{b^2y^2} = \frac{a(r-m-b)}{b(r-m-a)};$$

maar met $a > b$ stemt overeen $r - m - b > r - m - a$, dus is ook $a(r-m-b) > b(r-m-a)$ en alzoo $a^2y'^2 > b^2y^2$ of $ay' > by$.

2°. De vergelijking (5) gaat door middel van (2) en (4) over in

$$a\sqrt{brm}(r-m-b) - b\sqrt{arm}(r-m-a) = (r-m)ab;$$

hieruit de wortelteekens verdrijvende, zal men, na behoorlijke herleiding, de volgende regelmatige vergelijking verkrijgen:

$$\{a^2b^2 + a^2m^2 + b^2m^2 - 2abm(a+b+m)\}r^2 + 2abm(ab + am + bm)r + a^2b^2m^2 = 0,$$

waardoor de onderlinge betrekking der vier stralen wordt aangewezen; dat is, van de stralen van vier cirkels, waarvan er drie elkander raken, terwijl de vierde elk der drie overigen aanraakt. De beide waarden, die men uit deze vergelijking voor r zou verkrijgen, indien m, a en b gegeven waren, komen overeen met de beide cirkels, waarvan de eene, zoo als in de figuur, de drie overigen inwendig raakt, terwijl de andere hen uitwendig zou raken.

3°. Uit de waarde, die wij het eerst voor y^2 gevonden hebben, namelijk uit de vergelijking

$$y^2 = (x-a)(2r-x-a),$$

volgt, dat de meetkunstige plaats van de middelpunten der cirkels, die de beide op AB en AC als middellijnen beschrevene cirkels raken, eene ellips is, waarvan de groote as zich van het punt A tot aan het midden van BC uitstrekt. Dit wordt uit de figuur bevestigd; want wij hebben $EF + DF = (m+a) + (r-a) =$

Digitized by Google

$r + m$ en ook EG + DG $= (m + b) + (r - b) = r + m$. De punten E en D zijn alzoo de brandpunten.

4°. Voor de vergelijking (5) kunnen wij ook schrijven

$$ay' - ab = by + ab,$$

of $$a(y' - b) = b(y + a);$$

hieruit volgt

$$y + a : y' - b = a : b, \quad \ldots \quad (6)$$

dat is, indien wij, na FL verlengd te hebben, de figuur raadplegen,

$$OL : KM = a : b.$$

Nu volgt uit (1) en (3) ook $x : x' = a : b$, en wij hebben dus

$$OL : KM = x : x' \text{ of } OL : KM = AL : AM;$$

de punten O, K en A liggen alzoo in eene regte lijn.

5°. De lijn OK en dus AO moet ook door het raakpunt H gaan. Want de lijnen OL en GM evenwijdig zijnde, zijn de hoeken OFH en HGK en dus ook de bogen OH en KH gelijk; trekt men dan de koorden OH en KH, zoo maken zij met de gemeenschappelijke raaklijn ST gelijke hoeken, en liggen dus in dezelfde regte lijn AO.

6°. De laatstbewezene eigenschap zal kunnen dienen, om den vierden cirkel PQH, die de drie andere cirkels aanraakt, te construeren. Immers moet deze eigenschap ook doorgaan voor den cirkel AQC; dat is, indien wij ID verlengen en, door het punt E, UV loodregt op ID trekken, zal het raakpunt Q met de punten I en V in eene zelfde regte lijn liggen; want de cirkel AQC is dan ten opzigte van IU even zoo gelegen als de cirkel RHO ten opzigte van AB. Trekt men dus AO en VI, zoo snijden deze lijnen de cirkels OHR en AQC in de raakpunten H en Q, en men behoeft dan verder slechts uit de middelpunten F en E, door deze raakpunten H en Q, de lijnen FG en EG te trekken, om het middelpunt G en den straal GH $=$ GQ van den cirkel PQH te vinden.

7°. Eindelijk merken wij nog op, dat blijkens de uit (1) en (3) voortvloeijende evenredigheid $x : x' = a : b$, de betrekking der afstanden van de voetpunten der loodlijnen FL en GM tot het punt A, almede onafhankelijk is van de stralen r en m.

Digitized by Google

LXVIII. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Wanneer tusschen de beide halve omtrekken, in het voorgaande voorstel omschreven, eene reeks van cirkels beschreven wordt, die niet alleen deze halve omtrekken, maar ook achtervolgens elkander raken, en waarvan de eerste BC ***tot middellijn heeft, vraagt men te berekenen: de stralen dezer cirkels, de loodlijnen uit hunne middelpunten op*** AB ***vallende, en de afstanden van de voetpunten dezer loodlijnen tot het midden van de lijn*** AB. ***Gegeven zijnde*** $AC = 2m$ ***en*** $BC = 2n$.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, H. Middelburg en R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laten op AB, AC en BC (Fig. 46) halve cirkels beschreven zijn, en laten G', G'', G''', *enz.* de middelpunten wezen der in het voorstel bedoelde rakende cirkels. Stellen wij door r_1, r_2, r_3, *enz.* de stralen dezer achtervolgende cirkels voor; door y_1, y_2, y_3, *enz.* de loodlijnen, uit hunne middelpunten op AB nedergelaten; alsmede door x_1, x_2, x_3, *enz.* de afstanden, waarop de voetpunten dezer loodlijnen zich van het midden D der lijn AB bevinden, en die wij van D naar B als positief aanmerken, zoodat in onze figuur $DM' = x_1$, $G'M' = y_1$, $DM'' = -x_2$, $G''M'' = y_2$, $DM''' = -x_3$, $G'''M''' = y_3$, *enz.* is.

Indien wij nu de evenredigheid (6) van het voorgaande voorstel, te weten

$$y + a : y' - b = a : b,$$

op de rakende cirkels, die F en G' tot middelpunten hebben, willen toepassen, zullen wij $a = n$, $y = 0$, $b = r_1$ en $y' = y_1$ moeten nemen, en wij hebben dan

$$n : y_1 - r_1 = n : r_1$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$y_1 = 2r_1.$$

Om dezelfde evenredigheid vervolgens toe te passen op de cirkels, die G' en G'' tot middelpunten hebben, moeten wij $a = r_1$, $y = y_1 = 2r_1$, $b = r_2$ en $y' = y_2$ nemen, hetgeen geeft

Digitized by Google

$$3r_1 : y_2 - r_2 = r_1 : r_2,$$

waaruit $$y_2 = 4r_2$$

gevonden wordt.

Op dezelfde wijze zal men vinden: $y_3 = 6r_3$, $y_4 = 8r_4$, en in het algemeen

$$y_p = 2pr_p. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ten einde de vergelijkingen (1) en (2) van het voorgaande vraagstuk, namelijk

$$x = \frac{a(r+m)}{r-m} \quad \text{en} \quad y^2 = \frac{4arm(r-m-a)}{(r-m)^2},$$

in dit voorstel te gebruiken, moeten wij vooreerst $r = m + n$, en vervolgens in het algemeen $a = r_p$, $x = x_p + r = x_p + m + n$ en $y = y_p$ nemen. Hierdoor verkrijgen wij dan

$$x_p = \frac{2m+n}{n} r_p - (m+n), \quad \ldots \quad (2)$$

en $$y_p^2 = \frac{4m(m+n)(n-r_p)}{n^2} r_p. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Brengen wij nu de waarde van y_p, volgens (1), in (3) over, dan komt er

$$4p^2r_p^2 = \frac{4m(m+n)(n-r_p)}{n^2} r_p;$$

of, na door $4r_p$ gedeeld en met n^2 vermenigvuldigd te hebben,

$$p^2n^2r_p = m(m+n)(n-r_p),$$

en hieruit wordt dan onmiddellijk gevonden

$$r_p = \frac{mn(m+n)}{p^2n^2 + mn + m^2}; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

terwijl verder de substitutie dezer waarde van r_p in (2) en (1), na herleiding, terstond geeft

$$x_p = \frac{(m+n)(m^2 - p^2n^2)}{p^2n^2 + mn + m^2}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

en $$y_p = \frac{2pmn(m+n)}{p^2n^2 + mn + m^2}. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Men zal in deze formulen slechts voor p behoeven te stellen 1, 2, 3, 4, *enz.*, om daardoor de gevraagde stralen, loodlijnen en afstanden, voor elk der achtervolgende rakende cirkels te vinden. De formule (4) geeft voor deze stralen

Digitized by Google

$$r_1 = \frac{mn(m+n)}{n^2+mn+m^2},\; r_2 = \frac{mn(m+n)}{4n^2+mn+m^2},\; r_3 = \frac{mn(m+n)}{9n^2+mn+m^2},\; \text{enz.};$$

de formule (6) geeft voor de loodlijnen, uit de middelpunten op AB vallende,

$$y_1 = \frac{2mn(m+n)}{n^2+mn+m^2},\; y_2 = \frac{4mn(m+n)}{4n^2+mn+m^2},\; y_3 = \frac{6mn(m+n)}{9n^2+mn+m^2},\; \text{enz.};$$

terwijl eindelijk de formule (5), voor de afstanden van de voetpunten dezer loodlijnen tot aan het midden D van de lijn AB, geeft:

$$x_1 = \frac{(m+n)(m^2-n^2)}{n^2+mn+m^2},\; x_2 = \frac{(m+n)(m^2-4n^2)}{4n^2+mn+m^2},\; x_3 = \frac{(m+n)(m^2-9n^2)}{9n^2+mn+m^2},\; \text{enz.}$$

Aanmerkingen. 1°. Het voetpunt der loodlijn zal tusschen D en B of tusschen D en A vallen, naargelang $pn <$ of $> m$ is. Wordt voor eenige waarde van p, $pn = m$, dan komt het voetpunt der loodlijn, uit het middelpunt van dien p^{den} cirkel op AB vallende, juist in het punt D neder. Dit kan echter ten aanzien van een der cirkels alechts dan plaats hebben, wanneer m gelijk aan of een veelvoud van n is.

I 4

2°. De gevondene formulen kunnen ook dienen, om in het algemeen den afstand te vinden van het middelpunt des p^{den} cirkels, tot het punt D. Stellen wij dien afstand door z_p voor, dan is klaarblijkelijk

$$z_p = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2)},$$

en hierin de bovengevondene waarden overbrengende, komt er

$$z_p = \frac{(m+n)(m^2+p^2n^2)}{p^2n^2+mn+n^2} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

3°. Onze formulen zijn zoo algemeen, dat zij ook doorgaan, indien men $p = 0$ neemt, of p negatief stelt. Voor $p = 0$ moet men den cirkel verkrijgen, die F tot middelpunt heeft; en inderdaad vinden wij, voor $p = 0$:

Digitized by Google

$$r_0 = \frac{mn(m+n)}{mn+m^2} = n = \text{FB}, \; y_0 = 0,$$

en $x_0 = z_0 = \frac{(m+n)m^2}{mn+m^2} = m = (m+n) - n = \text{DB} - \text{FB} = \text{DF}.$

LXIX. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Hetzelfde als in het voorgaande voorstel wordt gevraagd, indien de eerste der genoemde reeks van cirkels de lijn BC ***raakt, in plaats van*** BC ***tot middellijn te hebben.***

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, H. Middelburg *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien G, G', G'', *enz.* (Fig. 47) even als vroeger de middelpunten der rakende cirkels zijn, en wij dezelfde notatie aannemen als in het vorige voorstel, dan hebben wij, omdat de eerste cirkel de lijn BC raakt, hier dadelijk

$$y_1 = r_1.$$

De evenredigheid (6) van het LXVII. Voorstel, op de rakende cirkels G en G' toepassende, hebben wij dan verder

$$y_1 + r_1 : y_2 - r_2 = r_1 : r_2,$$

waaruit, omdat $y_1 = r_1$ is, volgt

$$y_2 = 3r_2;$$

dezelfde evenredigheid op de rakende cirkels G' en G'' toepassende, hebben wij

$$y_2 + r_2 : y_3 - r_3 = r_2 : r_3,$$

waaruit, omdat $y_2 = 3r_2$ is, gevonden wordt

$$y_3 = 5r_3;$$

en op deze wijze voortgaande, verkrijgen wij in het algemeen

$$y_p = (2p-1)r_p. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De vergelijkingen (1) en (2) van het LXVII. Voorstel, geven ons hier voorts, even als in de voorgaande oplossing,

$$x_p = \frac{2m+n}{n} r_p - (m+n), \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en $$y_p^2 = \frac{4m(m+n)(n-r_p)}{n^2} r_p; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

alsna vindt men, door y_p tusschen (1) en (3) te elimineren,

$$r_p = \frac{4mn(m+n)}{(2p-1)^2 n^2 + 4mn + 4m^2}; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

door deze waarde in (2) en (1) over te brengen,

Digitized by Google

$$x_p = \frac{(m+n)(4m^2-(2p-1)^2n^2)}{(2p-1)^2n^2+4mn+4m^2}, \quad \ldots \quad (5)$$

$$y_p = \frac{4(2p-1)\,mn(m+n)}{(2p-1)^2n^2+4mn+4m^2}; \quad \ldots \quad (6)$$

en, door vervolgens van de formule $z_p = \sqrt{(x_p^2+y_p^2)}$ gebruik te maken,

$$z_p = \frac{(m+n)(4m^2+(2p-1)^2n^2)}{(2p-1)^2n^2+4mn+4m^2}. \quad \ldots \quad (7)$$

Ook in deze formulen behoeft men slechts voor p achtervolgens 1, 2, 3, *enz.* te nemen, om de begeerde stralen, loodlijnen en afstanden te vinden, voor elk der cirkels G, G′, G″, *enz.* Voor $p = 1$, heeft men:

$$r_1 = y_1 = \frac{4mn(m+n)}{(2m+n)^2} = \text{GM},$$

$$x_1 = \frac{(m+n)(2m-n)}{2m+n} = \text{DM},$$

en $$z_1 = \frac{(m+n)(4m^2+n^2)}{(2m+n)^2} = \text{DG}.$$

LXX. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Binnen een cirkelkwadrant AOB (Fig. 48), ***heeft men, op den straal*** AO ***als middellijn, een' halven cirkel beschreven. Tusschen deszelfs omtrek en den boog van het kwadrant, en beiden rakende, heeft men eene reeks van cirkels beschreven, die achtervolgens ook elkander raken en waarvan de eerste zijn middelpunt op den straal*** OB ***heeft. Men vraagt de stralen en de middelpunten dezer cirkels te bepalen, indien de straal van het kwadrant gegeven is.***

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, H. Middelburg *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laten G′, G″, *enz.* de middelpunten der rakende cirkels zijn. Indien men dan het kwadrant tot den halven cirkel ABC voltooit en op OC als middellijn een halven cirkel beschrijft, zal de cirkel, wiens middelpunt G′ op den straal OB ligt, ook evenzeer den halven cirkel op OC beschreven raken. Het opgegeven voorstel is hierdoor terstond tot het LXVIII. Voorstel teruggebragt, waartoe slechts $n = m$

Digitized by Google

behoeft gesteld te worden, terwijl dan m de helft van den gegeven straal des kwadrants AOB is.

De aldaar opgegevene formulen, geven dan, indien wij dezelfde notatie behouden, ter oplossing van het tegenwoordige voorstel, de bijzondere formulen:

$$r_p = \frac{2m}{p^2 + 2},$$

$$x_p = \frac{2m(1 - p^2)}{p^2 + 2},$$

$$y_p = \frac{4pm}{p^2 + 2},$$

en

$$z_p = \frac{2m(1 + p^2)}{p^2 + 2}.$$

Voor $p = 1$, heeft men $r_1 = \frac{2}{3}m$, $x_1 = 0$, $y_1 = z_1 = \frac{4}{3}m$. Van den eersten rakenden cirkel, wiens middelpunt G' op OB ligt, is dus de straal G'B een derde gedeelte van den straal des kwadrants.

Voor $p = 2$, heeft men $r_2 = \frac{1}{3}m$, $x_2 = -m$, $y^2 = \frac{4}{3}m$ en $z_2 = \frac{5}{3}m$. Daar y_2 dezelfde waarde als y_1 verkrijgt, terwijl $x_2 = -m$ is, blijkt hieruit, dat het middelpunt G'' van den tweeden rakenden cirkel gelegen is in het over O staande hoekpunt van eenen regthoek, die OM'' $= m$ en OG' tot zijden heeft. Voorts volgt uit de toepassing der in het LXVII. Voorstel aangewezene constructie, dat de raakpunten Q en H van dien tweeden cirkel, met de punten A en B in eene zelfde regte lijn liggen.

LXXI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Van een parallelogram zijn gegeven: 1°. ***de lijn, die uit een uiteinde van de bovenzijde naar het midden van de basis loopt;*** 2°. ***de lijn, die uit het andere uiteinde der bovenzijde naar het midden van de afgelegene opstaande zijde loopt;*** ***en*** 3°. ***de hoek, waaronder deze lijnen elkander snijden. Men vraagt hieruit het parallelogram te berekenen en te construeren.***

Opgelost *door* J. A. Stamkart, J. S. Spruijer *en* J. Bassan.

Oplossing van J. A. Stamkart.

Zij ABCD (Fig. 49) het bedoelde parallelogram, waarin

Digitized by Google

de lijnen CC′ en DD′ de zijden AB en BC in C′ en D′ middendoordeelen, dan zijn gegeven $CC' = a$, $DD' = b$ en *hoek* $CPD' = \text{hoek } C'PD = \alpha$.

Deel CD middendoor in A′ en trek AA′, dan is AA′ evenwijdig met CC′; deel ook AD middendoor in B′ en trek BB′, dan is BB′ evenwijdig met DD′; en door de snijding der lijnen AA′, BB′, CC′ en DD′ ontstaat dan een parallelogram PQRS.

Dewijl BC in D′ middendoorgedeeld is, zal ook CS in P middendoorgedeeld zijn; even zoo zal AQ in R middendoorgedeeld zijn, omdat B′ het midden van AD is, en hieruit volgt

$$CP = PS = QR = AR;$$

maar uit de gelijkvormigheid der driehoeken BAR en BC′S volgt

$$AR : SC' = AB : BC' = 2 : 1,$$

derhalve is $AR = 2\,SC'$, en bijgevolg

$$CP = PS = 2\,SC';$$

zoodat men, $CC' = a$ zijnde, onmiddellijk heeft

$$CP = PS = \tfrac{2}{3}a \quad \text{en} \quad SC' = \tfrac{1}{3}a.$$

Gelijkerwijze wordt uit de figuur gevonden

$$DQ = PQ = RS = BS = 2\,PD',$$

zoodat men, $DD' = b$ zijnde, almede heeft

$$DQ = PQ = \tfrac{2}{3}b \quad \text{en} \quad PD' = \tfrac{1}{3}b.$$

Wijders heeft men dan, uit den driehoek CPD′, waarin *hoek* $CPD' = \alpha$ is,

$$CD'^2 = CP^2 + PD'^2 - 2CP \times PD' \cos.\alpha = \tfrac{1}{3^2}(4a^2 + b^2 - 4ab\cos.\alpha);$$

en uit den driehoek DQA′, waarin *hoek* $DQA' = 180° - \alpha$ is,

$$DA'^2 = DQ^2 + QA'^2 + 2DQ \times QA \cos.\alpha = \tfrac{1}{3^2}(4b^2 + a^2 + 4ab\cos.\alpha);$$

terwijl uit diezelfde driehoeken nog volgt:

$$\text{Tang. } PCD' = \frac{PD' \sin.\alpha}{CP - PD' \cos.\alpha} = \frac{b\sin.\alpha}{2a - b\cos.\alpha},$$

$$\text{Tang. } QA'D = \frac{QD \sin.\alpha}{QA' + QD \cos.\alpha} = \frac{2b\sin.\alpha}{a + 2b\cos.\alpha},$$

waaruit, omdat *hoek* BCD = *hoek* PCD′ + *hoek* QA′D is, verder gevonden wordt

$$\text{Tang. } BCD = \frac{5ab\sin.\alpha}{2(a^2 - b^2) + 3ab\cos.\alpha},$$

Digitized by Google

en hierdoor zijn nu alle afmetingen van het parallelogram bekend.

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk deze constructie: beschrijf een parallelogram PQRS, waarvan de zijden PS en PQ met elkander den gegeven hoek α maken, en zoo lang zijn als twee vijfde gedeelten der gegevene lijnen, zoodat PS $= \frac{2}{5}a$, PQ $= \frac{2}{5}b$ en *hoek* SPQ $= \alpha$ is. Verleng de zijden van dit parallelogram PQRS, altijd denzelfden weg omgaande, zoodanig, dat elk verlengstuk gelijk aan de verlengde zijde worde. Hierdoor QA $= 2$ QR, RB $= 2$ RS, SC $= 2$ SP en PD $= 2$ PQ gemaakt zijnde, zullen de punten A, B, C en D de hoekpunten van het begeerde parallelogram zijn.

Aanmerkingen. 1°. Indien CC′ $=$ DD′ of $a = b$ gegeven is, is *Tang.* BCD $= \frac{4}{3}$ *Tang.* α; en wanneer nog daarenboven $\alpha = 90°$ gegeven is, dan wordt het parallelogram ABCD een vierkant.

2°. Door optelling volgt, uit de gevondene waarden van CD′² en DA′²,

$$CD'^2 + DA'^2 = \tfrac{4}{5}(a^2 + b^2);$$

dus is $$BC^2 + CD^2 = \tfrac{4}{5}(a^2 + b^2) = \tfrac{4}{5}(CC'^2 + DD'^2).$$

LXXII. Voorstel.

Door J. Bassan.

De afmetingen van een parallelogram te berekenen, indien gegeven zijn: het verschil van deszelfs ongelijke zijden, het verschil van deszelfs diagonalen, en de hoek, waaronder deze diagonalen elkander snijden.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Speijer, J. A. Stamkart *en* R. van de Weerd.

I. Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABCD (Fig. 50) het begeerde parallelogram, waarin AB $>$ BC en AB $-$ BC $= 4a$ gegeven is; indien dan de diagonalen AC en BD elkander in E snijden, zal AEB een stompe en BEC een scherpe hoek zijn, van welke beide hoeken wij den laatstgenoemden, *hoek* BEC $= \alpha$, als den gegevenen aannemen. Zij verder AC $-$ BD $= 4b$ het gegevene verschil der diagonalen, dan kunnen wij voor de halve diagonalen stellen:

$$AE = EC = x + b \quad \text{en} \quad BE = ED = x - b.$$

Digitized by Google

Alsnu volgt uit den driehoek AEB,

$$AB = V\{AE^2 + BE^2 - 2\,AE \times BE \times Cos.\,AEB\} =$$
$$= V\{(x+b)^2 + (x-b)^2 + 2(x+b)(x-b)\,Cos.\,a\} =$$
$$= V2\{x^2(1 + Cos.\,a) + b^2(1 - Cos.\,a)\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

uit den driehoek BEC

$$BC = V\{EC^2 + BE^2 - 2\,EC \times BE \times Cos.\,BEC\} =$$
$$= V\{(x+b)^2 + (x-b)^2 - 2(x+b)(x-b)\,Cos.\,a\} =$$
$$= V2\{x^2(1 - Cos.\,a) + b^2(1 + Cos.\,a)\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en alzoo hebben wij

$$V2\{x^2(1 + Cos.\,a) + b^2(1 - Cos.\,a)\} - V2\{x^2(1 - Cos.\,a) + b^2(1 + Cos.\,a)\} = 4a.$$

Door deze vergelijking in het vierkant te brengen, komt er

$$4x^2 + 4b^2 - 2V4\{x^2(1 + Cos.\,a) + b^2(1 - Cos.\,a)\}\{x^2(1 - Cos.\,a) + b^2(1 + Cos.\,a)\} = 16a^2,$$

of, na deeling door 4 en verplaatsing van termen,

$$x^2 + b^2 - 4a^2 = V\{x^2(1 + Cos.\,a) + b^2(1 - Cos.\,a)\}\{x^2(1 - Cos.\,a) + b^2(1 + Cos.\,a)\};$$

deze vergelijking nogmaals tot de tweede magt vehreffende, geeft dit na ontwikkeling

$$x^4 + 2(b^2 - 4a^2)x^2 + (b^2 - 4a^2)^2 = x^4(1 - Cos.^2\,a) + 2b^2x^2(1 + Cos.^2\,a) + b^4(1 - Cos.^2\,a),$$

of na overbrenging en vereeniging van termen

$$x^4 Cos.^2\,a - 2(4a^2 + b^2 Cos.^2\,a)x^2 + b^4 Cos.^2\,a - 8a^2b^2 + 16a^4 = 0.$$

Hieruit wordt gevonden:

$$x^4 - 2\frac{4a^2 + b^2 Cos.^2\,a}{Cos.^2\,a}x^2 + \frac{b^4 Cos.^2\,a - 8a^2b^2 + 16a^4}{Cos.^2\,a} = 0,$$

Digitized by Google

$$x^2 = \frac{4q^2 + b^2 Cos.^2 \alpha}{Cos.^2 \alpha} \pm \sqrt{\left\{\frac{(4a^2 + b^2 Cos.^2 \alpha)^2}{Cos.^4 \alpha} - \frac{b^4 Cos.^2 \alpha - 8a^2 b^2 + 16a^4}{Cos.^2 \alpha}\right\}},$$

of $$x^2 = b^2 + \frac{4a^2 \pm 4a\sqrt{(a^2 Sin.^2 \alpha + b^2 Cos.^2 \alpha)}}{Cos.^2 \alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en deze waarde van x^2 in de vergelijkingen (1) en (2) overbrengende, komt er ten laatste

$$AB = \sqrt{\left(4b^2 + \frac{8a(1 + Cos.\ \alpha)}{Cos.^2 \alpha}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 Sin.^2 \alpha + b^2 Cos.^2 \alpha)}\right\}\right)}, \ldots\ldots \quad (4)$$

en $$BC = \sqrt{\left(4b^2 + \frac{8a(1 - Cos.\ \alpha)}{Cos.^2 \alpha}\left\{a \pm \sqrt{(a^2 Sin.^2 \alpha + b^2 Cos.^2 \alpha)}\right\}\right)}, \ldots\ldots \quad (5)$$

waardoor de zijden van het parallelogram gevonden zijn, en dus alle overige afmetingen van hetzelve mede kunnen berekend worden.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien van het parallelogram ABCD (Fig. 50 of 51) gegeven is $AB > BC$ en $AB - BC = 4a$, zal *hoek* $BEC = \alpha$ scherp zijn. Hiermede kan echter gepaard gaan, dat zoo als in Fig. 50 $AC > BD$, of zoo als in Fig. 51 $AC < BD$ is; het gegevene verschil der diagonalen is dan $AC - BD = \pm 4b$. Stellen wij nu $AB = x$, $BC = y$, $AC = 2p$, $BD = 2q$, dan kunnen de waarden dezer onbekenden op de volgende wijze gevonden worden.

Uit de driehoeken AEB en BEC volgt:

$$x^2 = p^2 + q^2 + 2pq Cos.\ \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en $$y^2 = p^2 + q^2 - 2pq Cos.\ \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welke vergelijkingen, bij elkander opgeteld en van elkander afgetrokken, geven:

Digitized by Google

$$x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2) \ldots\ldots (3)$$

en $$x^2 - y^2 = 4pqCos.\ \alpha. \ldots\ldots (4)$$

Omdat nu $x - y = 4a$ is, hebben wij

$$(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x-y)^2 = 4(p^2+q^2) - 16a^2,$$

dus $$x + y = 2\sqrt{(p^2 + q^2 - 4a^2)},$$

en $$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 8a\sqrt{(p^2+q^2-4a^2)},$$

waardoor de vergelijking (4) overgaat in

$$pqCos.\ \alpha = 2a\sqrt{(p^2 + q^2 - 4a^2)}$$

of $$p^2q^2Cos.^2\ \alpha = 4a^2(p^2 + q^2 - 4a^2). \ldots (5)$$

Verheffen wij voorts de gegevene vergelijking $2p - 2q = \pm 4b$ of $p - q = \pm 2b$ tot de tweede magt, zoo komt er

$$p^2 - 2pq + q^2 = 4b^2 \quad \text{of} \quad p^2 + q^2 = 2pq + 4b^2;$$

welke waarde, in (5) gesubstitueerd zijnde, geeft

$$p^2q^2Cos.^2\ \alpha = 4a^2(2pq + 4b^2 - 4a^2)$$

of $$p^2q^2 - \frac{8a^2}{Cos.^2\ \alpha}pq + \frac{16a^2(a^2 - b^2)}{Cos.^2\ \alpha} = 0,$$

waaruit volgt

$$pq = \frac{4a}{Cos.^2\ \alpha}\left\{a \pm \sqrt{(a^2Sin.^2\ \alpha + b^2Cos.^2\ \alpha)}\right\} \ldots (6)$$

Indien wij verder de vergelijking (4) deelen door $x - y = 4a$, komt er

$$x + y = \frac{pqCos.\ \alpha}{a},$$

of hierin de gevondene waarde (6) overbrengende,

$$x + y = \frac{4}{Cos.\ \alpha}\left\{a \pm \sqrt{(a^2Sin.^2\ \alpha + b^2Cos.^2\ \alpha)}\right\} \ldots (7$$

Omdat $x + y > x - y$ en dus

$$\frac{4}{Cos.\ \alpha}\left\{a \pm \sqrt{(a^2Sin.^2\ \alpha + b^2Cos.^2\ \alpha)}\right\} > 4a$$

moet zijn, zoo kunnen wij hieruit afleiden, dat in (6) en (7) alleen het bovenste teeken gebruikt moet worden. Immers is het genoegzaam bekend, dat men in het algemeen heeft $Sin.\ \alpha + Cos.\ \alpha > 1$; bijgevolg is dan ook:

$$1 - Sin.\ \alpha < Cos.\ \alpha,$$

$$\frac{1 - Sin.\ \alpha}{Cos.\ \alpha} < 1,$$

$$\frac{4(a - aSin.\ \alpha)}{Cos.\ \alpha} < 4a,$$

Digitized by Google

$$\frac{4}{Cos.\ \alpha}\left\{a - \sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha)}\right\} < 4a,$$

en dus zeker

$$\frac{4}{Cos.\ \alpha}\left\{a - \sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha + b^2 Cos.^2\ \alpha)}\right\} < 4a;$$

wanneer men dus in (6) en bijgevolg in (7) het onderste teeken gebruiken wilde, zou $x + y < x - y$ zijn.

Gebruiken wij alzoo in (6) en (7) de bovenste teekens, en verbinden wij deze vergelijkingen met $p - q = \pm 2b$ en $x - y = 4a$, dan vinden wij onmiddellijk:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm b + \sqrt{\left\{b^2 + \frac{4a}{Cos.^2\ \alpha}\left(a + \sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha + b^2 Cos.^2\ \alpha)}\right)\right\}}, \\ q &= \mp b + \sqrt{\left\{b^2 + \frac{4a}{Cos.^2\ \alpha}\left(a + \sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha + b^2 Cos.^2\ \alpha)}\right)\right\}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (8)$$

en

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2a(1 + Cos.\ \alpha) + 2\sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha + b^2 Cos.^2\ \alpha)}}{Cos.\ \alpha}, \\ y &= \frac{2a(1 - Cos.\ \alpha) + 2\sqrt{(a^2 Sin.^2\ \alpha + b^2 Cos.^2\ \alpha)}}{Cos.\ \alpha}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (9)$$

Om eindelijk *hoek* BAD $= \phi$ in de gegevens uit te drukken, hebben wij volgens de bekende formule, voor den inhoud van het parallelogram, $xy Sin.\ \phi$ en $2pq Sin.\ \alpha$; van daar

$$Sin.\ \phi = \frac{2pq Sin.\ \alpha}{xy},$$

en hierin de gevondene waarden overbrengende, na herleiding

Digitized by Google

$$Sin.\phi = \frac{2aSin.\alpha\{a+\sqrt{(a^2Sin.^2\alpha+b^2Cos.^2\alpha)}\}}{2a^2Sin.^2\alpha+b^2Cos.^2\alpha+2a\sqrt{(a^2Sin.^2\alpha+b^2Cos.^2\alpha)}};\ldots(10)$$

moetende de hoek ϕ, waarvan het hoekpunt in het uiteinde van den diagonaal $2p$ ligt, scherp of stomp genomen worden, naargelang $p-q=+2b$ of $p-q=-2b$ gegeven is.

Aanmerkingen. 1°. Indien $b=0$ is, is het parallelogram een regthoek, en werkelijk geeft ook de formule (10), voor $b=0$, $Sin.\phi=1$. In dit geval, is volgens (9)

$$x=\frac{2a(1+Cos.\alpha+Sin.\alpha)}{Cos.\alpha} \text{ en } y=\frac{2a(1-Cos.\alpha+Sin.\alpha)}{Cos.\alpha}.$$

2°. Opmerkelijk is het, dat voor $a=0$ al onze formules overgaan in $\frac{0}{0}$; want in dit geval is noodzakelijk $\alpha=90°$. De ruit blijft dus onder de gegevens van het voorstel onbepaald; en deze gevolgtrekking is zeer juist, want de voorwaarde $\alpha=90°$ is dan een noodzakelijk gevolg van de voorwaarde $a=0$. Er is dan eigenlijk ten aanzien der ruit maar één voorwaarde, namelijk $p-q=\pm 2b$ gegeven, terwijl er twee onbekenden te bepalen zijn, namelijk de zijde x en de hoek ϕ.

3°. Omdat $a^2Sin.^2\alpha+b^2Cos.^2\alpha$ altijd positief is, kunnen de gegevens a, b en α geheel willekeurig genomen worden; men zal altijd voor x, y en $Sin.\phi$ bestaanbare waarden verkrijgen.

LXXIII. Voorstel.

Door H. Middelburg.

Men verlangt een gegeven getal in drie deelen te verdeelen, zoodanig, dat twee der deelen tot elkander in eene gegevene reden staan, en dat het gedurig product der drie deelen zoo groot mogelijk zij.

Opgelost *door* H. Middelburg, J. B. Geel, J. S. Spijer, E. Olivier, Dz. *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* H. Middelburg.

Zij a het gegevene getal, en $p:q$ de gegevene verbonding van twee der deelen. Indien wij dan deze twee deelen door px en qx voorstellen, is het derde deel $a-px-qx$, en het gedurig product der drie deelen wordt alzoo

$$px\times qx\times(a-px-qx)=pq\{ax^2-(p+q)x^3\}.$$

Digitized by Google

De functie

$$y = ax^2 - (p + q)x^3$$

moet dus een maximum zijn.

Voor het eerste en tweede differentiaalquotiënt dezer functie, vindt men

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax - 3(p + q)x^2$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a - 6(p + q)x.$$

Indien men nu het eerste differentiaalquotiënt gelijk nul stelt, heeft men

$$2ax - 3(p + q)x^2 = 0,$$

waaruit volgt

$$x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{2a}{3(p + q)};$$

voor $x = 0$, wordt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a =$ *positief*, zoodat deze waarde van x de functie y tot een minimum maakt en derhalve tot beantwoording der voorgestelde vraag niet dienen kan; voor $x = \frac{2a}{3(p + q)}$, wordt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2a =$ *negatief*, en deze waarde van x, maakt dus de functie y werkelijk tot een maximum.

De gevraagde deelen zijn dus:

$$px = \frac{2ap}{3(p + q)},$$

$$qx = \frac{2aq}{3(p + q)},$$

en $a - (p + q)x = a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a.$

Het verdient opmerking, dat het laatste deel, onafhankelijk van de bijzondere waarden, die men aan p en q mogt willen toekennen, altijd een derde gedeelte van het gegevene getal is.

LXXIV. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Men vraagt uit de vergelijking $ay^3 + bxy - a = 0$, ***de waarde van*** y ***in eene oneindige reeks op te lossen.***

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Om de waarde van y uit de gegevene vergelijking, door

Digitized by Google

middel eener oneindige reeks, in x uit te drukken, kunnen wij de leerwijze der onbepaalde coëfficiënten bezigen. Stellen wij te dien einde

$y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + enz.$,

dan zullen wij vooreerst aantoonen, dat de reeks den gestelden vorm hebben moet; in de tweede plaats zullen wij de coëfficiënten A, B, C, *enz.* bepalen; en ten laatste zullen wij de wet opsporen, waarvan deze coëfficiënten afhangen.

1°. Omdat in de gegevene vergelijking geen term met y^2 voorkomt, en de termen, die y^3 en y bevatten, beide positief zijn, zóo volgt hieruit, dat y slechts één bestaanbare waarde hebben kan; weshalve de exponenten van x allen, geheele getallen moeten zijn. Zij moeten ook allen positief zijn, want ware er eenigen term Mx^{-m} of $\frac{M}{x^m}$ mogelijk, dan zou voor $x = 0$ de reeks eene oneindig groote waarde voor y opleveren; terwijl uit de gegevene vergelijking blijkt, dat met $x = 0$ moet overeenstemmen $y = 1$. Dit is ook de reden, waarom wij 1 als eerste term der ontwikkeling hebben aangenomen.

2°. De juistheid van den aangenomen vorm bewezen hebbende, gaan wij over tot het bepalen der coëfficiënten. Hiertoe verheffen wij $y = 1 + Ax + enz.$ tot de derde magt, waartoe wij gebruik maken van de combinatorische analysis (zie J. DE GELDER, *Wisk. Lessen*, 2de cursus § 732), dan vinden wij

$$\begin{aligned} y^3 = {} & 1 \\ & + 3Ax \\ & + (3A^2+3B)x^2 \\ & + (A^3+6AB+3C)x^3 \\ & + (3A^2B+6AC+3B^2+3D)x^4 \\ & + (3A^2C+3AB^2+6AD+6BC+3E)x^5 \\ & + (3A^2D+6ABC+6AE+B^3+6BD+3C^2+3F)x^6 \\ & + enz.; \end{aligned}$$

deze vergelijking vermenigvuldigen wij met a, tellen daarbij op $bxy = bx(1+Ax+Bx^2+enz.) = bx+bAx^2+bBx^3+enz.$, alsmede $-a = -a$; alsdan moet de som $ay^3 + bxy - a$, voor alle waarden van x gelijk *nul* zijn. Hieruit volgt, dat dan de sommen der coëfficiënten, tot dezelfde magt van x

Digitized by Google

behoorende, allen gelijk *nul* moeten wezen. Dit geeft ons de volgende vergelijkingen:

$$3aA + b = 0, \quad \ldots \quad (1)$$
$$3aA^2 + 3aB + bA = 0, \quad \ldots \quad (2)$$
$$aA^3 + 6aAB + 3aC + bB = 0, \quad \ldots \quad (3)$$
$$3aA^2B + 6aAC + 3aB^2 + 3aD + bC = 0, \quad \ldots \quad (4)$$
$$3aA^2C + 3aAB^2 + 6aAD + 6aBC + 3aE + bD = 0, \quad \ldots \quad (5)$$
$$3aA^2D + 6aABC + 6aAE + aB^3 + 6aBD + 3aC^2 + 3aF + bE = 0, \quad \ldots \quad (6)$$

enz.,

welke genoegzaam zijn, om de coëfficiënten A, B, C, *enz.* te bepalen. Zoo volgt uit (1) terstond $A = -\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}$, en deze waarde in (2) overbrengende, komt er $B = 0$; uit (3) verkrijgt men na substitutie $C = \frac{1}{3^4}\left(\frac{b}{a}\right)^3$, voorts uit (4), $D = \frac{1}{3^5}\left(\frac{b}{a}\right)^4$; al deze waarden in (5) en (6) overbrengende, vindt men $E = 0$ en $F = -\frac{4}{3^8}\left(\frac{b}{a}\right)^6$.

De gevraagde reeks is dan:

$$y = 1 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{1}{3^4}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3x^3 + \frac{1}{3^4}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^4x^4 - \frac{4}{3^8}\left(\frac{b}{a}\right)^6x^6 - \text{enz.}$$

3°. Hoezeer wij nu de gevraagde reeks gevonden hebben, en hare verder volgende termen op dezelfde wijze als boven kunnen bepalen, kan men echter niet zeggen, dat de vraag volkomen opgelost is, zoolang de wet niet is aangewezen, waarvan de coëfficiënten afhangen; of met andere woorden, zoolang de algemeene term niet is gevonden. Eerst dan zal het blijken, of ook de achtste, elfde magten, enz. van x ontbreken, zoo als

Digitized by Google

nu de tweede en vijfde magten in onze reeks gemist worden.

Het zal echter moeijelijk zijn, dit doel door de boven opgegevene leerwijze te bereiken. Ook zal de formule van CARDANUS, die insgelijks tot het vinden van onze reeks gebruikt kan worden, daartoe niet leiden. Wij zullen daartoe alzoo de oplossing op nieuw langs eenen anderen weg beproeven, en wel door een zeer gewigtig théorema van LAGRANGE; deze oplossing zal dan de reeds verkregene uitkomst kunnen bevestige en wederkeerig door dezelve bevestigd worden. Het bedoelde schoone théorema, met het bewijs daarvan, kan men vinden bij LAGRANGE in zijne *Théorie des fonctions analytiques*, N°. 98 *et* 99; ook heeft de Hoogleeraar J. DE GELDER daarover uitvoerig gehandeld, in het afgedrukte gedeelte van het 2de Deel zijner *Differentiaal-, Integraal- en Variatie-Rekening*, hetwelk door bijzondere omstandigheden in ons bezit is geraakt.

Volgens dit théorema kan uit de vergelijking

$$z = x + yfz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

waarin fx eene gegevene functie van x beteekent, terstond de waarde van z in eene reeks volgens de magten van y ontwikkeld worden; kunnende daarbij y zoowel veranderlijk als standvastig zijn. Men heeft dan namelijk

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{2}(fx^2)' + \frac{y^3}{2.3}(fx^3)'' + \frac{y^4}{2.3.4}(fx^4)''' + enz.$$

waarin fx eene functie van x beteekent, die op dezelfde wijze uit het element x, als fz uit het element z zamengesteld is; terwijl, volgens de notatie van LAGRANGE, door de accenten de achtervolgende differentiaalquotiënten worden aangeduid, zoodat b. v. $(fx^3)'' = \frac{\partial^2.(fx^3)}{\partial x^2}$ is. Maar nog meer; wil men eene willekeurige functie van z, bij voorbeeld ϕz, in eene dergelijke reeks ontwikkelen, zoo zal men hebben

$$\phi z = \phi x + y\phi' xfx + \frac{y^2}{2}(\phi' xfx^2)' + \frac{y^3}{2.3}(\phi' xfx^3)'' + enz., \ldots (B)$$

verbeeldende hier wederom ϕz en ϕx functiën, die op dezelfde wijze uit de elementen z en x zamengesteld zijn.

Indien nu gegeven is de vergelijking

Digitized by Google

$$z = x + yx^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A')$$

en wij daarenboven voor ϕz de functie z^n aannemen, hebben wij:

$$\phi z = z^n, \quad \phi x = x^n, \quad \phi' x = \frac{\partial . x^n}{\partial x} = nx^{n-1};$$

$$fz = z^m, \quad fx = x^m, \quad fx^2 = x^{2m}, \quad fx^3 = x^{3m}, \text{ enz.};$$

$$\phi' xfx = nx^{m+n-1},$$

$$\phi' xfx^2 = nx^{2m+n-1},$$

$$(\phi' xfx^2)' = \frac{\partial(\phi' xfx^2)}{\partial x} = n(2m + n - 1)x^{2m+n-2},$$

$$\phi' xfx^3 = nx^{3m+n-1},$$

$$(\phi' xfx^3)' = \frac{\partial^2(\phi' xfx^3)}{\partial x^2} = n(3m + n - 1)(3m + n - 2)x^{3m+n-3},$$

en zoo vervolgens. Door dan deze waarden in de reeks (B) over te brengen, vinden wij, dat uit de vergelijking (A') voortvloeit de reeks

$$z^n = y^n + nx^{m+n-1}\, y + \frac{n(2m + n - 1)}{2} x^{2m+n-2}\, y^2 + \frac{n(3m + n - 1)(3m + n - 2)}{2 \cdot 3} x^{3m+n-3}\, y^3 + \ldots$$

$$+ \frac{n(pm + n - 1)(pm + n - 2) \ldots\ldots (pm + n - (p - 1))}{2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots (p - 1)\, p} x^{pm+n-p}\, y^p + \text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B')$$

Schrijven wij voorts de gegevene vergelijking in den vorm

$$y^b = 1 - \frac{b}{a} xy,$$

Digitized by Google

dan blijkt terstond, dat wij in de vergelijking (A') slechts x door y^3, x door 1, y door $-\frac{b}{a}x$ en m door $\frac{1}{3}$ zullen behoeven te vervangen, opdat zij in de gegevene vergelijking overga. Deze zelfde substitutiën in de reeks (B') verrigtende, verkrijgen wij dan ook, als eene rëeks, die uit de gegevene vergelijking voortvloeit,

$$(y^3)^n = 1 - n\left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{n(3n-1)}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 - \frac{n(3n)(3n-3)}{2\ .\ 3}\cdot\frac{1}{3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$\pm\frac{n(3n+p-3)(3n+p-6)\ldots\ldots(3n+p-3(p-1))}{2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots p}\cdot\frac{1}{3^{p-1}}\left(\frac{b}{a}\right)^p x^p + \text{enz.};$$

en zoo wij nu hierin, omdat er gevraagd is de waarde van y in eene reeks uitgedrukt te vinden, $n = \frac{1}{3}$ nemen, komt er terstond

$$y = 1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{1}{3^4}\left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 + \frac{1}{3^5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 x^4 - \frac{4}{3^8}\left(\frac{b}{a}\right)^5 x^5 - \text{enz.};$$

welke reeks dezelfde is, die wij vroeger uit geheel andere beginselen verkregen.

Het is nu duidelijk, dat al de termen, welke de $(3r+2)^{de}$ magt van x bevatten zouden, in de verkregene reeks moeten ontbreken; want $3n = 1$ en dus, zoo men $p = 3r+2$ neemt, $3n + p = 3(r+1)$ zijnde, zal noodzakelijk een der factoren van den algemeenen coëfficiënt, en dus ook die coëfficiënt zelve nul worden.

De gevondene wet van opvolging der coëfficiënten, geeft ook het middel aan de hand, om de reeks zoo ver uit te schrijven als men verkiest, en zelfs om eenigen term te berekenen, zonder nog de voorafgaande termen berekend te hebben. Voor den term, welke x^{10} bevat, zal men b. v., omdat 10 even is het bovenste teeken gebruikende, terstond hebben

$$\frac{8\times 5\times 2\times -1\times -4\times -7\times -10\times -13\times -16}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8\ .\ 9\ .\ 10}\cdot\frac{1}{3^{10}}\left(\frac{b}{a}\right)^{10}x^{10} = \frac{104}{3^{14}}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{10}x^{10}.$$

Digitized by Google

Wij hebben dit vraagstuk opzettelijk eenigzins uitvoerig behandeld, ten einde onze medeleden meer bekend te maken met het aangehaalde gewigtige théorema van LAGRANGE, hetwelk, voor zoo verre ons bewust is, in geene Hollandsche werken gevonden wordt; dan alleen in het bovengenoemde werk van den Hoogleeraar DE GELDER, dat echter, tot groot nadeel onzer Vaderlandsche Wiskundigen, nog al niet verkrijgbaar is.

LXXV. VOORSTEL.

Door R. VAN DE WEERD.

Men vraagt uit de vergelijking $py^3 - 3qy + rx = 0$, ***de waarde van*** y ***in eene oneindige reeks op te lossen.***

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, E. OLIVIER, Dz. *en* R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

In de gegevene vergelijking ontbreekt wederom de tweede magt van y, maar de term $3qy$ heeft het negatieve teeken, weshalve wij niet mogen besluiten, dat zij slechts één bestaanbaren wortel heeft. Dit heeft zoo als bekend is alleen dan plaats, wanneer $pr^2x^2 > 4q^3$ is. Wij zullen daarom den vorm der reeks niet mogen aannemen, zoo als wij in het voorgaande voorstel hebben gedaan. Het théorema van LAGRANGE zal ons echter hier wederom de grootste dienst bewijzen; daartoe zullen wij slechts eene beknopte toepassing der vergelijkingen (A') en (B') behoeven te maken, die in de voorgaande oplossing voorkomen.

Indien wij de vergelijking $py^3 - 3qy + rx = 0$, in den vorm

$$y = \frac{r}{3q}x + \frac{p}{3q}y^3$$

brengen, zien wij terstond, dat de genoemde vergelijking (A') in deze overgaat, zoo wij in (A') y in plaats van z, $\frac{r}{3q}x$ in plaats van x, $\frac{p}{3q}$ in plaats van y schrijven, en tevens $m = 3$ stellen. Deze zelfde substitutiën in de vergelijking (B') bewerkstelligende en tevens $n = 1$ nemende, verkrijgen wij dan terstond

Digitized by Google

$$y = \frac{r}{3q}x\left\{1 + \frac{pr^2}{(3q)^3}x^2 + 3.\frac{p^2r^4}{(3q)^6}x^4 + 12\,\frac{p^3r^6}{(3q)^9}x^6 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{3t(3t-1)(3t-2)\ldots\ldots(3t-(t-2))}{2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\ldots\,t\,.}\,.\,\frac{p^tr^{2t}}{(3q)^{3t}}x^{2t} + \ldots\right\}\,.\quad\ldots\ldots\quad (M)$$

Behalve deze, kunnen wij echter ook nog eene andere reeks voor y bekomen. Voor de gegevene vergelijking namelijk schrijvende

$$y^2 = \frac{3q}{p} - \frac{rx}{p}y^{-1},$$

zien wij dat zij ontstaat, wanneer wij in (A′) z door y^2, s door $\frac{3q}{p}$, y door $-\frac{rx}{p}$ vervangen en $m = -\frac{1}{2}$ nemen. Verrigten wij dus deze zelfde substitutiën in (B′) en nemen wij tevens $n = \frac{1}{2}$, dan komt er, na verplaatsing der termen,

$$y = -\frac{1}{2}.\frac{r}{3q}x\left\{1 + \frac{2.3}{2.3}\,\frac{pr^2}{(3q)^3}\,x^2 + \frac{3.4.5.6}{2.3.4.5}.\frac{p^2r^4}{(3q)^6}\,x^4 + \frac{4.5.6.7.8.9}{2.3.4.5.6.7}.\frac{p^3r^6}{(3q)^9}\,x^6 + \text{enz}\right\}$$

$$\pm\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{pr^2}{(3q)^3}x^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^4.\frac{p^2r^4}{(3q)^6}x^4 - \frac{7.9.11.13.15}{2.3.\,4.\,5.\,6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{p^3r^6}{(3q)^9}x^6 - \text{enz.}\right\}\sqrt{\frac{3q}{p}}\quad\ldots\quad (N)$$

De reeksen (M) en (N) zullen de drie bestaanbare waarden van y geven, ingevalle $pr^2x^2 =$ of $< 4q^3$ is. Inderdaad als $x = 0$ is, gaat de vergelijking over in

$$py^3 - 3qy = 0,$$

waarvan de wortels zijn $y = 0$ en $y = \pm\sqrt{\frac{3q}{p}}$; dezelfde, welke uit de reeksen (M) en (N) door $x = 0$ te

Digitized by Google

stellen, volgen. Is echter $pr^2x^2 > 4q^3$, dan kunnen deze reeksen niet meer dienen; inderdaad kan men bewijzen, dat zij alsdan moeten divergeren; dit bewijs zou ons echter te ver leiden, en wij laten het dus achterwege. Intusschen kan men in dit geval op dezelfde wijze te werk gaan als in het vorige voorstel.

Schrijven wij de vergelijking $py^3 - 3qy + rx = 0$, in deze gedaante:

$$y^3 = -\frac{rx}{p} + \frac{3q}{p}y,$$

en vergelijken wij haar alzoo met de algemeene vergelijking (A') van het voorgaande voorstel, dan zien wij, dat, in de aldaar gevondene reeks (B'), z door y^3, x door $-\frac{rx}{p}$, y door $\frac{3q}{p}$, m door $\frac{1}{3}$ en n door $\frac{1}{3}$ zal moeten vervangen worden. Dit geeft na behoorlijke herleiding

$$y = -\left\{1 - \frac{1.2}{2.3}\cdot\frac{q^3}{pr^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{4.1.2.5.8}{2.3.4.5.6}\left(\frac{q^3}{pr^2}\right)^2\cdot\frac{1}{x^4} - \text{enz.}\right\}\sqrt[3]{\frac{r}{p}x}$$

$$-\left\{1 + \frac{2.1.4}{2.3.4}\cdot\frac{q^3}{pr^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{5.2.1.4.7.10}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{q^3}{pr^2}\right)^2\cdot\frac{1}{x^4} + \text{enz.}\right\}\frac{q}{\sqrt[3]{p^2rx}},$$

welke reeks convergeren zal, indien $pr^2x^2 > 4q^3$ is.

LXXVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Te integreren

$$\partial y = \frac{(1 + 2\,Sin.2\,\phi)(1 - 2\,Sin.^2\,\phi)\partial\phi}{(Sin.^2\,\phi\,Cos.^2\,\phi + 3\,Sin.^2\,\phi + 12)^{\frac{5}{3}}}.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Bassan, J. S. Sreijer, J. P. A. François, W. L. Ivangh, H. Middelburg *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stellen wij

$$Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi = x,$$

dan is $Sin.\,2\phi = 2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi = 2x$,

en $\partial(Sin.\phi Cos.\phi) = (Cos.^2\phi - Sin.^2\phi)\partial\phi = (1 - 2Sin.^2\phi)\partial\phi = \partial x$,

hierdoor gaat de te integreren vergelijking over in

$$\partial y = \frac{(4x + 1)\partial x}{(x^2 + 6x + 12)^{\frac{5}{3}}} = \frac{(4x + 1)\partial x}{[(x + 3)^2 + 3]^{\frac{5}{3}}}.$$

Stellen wij voorts nog

Digitized by Google

$$x + 3 = z\sqrt{3},$$

dan is $$\partial x = \partial z\sqrt{3},$$

en $$4x + 1 = 4z\sqrt{3} - 11,$$

waardoor wij verkrijgen

$$\partial y = \frac{(4z\sqrt{3} - 11)\partial z\sqrt{3}}{(3z^2 + 3)^2} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{(4z\sqrt{3} - 11)\partial z}{(z^2 + 1)^2};$$

derhalve is dan

$$y = \frac{4}{9} \int \frac{z\partial z}{(z^2 + 1)^2} - \frac{11}{9\sqrt{3}} \int \frac{\partial z}{(z^2 + 1)^2}.$$

Nu is (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.*, § 194, Voorb. I.)

$$\int \frac{\partial z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z}{4(z^2 + 1)^2} + \frac{3z}{8(z^2 + 1)} + \frac{3}{8} \textit{Boog Tang. } z,$$

terwijl wij onmiddellijk vinden

$$\int \frac{z\partial z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial(z^2 + 1)}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(z^2 + 1)^2};$$

door substitutie van deze integralen, komt er alzoo

$$y = C - \frac{11z + 4\sqrt{3}}{36(z^2 + 1)^2\sqrt{3}} - \frac{11z}{24(z^2 + 1)\sqrt{3}} - \frac{11}{24\sqrt{3}} \textit{Boog Tang. } z.$$

Hierin vooreerst wederom $z = \frac{x + 3}{\sqrt{3}}$ substituerende, waardoor $z^2 + 1 = \frac{x^2 + 6x + 12}{3}$ wordt, verkrijgen wij, na herleiding,

$$y = C - \frac{11x + 45}{12(x^2 + 6x + 12)^2}$$

$$- \frac{11x + 33}{24(x^2 + 6x + 12)} - \frac{11}{24\sqrt{3}} \textit{Boog Tang. } \frac{x + 3}{\sqrt{3}};$$

eri vervolgens $x = \textit{Sin. } \phi \textit{ Cos. } \phi = \frac{1}{2} \textit{Sin. } 2\phi$ substituerende, komt er ten laatste

$$y = C - \frac{11 \textit{ Sin. } 2\phi + 90}{24(\textit{Sin.}^2 \phi \textit{ Cos.}^2 \phi + 3 \textit{ Sin. } 2\phi + 12)^2}$$

$$- \frac{11 \textit{Sin. } 2\phi + 66}{48(\textit{Sin.}^2 \phi \textit{Cos.}^2 \phi + 3 \textit{Sin. } 2\phi + 12)} - \frac{11}{24\sqrt{3}} \textit{Boog Tang.} \frac{\textit{Sin. } 2\phi + 6}{2\sqrt{3}}.$$

LXXVII. Voorstel.

Door S. Dijk, Cornsz.

Te integreren

$$\partial y = \frac{\partial\phi}{\textit{Tang.}^2 \phi(1 + \textit{Tang. } \phi) \textit{ Sec.}^2 \phi(1 + \textit{Sec.}^2 \phi)}$$

Digitized by Google

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Sprijer, J. Bassan, J. P. A. François *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stellen wij

$$Tang.\ \phi = x,$$

dan is

$$Sec.^2\ \phi = 1 + x^2,$$

$$\phi = Boog\ Tang.\ x$$

en

$$\partial\phi = \frac{\partial x}{1 + x^2};$$

hierdoor gaat de opgegevene differentiaaluitdrukking over in

$$\partial y = \frac{\partial x}{x^2(x+1)(x^2+2)(x^2+1)^2}.$$

Zoo wij het gebroken $\frac{1}{x^2(x+1)(x^2+2)(x^2+1)^2}$, volgens de bekende leerwijze, in eenvoudiger breuken verdeelen, vinden wij, dat hetzelve gelijk is aan

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12(x+1)} + \frac{x-1}{6(x^2+2)} + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)^2};$$

al deze termen met ∂x vermenigvuldigende, en er vervolgens de integralen van nemende, hebben wij derhalve

$$y = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x} + \tfrac{1}{12}\int\frac{\partial x}{x+1} + \tfrac{1}{6}\int\frac{(x-1)\partial x}{x^2+2} + \tfrac{1}{4}\int\frac{(x-1)\partial x}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\int\frac{(x-1)\partial x}{(x^2+1)^2}.$$

Maar nu is:

$$\int\frac{\partial x}{x^2} = -\frac{1}{x},\ \int\frac{\partial x}{x} = Log.\ x,\ \int\frac{\partial x}{x+1} = Log.\ (x+1),$$

Digitized by Google

$$\int\frac{(x-1)\partial x}{x^2+2}=\int\frac{x\partial x}{x^2+2}-\int\frac{\partial x}{x^2+2}=\tfrac{1}{2}\,Log.\,(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\int\frac{(x-1)\partial x}{x^2+1}=\int\frac{x\partial x}{x^2+1}-\int\frac{\partial x}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}\,Log.\,(x^2+1)-Boog\,Tang.\,x,$$

$$\int\frac{(x-1)\partial x}{(x^2+1)^2}=\int\frac{x\partial x}{(x^2+1)^2}-\int\frac{\partial x}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}-\tfrac{1}{2}\,Boog\,Tang.\,x,$$

zoodat wij door substitutie dezer integralen vinden

$$y=-\frac{1}{2x}-\tfrac{1}{2}\,Log.\,x+\tfrac{1}{12}\,Log.\,(x+1)+\tfrac{1}{12}\,Log.\,(x^2+2)-\frac{1}{6\sqrt{2}}Boog\,Tang.\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$+\tfrac{1}{6}\,Log.\,(x^2+1)-\tfrac{1}{4}\,Boog\,Tang.\,x-\frac{1}{4(x^2+1)}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\tfrac{1}{4}\,Boog\,Tang.\,x,$$

of, door vereeniging der daarvoor geschikte termen,

$$y=-\frac{3x^2+x+2}{4x(x^2+1)}+\tfrac{1}{12}\,Log.\,\frac{(x+1)(x^2+2)\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^6}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,Boog\,Tang.\,x-\frac{1}{6\sqrt{2}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Hierin vervolgens wederom $x=Tang.\,\phi$ overbrengende, hebben wij ten laatste

$$y=-\frac{3\,Tang.^2\phi+Tang.\,\phi+2}{4\,Tang.\,\phi\,Sec.^2\phi}+\tfrac{1}{12}\,Log.\,\frac{(1+Tang.\,\phi)(1+Sec.^2\phi)\,Sec.^3\phi}{Tang.^6\phi}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\phi-\frac{1}{6\sqrt{2}}\,Boog\,Tang.\,\frac{Tang.\,\phi}{\sqrt{2}}.$$

Digitized by Google

LXXVIII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Wanneer het ondeelbare getal p geen deeler is van het getal N, dan zal, voor elke geheele positieve waarde van n, $N^{(p-1)p^n} - 1$ deelbaar zijn door p^{n+1}. Men vraagt naar het bewijs.

Opgelost *door* H. van Blanken, J. S. Speijer, J. B. Geel *en* R. van de Weerd.

I. Oplossing *van* H. van Blanken.

Volgens het bekende theorema van Fermat, is $N^{p-1} - 1$ deelbaar door p; stelt men dus

$$N^{p-1} = px + 1, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dan is x een geheel getal.

Door de beide leden dezer vergelijking tot de p^{de} magt te verheffen en vervolgens met 1 te verminderen, verkrijgt men $N^{(p-1)p} - 1 = p^p x^p + p \times p^{p-1} x^{p-1} + enz. + p \times px$; . . . (2) daar nu al de termen van het tweede lid dezer vergelijking door p^2 deelbaar zijn, zoo is ook haar eerste lid of $N^{(p-1)p} - 1$ door p^2 deelbaar.

Stelt men dus

$$N^{(p-1)p} = p^2 x' + 1,$$

dan zal ook x' een geheel getal zijn; en na dan de beide leden der laatste vergelijking tot de p^{de} magt verheven en vervolgens met 1 verminderd te hebben, blijkt het wederom, dat $N^{(p-1)p^2} - 1$ door p^3 deelbaar is.

Daar men nu steeds voort kan gaan met dezelfde redenering te herhalen, zoo blijkt daaruit, dat het gestelde algemeen waar moet zijn.

Aanmerkingen. 1°. Wanneer, r een evenmatig deel van $p - 1$ zijnde, $N^r - 1$ door p deelbaar is, blijkt uit het bovenstaand bewijs, dat ook $N^{rp^n} - 1$ deelbaar zal zijn door p^{n+1}.

2°. Wanneer $N^{p-1} - 1$ niet deelbaar is door p^2, dan is volgens (1) x niet deelbaar door p, en bijgevolg de laatste term van het tweede lid der vergelijking (2) niet deelbaar door p^3, terwijl al de overige termen van dat lid, $p > 2$ zijnde, door p^3 kunnen gedeeld worden; het eerste lid der vergelijking (2), namelijk $N^{(p-1)p} - 1$, is dus alsdan ook niet

Digitized by Google

deelbaar door p^3. Heeft echter N den vorm $ap^2 \pm 1$, dan is blijkbaar N^{p-1} deelbaar door p^2.

3°. Wanneer de ondeelbare getallen p, p', p'', *enz.* geene deelers zijn van N, maar wel van $N^r - 1$, $N^{r'} - 1$, $N^{r''} - 1$, *enz.*, dan zal, v een gemeen veelvoud zijnde van r, r', r'', *enz.*, $N^v - 1$ deelbaar zijn door $p \times p' \times p'' \times$ *enz.*, omdat $N^v - 1$ door elk der vormen $N^r - 1$, $N^{r'} - 1$, $N^{r''} - 1$, *enz.* deelbaar is. Dit besluit gaat niet meer door, wanneer de getallen p, p', p'', *enz.* onderling aan elkander gelijk zijn; en het is vooral hierom, dat de in dit voorstel voorgedragene stelling belangrijk is.

4°. Door $N = 10$ te nemen, vindt het voorstel zijne toepassing bij de tiendeelige breuken. Zoo zal b. v., indien het ondeelbare getal p geen 2, 3 of 5 is, het aantal cijfers van de periode der tiendeelige breuk, welke uit de ontwikkeling van $\frac{1}{p^2}$ ontstaat, altijd een veelvoud van p zijn.

Men kan zich hiervan ook nog, in elk bijzonder geval, op de volgende wijze *à priori* overtuigen.

Laat b. v. $p = 17$ zijn. De ontwikkeling der breuk $\frac{1}{17}$ heeft tot periode de volgende 16 cijfers: 0588235294117647; deelt men deze periode door 17, dan is de rest der deeling 8. Daar nu $\frac{8}{17}$ bij ontwikkeling het achtvoud van de vorige periode en 8 tot rest oplevert, zoo ziet men ligt, dat men, de deeling door 17 verder dan over de eerste periode uitstrekkende, op het einde der tweede periode 16 of 2×8 tot rest moet verkrijgen. Om gelijke reden, moet op het einde der derde periode de rest der deeling zijn 7 of $3 \times 8 - 17$; op het einde der vierde periode 15 of $4 \times 8 - 17$; op het einde der vijfde periode 6 of $5 \times 8 - 2 \times 17$; en zoo vervolgens. De resten der deeling kunnen blijkbaar eerst in dezelfde volgorde terugkeeren, wanneer op het einde eener periode de rest der deeling nul is; dit kan eerst plaats hebben op het einde der zeventiende periode, als wanneer de rest der deeling is $17 \times 8 - 8 \times 17$. De ontwikkeling der breuk $\frac{1}{17^2}$ heeft dus 16×17 cijfers in de periode.

Digitized by Google

Door eene gelijke redenering kan men nu aantoonen, dat de ontwikkeling van $\frac{1}{17^3}$ noodzakelijk 16×17^2 cijfers in de periode moet hebben; en dat in het algemeen voor de breuk $\frac{1}{17^n}$ het aantal cijfers in de periode bedraagt $16 \times 17^{n-1}$.

5°. Het is misschien niet ongepast, hier nog aan te mermerken, dat men ook reeds, bij ontwikking van $\frac{1}{p}$ tot eene tiendeelige breuk, de wet, volgens welke de resten bij de achtereenvolgende groepen der deeling aangroeijen, kan aanwenden tot het bepalen van het aantal cijfers, waaruit de periode bestaat.

Is namelijk de m^{de} rest der deeling r, dan is blijkbaar de $2m^{de}$ rest r^2, de $3m^{de}$ rest r^3, *enz.* telkens zooveelmaal mogelijk met p verminderd. Vindt men nu, dat r^n, zoo dikwijls mogelijk met p verminderd, 1 overlaat, dan is deze 1 de nm^{de} rest der deeling, en dus het aantal cijfers der periode gelijk aan, of een evenmatig deel van $n \times m$.

Zoo vindt men b. v., bij de ontwikkeling van $\frac{1}{31}$, tot derde rest 8; daar nu $8^5 - 1$ door 31 deelbaar is, zoo kan men hieruit besluiten, dat er 5×3 of 15 cijfers in de periode zijn.

Somtijds is het geschikter van negatieve resten gebruik te maken. Zoo vindt men b. v., bij de ontwikkeling van $\frac{1}{29}$, tot vierde rest $+ 24$ of $- 5$; daar nu $(- 5)^7 - 1$ deelbaar is door 29, zoo volgt hieruit, dat het aantal cijfers in de periode 7×4 of 28 is.

6°. Indien, in de ontwikkeling van $\frac{1}{p}$, de periode uit $2n$ cijfers bestaat, en men deze periode wederom door p deelt, dan kan men reeds de rest der deeling bepalen, nadat men de bewerking over de eerste helft der periode heeft volbragt.

Men behoeft daartoe slechts indachtig te zijn, dat de tweede helft der periode verkregen wordt, door de eerste helft af te trekken van $10^n - 1$; en dat de rest der deeling, van 10^n door p, hier altijd $p - 1$ is. Is nu, nadat men de helft der periode door p gedeeld heeft, de rest der dee-

Digitized by Google

ling r, dan zal de rest der deeling, wanneer de geheele periode door p wordt gedeeld, het kleinste positieve getal zijn, dat begrepen is in den vorm $ap - 2(r + 1)$.

Zoo vindt men b. v., wanneer men de acht eerste cijfers der boven opgegevene periode van $\frac{1}{17}$ door 17 deelt, tot rest der deeling 12; gevolgelijk is de rest der deeling, wanneer de geheele periode door 17 gedeeld wordt, $2\times17-2(12+1)=8$.

II. Oplossing van J. S. Speijer.

Van dit allezins belangrijk voorstel, vindt men het bewijs in het *Verslag van de Wetenschappelijke Wintervergaderingen des Genootschaps*, 1845—1846, bladz. 92. Dit bewijs is aldaar door den Heer J. Acquoy uit het binomium afgeleid. Hoezeer de stelling algemeener is dan het Théorema van Fermat, is zij echter nog niet algemeen genoeg. De meer algemeene stelling, die wij thans zullen bewijzen, is bij de Fransche Schrijvers bekend onder den naam van *Théorème de* Fermat *généralisé*; zij is onder anderen door Gauss, en onlangs door Poinsot bewezen. Het bewijs van Gauss, hoezeer eenigzins gewijzigd, is door ons in de wetenschappelijke vergaderingen van den laatstverloopen winter voorgedragen, en zal in het verslag van die vergaderingen worden opgenomen. Thans zullen wij gebruik maken van het bewijs van Poinsot, doch eenigzins daarvan afwijken, doordien wij ons zullen bedienen van de leer der *congruëntiën*, reeds vroeger door ons verklaard (zie het meergen. *Verslag*, bladz. 75 en volgende), en die hier de redenering veel bekort.

Volgens die leer beteekent de uitdrukking $q \equiv r(\mathrm{M})$, dat $q - r$ door M zonder overschot kan gedeeld worden, wordende dan deze uitdrukking eene *congruëntie* genoemd. Voorts is (ter aangehaalde plaats, bladz. 80) bewezen, dat als a en b onderling ondeelbaar zijn, en tevens ak deelbaar door b of $ak \equiv 0\ (b)$ is, alsdan noodzakelijk k deelbaar door b of $k \equiv 0\ (b)$ moet wezen. Zijn dus twee getallen a en c met b onderling ondeelbaar, dan zal men ook omgekeerd mogen besluiten, dat het product ac niet door b deelbaar is, of dat men niet kan hebben $ac \equiv 0\ (b)$.

Na deze voorafgaande herinneringen nemen wij aan, dat, M eenig deelbaar of ondeelbaar getal zijnde, al de getallen

Digitized by Google

kleiner dan M, en tevens geen gemeenen deeler met M hebbende, voorgesteld worden door:

$$1, a, b, c, d, \ldots . M - 1, \ldots . \quad (1)$$

terwijl wij het aantal dier getallen door m aanduiden. Indien men nu al deze getallen met een hunner, onverschillig welk, b. v. met x vermenigvuldigt, dan zijn de producten:

$$x, ax, bx, cx, dx, \ldots . (M - 1)x. \ldots \quad (2)$$

Al deze getallen zijn producten van twee getallen, die met M onderling ondeelbaar zijn, en zij zijn dus, zoo als wij boven gezien hebben, niet door M deelbaar; deelt men hen derhalve door M, dan moeten er resten overblijven, die kleiner dan M zijn en ook geen gemeenen deeler met M hebben, en welke resten alzoo noodzakelijk in de rij (1) moeten voorkomen. Maar deze resten moeten ook alle verschillend zijn; immers, indien b. v. ax en dx door M gedeeld wordende gelijke resten lieten overblijven, zou men hebben $ax \equiv dx$ (M), waaruit, wegens de onderlinge ondeelbaarheid van x en M, terstond zou volgen $a \equiv d$ (M); hetgeen onmogelijk is, omdat a en d beide kleiner dan M zijn en van elkander verschillen.

Hieruit vloeit dan onmiddellijk voort, dat de m resten, welke men verkrijgt, indien de getallen in de rij (2) voorkomende door M gedeeld worden, hoezeer dan ook in eene andere volgorde, dezelfde zullen zijn als de m getallen, die in de rij (1) voorkomen. Bij de deeling door M, laat blijkbaar het eerste getal x der rij (2), tot rest over het getal x, dat ergens in de rij (1) voorkomt; het getal ax der rij (2) laat tot rest over eenig ander getal y, ergens in de rij (1) voorkomende; het getal bx der rij (2), laat tot rest over wederom eenig ander getal z uit de rij (1), en zoo met de overigen; zoodat men (altijd volgens denzelfden modulus M) heeft de congruëntiën:

$$x \equiv x, ax \equiv y, bx \equiv z, \text{enz.}, \ldots . \quad (3)$$

wier aantal m is, wier voorste leden de getallen der rij (2), en wier achterste leden de getallen der rij (1) zijn.

Even als uit $x \equiv x$, $ax \equiv y$, $bx \equiv z$, kan afgeleid worden $abx^3 \equiv xyz$, volgt uit de m congruëntiën (3), dat het gedurig product der m getallen (2) congruënt is met het gedurig product der getallen (1); of dat men heeft (altijd

Digitized by Google

volgens den modulus M)

$x^m . a.b.c.d. \ldots . (M-1) \equiv a.b.c.d. \ldots . (M-1)$.

Omdat echter a, b, c, d, *enz.* . . . . M — 1 geen van alle een gemeenen deeler met M hebben, en dus ook het product $a.b.c.d. \ldots . (M-1)$ onderling ondeelbaar met M is, zal men de beide leden dezer congruëntie door dat product mogen deelen, waardoor men verkrijgt

$$x^m \equiv 1 \text{ of } x^m \equiv 1 \text{ (M)}; \quad \ldots . \quad (4)$$

waaruit blijkt, dat $x^m - 1$ door M deelbaar is.

Hoewel nu de congruëntie (4) slechts bewezen is, in de onderstelling, dat x kleiner dan M is, gaat zij desniettemin door, wanneer men in plaats van x eenig ander getal N neemt, dat met M geen gemeenen deeler heeft. Immers zal N, door M gedeeld wordende, eene rest overlaten, die, kleiner dan M en onderling ondeelbaar met M zijnde, in de rij van getallen (1) gevonden wordt, en dus het boven gebezigde getal x mag aangemerkt worden. Alsdan is (volgens den modulus M)

$$N \equiv x,$$

dus ook $$N^m \equiv x^m;$$

maar volgens dienzelfden modulus is $x^m \equiv 1$, en derhalve almede

$$N^m \equiv 1 \text{ of } N^m \equiv 1 \text{ (M)}; \quad \ldots . \quad (5)$$

(vergelijk het meergen. *Verslag*, bladz. 77. N°. 12 en 8).

Deze congruëntie (5) behelst nu de algemeenere stelling, waarvan wij gesproken hebben. Zij leert, dat, als N een getal is, hetwelk geen gemeenen deeler met M heeft, $N^m - 1$ door M deelbaar is, hetzij M een deelbaar of een ondeelbaar getal is; mits men wel acht geve, dat m het aantal voorstelt der getallen, die niet grooter dan M zijn en tevens geen gemeenen deeler met M hebben; wordende echter de eenheid onder deze getallen medegerekend.

Het is genoegzaam bekend, dat het genoemde aantal getallen gemakkelijk kan gevonden worden, als het getal M gegeven is. Immers zal men (Zie Gauss, *Recherches Arithmétiques* p. 23) volgens de schoone door Euler bewezene stelling hebben, als q, r, s, *enz.* de ondeelbare deelers van M zijn,

$$m = M \times \frac{q-1}{q} \times \frac{r-1}{r} \times \frac{s-1}{s} \times \text{enz.}$$

Digitized by Google

Is nu, zoo als in het opgegevene voorstel, $M = p^{n+1}$, zijnde p een ondeelbaar getal, dan is hier $m = M.\frac{p-1}{p} = p^{n+1}.\frac{p-1}{p} = (p-1)p^n$, waardoor (5) overgaat in

$$N(p-1)p^n \equiv 1 \ (p^{n+1});$$

dat is: $N(p-1)p^n - 1$ is deelbaar door p^{n+1}.

Is M een getal, dat verscheidene factoren, en dus den vorm $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ *enz.* heeft, dan is

$$m = M \times \frac{p-1}{p} \times \frac{q-1}{q} \times \frac{r-1}{r} \times \text{enz.} =$$

$$= (p-1)p^{\alpha-1}\,(q-1)q^{\beta-1}\,(r-1)r^{\gamma-1} \ldots .$$

en dus

$N(p-1)p^{\alpha-1}(q-1)q^{\beta-1}(r-1)r^{\gamma-1} \ldots - 1$ deelbaar door $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$; eene stelling, die ook in het meergenoemde *Verslag* op bladz. 95 door middel van het binomium is betoogd, doch die uit onze algemeene stelling terstond volgt.

LXXIX. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Twee gelijkvormige kegelsneden, welker eerste assen langs elkander vallen, hebben eene gemeenschappelijke koorde MN (Fig. 52). ***Wanneer men nu uit het snijpunt*** M ***lijnen trekt, welke ter wederzijde met*** MN ***gelijke hoeken maken, en de eene kegelsnede in de punten*** P ***en*** P′, ***de andere in de punten*** Q ***en*** Q′ ***snijden, dan zullen de stukken*** PQ ***en*** P′Q′, ***welke door de kegelsneden van deze lijnen worden afgesneden, aan elkander gelijk zijn. Men vraagt naar het bewijs.***

Opgelost *door* H. van Blanken *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Dewijl de eerste assen der beide kegelsneden langs elkander vallen, wordt de gemeenschappelijke koorde MN, in haar midden, regthoekig door deze eerste assen gesneden. Deelt men dus MN in B middendoor, en trekt men door het punt B eene lijn regthoekig op MN, dan vallen de eerste assen langs deze lijn, welke de kegelsneden in derzelver toppen snijdt. Laat nu den top A der kegelsnede MAN tot

Digitized by Google

oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aangenomen worden, en zij

$$y^2 = px + qx^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

de vergelijking dier kegelsnede; indien dan $AB = m$ en $BM = n$ gesteld wordt, heeft men, volgens deze vergelijking

$$n^2 = pm + qm^2. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Stelt men *hoek* $NMP = \phi$, dan is de vergelijking der regte lijn MP

$$y - n = (x - m)\ Cot.\ \phi, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

alzoo deze lijn door het punt gaat, waarvan m en n de coördinaten zijn, en bovendien met de as der x eenen hoek $90° - \phi$ maakt.

Elimineert men y tusschen de vergelijkingen (1) en (3), dan verkrijgt men

$$\{(x - m)\ Cot.\ \phi + n\}^2 - (px + qx^2) = 0$$

of, zoo men den eersten term ontwikkelt en daarna volgens (2) $n^2 = pm + qm^2$ substitueert,

$$(x-m)^2 Cot.^2\phi + 2n(x-m)Cot.\phi - p(x-m) - q(x^2-m^2) = 0;$$

en de waarden van x, die aan deze vergelijking voldoen, zijn dan de abscissen der snijpunten van de regte lijn MP met de kegelsnede MAN. Daar de vergelijking door $x - m$ deelbaar is, vindt men voor deze waarden van x onmiddellijk

$$x = m,$$

en $$x = \frac{mCot.^2\phi - 2nCot.\ \phi + (p + qm)}{Cot.^2\phi - q};$$

de eerste behoort tot het snijpunt M, en dus de tweede tot het snijpunt P, zoodat de abscis van het punt P is

$$AC = \frac{mCot.^2\phi - 2nCot.\ \phi + (p + qm)}{Cot.^2\phi - q}, \quad \ldots \quad (4)$$

waaruit nu, daar $MP = \frac{BC}{Sin.\ \phi} = \frac{AB - AC}{Sin.\ \phi}$ is, verder gevonden wordt

$$MP = \frac{1}{Sin.\ \phi}\left\{m - \frac{mCot.^2\phi - 2nCot.\ \phi + (p + qm)}{Cot.^2\phi - q}\right\},$$

dat is na herleiding

$$MP = \frac{2nCot.\ \phi - (p + 2qm)}{(Cot.^2\phi - q)\ Sin.\ \phi}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Digitized by Google

Laat men ϕ in $-\phi$ overgaan, dan gaat MP in MP' over; hierdoor vindt men terstond

$$MP' = \frac{2nCot.\ \phi + (p + 2qm)}{(Cot.^2\phi - q)\ Sin.\ \phi},$$

en bijgevolg is

$$MP + MP' = \frac{4nCot.\ \phi}{(Cot.^2\phi - q)\ Sin.\ \phi} \quad \ldots \quad (6)$$

Daar in deze uitkomst de grootheid m niet meer voorkomt, terwijl q, gelijk zijnde aan de parameter gedeeld door de eerste as, voor gelijkvormige kegelsneden standvastig is, zoo heeft men ook in de kegelsnede MA'N, welke met MAN gelijkvormig is

$$MQ + MQ' = \frac{4nCot.\ \phi}{(Cot.^2\phi - q)\ Sin.\ \phi};$$

gevolgelijk is

$$MP + MP' = MQ + MQ',$$

dus $$MP - MQ = MQ' - MP',$$

of wel $$PQ = P'Q'.$$

Aanmerkingen. 1°. Wanneer de kegelsnede MAN eene parabool is, zoo als in Fig. 53 is voorgesteld, en men trekt door het punt N, evenwijdig met de as, de lijn QQ', welke MP en MP' in Q en Q' snijdt, dan zal PQ = P'Q' zijn. Want de lijnen, welke door de punten M en N evenwijdig met AB getrokken worden, kan men aanmerken als de takken eener parabool, welker as langs AB valt.

2°. Wanneer de kegelsnede MAN eene hyperbool is, zoo als in Fig. 54 is voorgesteld, en men trekt door het punt N, evenwijdig met eene der asymptoten, de lijn QQ', welke MP en MP' in Q en Q' snijdt, dan zal PQ = P'Q' zijn. Want de lijnen, door de punten M en N evenwijdig met de asymptoten getrokken, kan men aanmerken als de takken eener hyperbool, welke met de hyperbool MAN gelijkvormig is.

3°. Men beschrijve, gelijkvormig met de aan MAN (Fig. 54) toegevoegde hyperbool, eene hyperbool RNR', die MN tot eerste as heeft, en de lijnen MP en MP' in R en R' snijdt, dan zal PR = P'R' zijn.

Want de halve eerste as der hyperbool RNR' is n; stelt men nu de halve eerste en tweede assen der hyperbool MAN door a en b voor, dan is de halve tweede as der hyperbool

Digitized by Google

RNR′ gelijk aan $\frac{a}{b} \times n$. Hierdoor vindt men gemakkelijk

$$MR = MR' = \frac{2na^2 Cos.\ \phi}{a^2 Cos.^2\phi - b^2 Sin.^2\phi};$$

en stelt men in de formule (6) voor q hare waarde $\frac{b^2}{a^2}$, dan geeft zij

$$MP + MP' = \frac{4na^2 Cos.\ \phi}{a^2 Cos.^2\phi - b^2 Sin.^2\phi};$$

bijgevolg is $MR + MR' = MP + MP'$,
of wel $MR - MP = MP' - MR'$,
dat is $PR = P'R'$.

4°. Laat RNR′ (Fig. 54) eene hyperbool zijn, welke MN tot eerste as heeft. Trekt men nu uit M naar eenig punt R dezer hyperbool de lijn MR, en vervolgens uit N, evenwijdig aan hare asymptoten, de lijnen NQ en Nq, welke MR in Q en q ontmoeten, dan zal RQ = Rq zijn.

Want, men kan zich altijd eene hyperbool MAN verbeelden, welker eerste as regthoekig door het midden van MN gaat, en met welker toegevoegde hyperbool, de hyperbool RNR′ gelijkvormig is, terwijl men verder de lijn MR′ kan trekken, die aan de andere zijde van MN, met MN een even grooten hoek maakt als MR. Merkt men nu op, dat de lijnen NQ en Nq, evenwijdig met de asymptoten der hyperbool RNR′ getrokken, ook evenwijdig met de asymptoten der hyperbool MAN zullen zijn, dan is volgens de 2de aanmerking

$$PQ = P'Q',$$

volgens de 3de $PR = P'R'$,
en dus ook $QR = Q'R'$;
voorts is $MR = MR'$,
$Mq = MQ'$,
dus ook $qR = Q'R'$,
en bijgevolg $QR = qR$.

Men ziet ligtelijk, dat hieruit eene zeer eenvoudige constructie eener hyperbool volgt, waarvan de beide assen en dus ook de rigtingen der asymptoten gegeven zijn.

Digitized by Google

LXXX. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Van twee gelijkvormige ellipsen, liggen de groote assen AA′ ***en*** BB′ (Fig. 55) ***langs eene zelfde regte lijn. Brengt men nu door de punten*** A ***en*** B ***eene derde gelijkvormige ellips, welker groote as evenwijdig met*** AB ***loopt, en welke de eerste ellips in de punten*** A ***en*** E ***de tweede in de punten*** B ***en*** F ***snijdt, dan zal de lijn, die door de punten*** E ***en*** F ***getrokken wordt, door een bepaald punt*** P ***gaan, hetwelk ten opzigte van de beide eerstgenoemde ellipsen op dezelfde wijze gelegen is. Men vraagt naar het bewijs.***

Opgelost *door* H. van Blanken *en* J. S. Sprijer.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat in elk der bedoelde gelijkvormige ellipsen, de verhouding van de groote tot de kleine as als $1 : r$ zijn; indien men dan den top A tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aanneemt, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ en $AB = 2m$ stelt, is de vergelijking der ellips AA′

$$y^2 = r^2(2ax - x^2), \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (1)$$

en de vergelijking der ellips BB′

$$y^2 = r^2(2b(x - 2m) - (x - 2m)^2). \quad . \quad . \quad (2)$$

Laat ABEF eene ellips zijn, gelijkvormig aan de beide voorgaanden, en waarvan de groote as evenwijdig met AB loopt; indien men dan uit het middelpunt O dezer ellips eene loodlijn OG op AB trekt, is $AG = BG = m$, en zoo men verder $OG = n$ stelt, is de vergelijking der ellips ABEF

$$y^2 - 2ny = r^2(2mx - x^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Door de vergelijking (3) van de vergelijking (1) af te trekken, vindt men, voor de vergelijking der koorde AE,

$$ny = r^2(a - m)x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

terwijl dan verder uit (1) en (4), voor de coördinaten van het snijpunt E, gevonden wordt

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2an^2}{n^2 + r^2(a - m)^2} \\ \text{en} \qquad y' &= \frac{2r^2an(a - m)}{n^2 + r^2(a - m)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Door de vergelijking (3) van de vergelijking (2) af te trekken, vindt men eveneens, voor de vergelijking der koorde BF,

Digitized by Google

$$ny = r^2(b + m)(x - 2m); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wordende verder uit (2) en (6), voor de coördinaten van het snijpunt F, gevonden

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{2(b + m)(n^2 + r^2m(b + m))}{n^2 + r^2(b + m)^2} \\ \text{en} \qquad y'' &= \frac{2r^2bn(b + m)}{n^2 + r^2(b + m)^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wanneer eene lijn door twee punten gaat, welker coördinaten zijn x' en y', x'' en y'', wordt de abscis van het snijpunt dezer lijn met de as der abscissen, in het algemeen uitgedrukt door $\frac{x''y' - x'y''}{y' - y''}$. Indien men dus aan x', y', x'' en y'' de bovenstaande waarden toekent, en P het punt is, waarin AB door de lijn EF gesneden wordt, heeft men

$$AP = \frac{x''y' - x'y''}{y' - y''}$$

en zoo men hierin de waarden (5) en (7) overbrengt, vindt men, na eene ligte herleiding,

$$AP = \frac{2a(b+m)\{n^2(a-b-m)+r^2m(a-m)(b+m)\}}{(a+b)\{n^2(a-b-m)+r^2m(a-m)(b+m)\}},$$

dat is

$$AP = \frac{2a(b + m)}{a + b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Daar nu deze waarde van AP onafhankelijk is van n, zoo volgt hieruit, dat voor alle gelijkvormige ellipsen, die door de punten A en B gaan en wier groote as evenwijdig met AB is, de lijn die door de snijpunten E en F getrokken wordt, door hetzelfde bepaalde punt P gaat.

Voorts is

$$B'P = AB + BB' - AP = 2m + 2b - \frac{2a(b+m)}{a+b},$$

of na herleiding

$$B'P = \frac{2b(b + m)}{a + b}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

uit (8) en (9) volgt derhalve

$$AP : B'P = a : b.$$

Het punt P is dus in de ellips AA', ten opzigte van den top A, eveneens gelegen, als in de ellips BB', ten opzigte van den top B', en is bijgevolg een gelijkvormigheidspunt der beide ellipsen.

Digitized by Google

AANMERKINGEN. 1°. De ellipsen AA′ en BB′ hebben in het algemeen twee gelijkvormigheidspunten.

Wanneer de ellipsen elkander snijden, dan ligt het eene punt binnen de beide ellipsen; en het andere buiten dezelve, in het ontmoetingspunt van de gemeenschappelijke raaklijnen met de as.

Ligt de eene ellips geheel binnen de andere, dan liggen de gelijkvormigheidspunten beide binnen de kleinste ellips; en hebben in dit geval de ellipsen hetzelfde middelpunt, dan vallen de beide gelijkvormigheidspunten in het gemeenschappelijke middelpunt.

Zijn de ellipsen geheel buiten elkander gelegen, zoo als in Fig. 56 is voorgesteld, dan liggen ook de gelijkvormigheidspunten P en P′ buiten de ellipsen, en wel in de uitwendige en inwendige gemeenschappelijke raaklijnen MN en M′N′.

Dit laatste geval heeft plaats, wanneer a negatief is; de waarde van AP wordt alsdan

$$AP = \frac{-2a(b+m)}{b-a};$$

het punt P ligt dus nu in het ontmoetingspunt van de uitwendige gemeenschappelijke raaklijk met de as.

De ellipsen liggen ook, zoo als in Fig. 56, buiten elkander, wanneer m grooter is dan a, zijnde alsnu in deze figuur A′ de oorsprong der coördinaten. Beschrijft men, onder de gestelde voorwaarden, door de punten A′ en B, de ellips A′E′BF′, dan zal de lijn E′F′, welke door de snijpunten E′ en F′ wordt getrokken, door het punt P′ gaan, waarin de inwendige gemeenschappelijke raaklijn de as doorsnijdt.

2°. Een geheel bijzonder geval verkrijgt men door $b = \infty$ te nemen, als wanneer, voor alle eindige waarden van a en m, $AP = 2a$ wordt.

In dit geval wordt de ellips BB′ eene regte lijn, welke loodregt op de groote as der ellips AA′ is getrokken.

Rigt men dus uit eenig punt B (of b) van de groote as eener ellips AA′ (Fig. 57) eene loodlijn BF (of bf) op, en beschrijft men vervolgens door de punten A en B (of A en b) eene ellips ABF (of Abf), welke gelijkvormig is met de ellips AA′ en waarvan de groote as evenwijdig met de as

Digitized by Google

AA′ loopt; indien dan deze nieuwe ellips, de ellips AA′ en de genoemde loodlijn respectievelijk in de punten E en F (of e en f) snijdt, dan zal de lijn, welke door de snijpunten E en F (of e en f) wordt getrokken, door den top A′ der ellips AA′ gaan.

3°. Wanneer de ellipsen AA′ en BB′ elkander, zoo als in Fig. 55 is voorgesteld, in de punten C en D snijden, dan vindt men ligtelijk, dat het snijpunt der koorden AE en BF op de koorde CD is gelegen. Dit is echter slechts een bijzonder geval van de volgende algemeene stelling: ***Wanneer drie gelijkvormige kegelsneden, welker eerste assen evenwijdig loopen, elkander twee aan twee snijden, en dus ook twee aan twee eene gemeenschappelijke koorde hebben, dan gaan deze drie koorden door een zelfde punt.***

LXXXI. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Van eene meetkunstige reeks van vier termen, is de som der beide uiterste 308, en die der beide middelste 132. Welke is deze reeks?

Opgelost *door* J. H. van Kooten, I. M. Goudsmit, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, A. A. Moll, J. S. Speijer, J. A. Stamkart, R. van de Werrd, J. B. Geel, P. Krom en L. Vervoen, Jz.

Oplossing van J. H. van Kooten.

Indien men de reeks voorstelt door

$$x,\ xy,\ xy^2 \text{ en } xy^3,$$

dan is volgens de opgave

$$x(1+y)^3 = 308 \quad \ldots\ldots\ (1)$$

en

$$xy(1+y) = 132. \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Zoo men de vergelijking (1) door de vergelijking (2) deelt, komt er

$$\frac{1-y+y^2}{y} = \tfrac{7}{3},$$

dat is

$$1 - y + y^2 = \tfrac{7}{3}y,$$

of wel

$$y^2 - \tfrac{10}{3}y + 1 = 0,$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$y = 3 \text{ of } y = \tfrac{1}{3};$$

en door deze waarde van y in (2) te substitueren, verkrijgt men

$$12x = 132 \text{ of } \tfrac{4}{3}x = 132,$$

Digitized by Google

waaruit wederc onmiddellijk gevonden wordt

$$x = 11 \text{ of } x = 297.$$

De gevraagde reeks is derhalve

11, 33, 99 en 297; of 297, 99, 33 en 11.

LXXXII. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Welke kwadraatgetallen, kleiner dan 1000, bestaan uit cijfers, die zelve kwadraten zijn?

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Speijer, G. Koster, A. A. Moll, J. H. van Kooten, J. B. Geel, J. Heemskerk, Az., P. Krom, L. Verveen, Jz. *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Een bloote inzage van eene tafel van kwadraatgetallen, doet zien, dat aan de gestelde voorwaarden geene andere getallen voldoen dan: 1, 4, 9, 49, 100, 144, 400, 441 en 900.

Wenscht men echter de zaak algemeener te beschouwen, zoo stelle men het grondtal van het talstelsel door a, en de cijfers van het kwadraatgetal door x^2, y^2 en z^2 voor, dan is in eenheden het kwadraatgetal zelve $a^2x^2+ay^2+z^2$, zoodat men kan stellen

$$a^2x^2 + ay^2 + z^2 = (ax + z + m)^2,$$

welke vergelijking gemakkelijk herleid wordt tot

$$ay^2 = 2axz + 2(ax + z)m + m^2. \quad . \quad . \quad (1)$$

Neemt men $m = 0$, dan heeft men

$$y^2 = 2xz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

terwijl men kan nemen

$$y^2 = 0, 4, 16, \textit{ enz. tot beneden } a.$$

Neemt men $y^2 = 0$, dan moeten volgens (2) ook x of z een van beide nul zijn; nevens $y^2 = 0$ en $x = 0$, kan men dan nemen

$$z = 0, 1, 2, 3, \textit{ enz. tot beneden } \sqrt{a},$$

terwijl men, nevens $y^2 = 0$ en $z = 0$, kan nemen

$$x = 0, 1, 2, 3, \textit{ enz. tot beneden } \sqrt{a};$$

en neemt men $y^2 = 4$, dan zal men volgens (2) moeten nemen $x = 1$ en $z = 2$, of $x = 2$ en $z = 1$.

Reeds hierdoor bekomt men voor $a^2x^2+ay^2+z^2$ de getallen

0, 1, 4, 9, 100, 400, 900, 144, 441,

Digitized by Google

welke, onafhankelijk van a zijnde, niet alleen in het tientallig — maar in elk talstelsel kwadraten zijn. Hiervan zou men echter in het twee-, drie- of viertallig stelsel de getallen, waarin de cijfers 4 en 9 voorkomen, moeten weglaten; desgelijks, in het vijf- tot negentallig stelsel, die, waarin de 9 voorkomt; terwijl in het zeventien- tot vierentwintigtallig stelsel, bij de boven opgegevene getallen nog zouden behooren

$$|16|,\ 16|0|0,\ 4|16|16|,\ 16|16|4;$$

en zoo vervolgens.

Neemt men echter m niet gelijk nul, dan zijn de begeerde kwadraatgetallen afhankelijk van a, en zij zullen dan wel in één, maar niet in elk talstelsel kwadraten zijn.

Neemt men bij voorbeeld $x = 0$, dan wordt de vergelijking (1)

$$ay^2 = 2xm + m^2$$

of

$$ay^2 = (m + 2x)m;$$

alsnu neme men, daar $y^2 < a$ moet zijn,

$$y^2 = m \text{ en } a = m + 2x,$$

dan is

$$2x = a - y^2.$$

Voor $a = 3$, is $y^2 = 1$ en $2x = 2$, dus $x^2 = 1$;
» $a = 5$, » $y^2 = 1$ » $2x = 4$, » $x^2 = 4$;
» $a = 6$, » $y^2 = 4$ » $2x = 2$, » $x^2 = 1$;
» $a = 8$, » $y^2 = 4$ » $2x = 4$, » $x^2 = 4$;
» $a = 10$, » $y^2 = 4$ » $2x = 6$, » $x^2 = 9$;
» $a = 11$, » $y^2 = 9$ » $2x = 2$, » $x^2 = 1$;
» $a = 13$, » $y^2 = 9$ » $2x = 4$, » $x^2 = 4$;
» $a = 15$, » $y^2 = 9$ » $2x = 6$, » $x^2 = 9$;

enz.;

men heeft alzoo voor de begeerde kwadraatgetallen:

in het 3-tallig stelsel, 11;
» » 5 » » , 14;
» » 6 » » , 41;
» » 8 » » , 44;
» » 10 » » , 49;
» » 11 » » , 91;
» » 13 » » , 94;
» » 15 » » , 99;

enz.

Digitized by Google

Is a zelf een kwadraat, dan kunnen x en z beide nul zijn; zoo heeft men voor de begeerde kwadraatgetallen:

in het 4-tallig stelsel, 10;
" " 9 " " , 10 en 40;
" " 16 " " , 10, 40 en 90;
enz.

In het $(n^2 - 1)$-tallig stelsel, zal 11 steeds een kwadraat zijn, zoo als dit voor het drie-, acht- en vijftientallig stelsel, reeds uit de boven opgegevene getallen kan blijken.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Door $a = 10$ te nemen, en $z + m = p$ te stellen, gaat de vergelijking (1) over in

$$y^2 = 2px + \frac{p^2 - z^2}{10}; \quad \ldots\ldots (3)$$

neemt men $p^2 = z^2$, dan wordt $y^2 = \pm 2xz$, waaruit, omdat het onderste teeken blijkbaar niet bruikbaar is, even als in de voorgaande oplossing de getallen 0, 1, 4, 9, 100, 400, 900, 144 en 441 gevonden worden. Neemt men echter niet $p^2 = z^2$, dan zal $p^2 - z^2$ door 10 deelbaar moeten wezen, hetgeen vordert, dat men voor p^2 een kwadraatgetal neme, waarvan het cijfer der eenheden gelijk aan z^2 is; terwijl z^2 geene andere waarden dan 0, 1, 4 of 9 kan hebben.

Nevens $z^2 = 0$, zou men uit dien hoofde slechts voor p een positief of negatief veelvoud van 10 kunnen nemen, maar dan zou men voor y^2 òf meer dan 10 òf eene negatieve waarde vinden; alleen zoo men, nevens $z^2 = 0$, $p = -20x$ nam, zou men $y^2 = 0$ vinden, en hierdoor op de getallen 100, 400 en 900 terugkomen.

Nevens $z^2 = 1$, zou men voor p kunnen nemen ± 9, ± 11, ± 19, ± 21, ± 29, *enz.*, van welke waarden het cijfer der eenheden 1 of 9 is. Voor deze waarden van z^2 en p, heeft men: $y^2 = \pm 18x + 8$, $y^2 = \pm 22x + 12$, $y^2 = \pm 38x + 36$, $y^2 = \pm 42x + 44$, $y^2 = \pm 58x + 84$, *enz.*; maar in al deze vergelijkingen is het onmogelijk x zoodanig te nemen, dat y^2 een positief vierkant kleiner dan 10 worde. Alleen voor $p = -41$, zou men hebben $y^2 = -82x + 168$, waarin $x = 2$ genomen kan worden, hetgeen $y^2 = 4$ geeft; zoodat men dan andermaal het getal 441 vindt.

Digitized by Google

Nevens $x^2 = 4$, zou men voor p kunnen nemen ± 8, ± 12, ± 18, ± 22, ± 28, *enz.*, van welke waarden het cijfer der eenheden 2 of 8 is. Voor deze waarden van x^2 en p heeft men: $y^2 = \pm 16x + 6$, $y^2 = \pm 24x + 14$, $y^2 = \pm 36x + 32$, $y^2 = \pm 44x + 48$, $y^2 = \pm 56x + 78$, *enz.*; maar ook in al deze vergelijkingen, kan men voor x geene waarde nemen, die aan y^2 de vereischte waarde geeft, met uitzondering van $y^2 = \pm 44x + 48$; hierin kan $x = 1$ genomen worden, waardoor $y^2 = 4$ wordt en men het getal 144 terugvindt.

Nevens $x^2 = 9$, zou men voor p kunnen nemen ± 7, ± 13, ± 17, ± 23, *enz.*, van welke waarden het cijfer der eenheden 3 of 7 is. Voor deze waarden van x^2 en p heeft men: $y^2 = \pm 14x + 4$, $y^2 = \pm 26x + 16$, $y^2 = \pm 34x + 28$, *enz.*, welke vergelijkingen wederom geene behoorlijke waarden voor y^2 kunnen opleveren, met uitzondering van de eerste; daarin $x = 0$ nemende, wordt $y^2 = 4$, en verkrijgt men alzoo het getal 49.

De verlangde kwadraatgetallen worden dus, voor het tientallig stelsel, gemakkelijk uit de beschouwing der vergelijking (3) gevonden.

LXXXIII. Voorstel.

Door L. Verveen, Jz.

Een getal wordt in twee talstelsels, wier grondtallen 2 verschillen, uitgedrukt door 3684 en 2534. Men vraagt dit getal in het tientallig stelsel uit te drukken, alsmede de grondtallen der beide andere stelsels te vinden.

Opgelost *door* L. Verveen, Jz., J. B. Gebl, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., J. H. van Kooten, G. Koster, P. Krom, A. A. Moll, J. S. Sprijer, J. A. Stamkart *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* L. Verveen, Jz.

Stel het grondtal van het stelsel, waarin het bedoelde getal door 3684 wordt uitgedrukt, door x voor, dan is het grondtal van het andere stelsel, waarin hetzelfde getal door 2534 uitgedrukt wordt, $x + 2$. Dit getal wordt dus in het tientallige stelsel voorgesteld, door elk der beide vormen.

$$3x^3 + 6x^2 + 8x + 4$$

en $$2(x + 2)^3 + 5(x + 2)^2 + 3(x + 2) + 4.$$

Digitized by Google

Hieruit volgt de vergelijking

$$-3x^3+6x^2+8x+4=2(x+2)^3+5(x+2)^2+3(x+2)+4,$$

welke dadelijk herleidbaar is tot

$$x^3 - 11x^2 - 39x - 42 = 0.$$

Stelt men nu $x = y + 3\frac{2}{3}$, dan verandert deze vergelijking in

$$y^3 - 79\frac{1}{3}y - 283\frac{16}{27} = 0,$$

waaruit door de bekende formule van CARDANUS gevonden wordt

$$y = 10\frac{1}{3};$$

derhalve is dan $x = 10\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} = 14$,

zoodat 14 en 16 de grondtallen der talstelsels zijn, waarin het bedoelde getal door 3684 en 2534 uitgedrukt wordt.

Dit getal is dan in het tientallige stelsel

$$3.14^3+6.14^2+8.14+4=2.16^3+5.16^2+3.16+4=9524.$$

LXXXIV. VOORSTEL.

Door L. VERVEEN, Jz.

Welk getal van drie cijfers, die in volgorde eene rekenkunstige reeks vormen, heeft de eigenschap, dat de som van hetzelve met al deszelfs omzettingen een getal is van vier cijfers, waarvan het voorste cijfer met het cijfer der honderdtallen, het achterste cijfer met het cijfer der tientallen, en elk der beide middelste cijfers met het cijfer der eenheden van het bedoelde getal overeenkomt?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. B. GEEL, J. A. HANSEN, J. HEEMSKERK, Az., G. KOSTER, A. A. MOLL, J. A. STAMKART, R. VAN DE WEERD, L. VERVEEN, Jz., J. H. VAN KOOTEN *en* P. KROM.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laten de drie cijfers voorgesteld worden door x, $x + y$ en $x + 2y$, zoo is het getal

$$100x + 10(x + y) + (x + 2y);$$

en de som van dit getal met al deszelfs omzettingen is dan (Zie VOORSTEL VII)

$$222\{x + (x + y) + (x + 2y)\} \text{ of } 666(x + y).$$

Volgens de opgegevene voorwaarde, is deze som ook een getal van vier cijfers, voorgesteld door

$$1000x+100(x+2y)+10(x+2y)+x+y \text{ of } 1111x+221y;$$

men heeft dus de vergelijking

Digitized by Google

$$666x + 666y = 1111x + 221y,$$

waaruit volgt $445y = 445x$

of $y = x.$

De cijfers van het begeerde getal zijn dan x, $2x$ en $3x$; en daar dit laatste cijfer niet grooter dan 9 kan zijn, kan men slechts $x = 1$, 2 of 3 nemen. De getallen, die aan de vraag voldoen, zijn dus 123, 246 en 369.

LXXXV. Voorstel.

Door P. Krom.

Men vraagt naar twee getallen, die 6 verschillen; terwijl het product van de som hunner kwadraten met het verschil hunner kuben 176076 bedraagt.

Opgelost *door* P. Krom, J. B. Geel, I. M. Goudsmit, J. A. Hansen, J. Herrmskerk, Az., G. Koster, A. K. Moll, J. S. Speijer, J. A. Stamkart, R. van de Weerd, J. H. van Kooten *en* L. Verveen, Jz.

Oplossing *van* P. Krom.

Stellen wij de gevraagde getallen door $x + 3$ en $x - 3$ voor, dan is de som hunner kwadraten

$$(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = 2(x^2 + 9)$$

en het verschil hunner kuben

$$(x + 3)^3 - (x - 3)^3 = 18(x^2 + 3),$$

zoodat wij hebben de vergelijking

$$36(x^2 + 9)(x^2 + 3) = 176076$$

of, na deeling door 36,

$$(x^2 + 9)(x^2 + 3) = 4891.$$

Hieruit vloeit achtervolgens voort:

$$x^4 + 12x^2 + 27 = 4891,$$

$$x^4 + 12x^2 = 4864,$$

$$x^2 = -6 \pm \sqrt{(36 + 4864)} = -6 \pm 70,$$

dat is $x^2 = 64$ of $x^2 = -76$,

welke laatste waarde echter blijkbaar vervallen moet, indien men bestaanbare getallen begeert.

Wij hebben dus $x^2 = 64$, en zoo men positieve getallen begeert $x = 8$; weshalve dan de gevraagde getallen zijn: 11 en 5.

Digitized by Google

LXXXVI. Voorstel.

Door P. Krom.

Vier getallen te vinden, welke eene gewone evenredigheid uitmaken; zoodat de som der termen 78, de som hunner vierkanten 2522, en het gedurig product der termen 32400 bedraagt.

Opgelost *door* J. A. Stamkart, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., G. Koster, P. Krom, A. A. Moll, J. S. Spijer, L. Verveen, Jz., R. van de Weerd en J. H. van Kooten.

Oplossing *van* J. A. Stamkart.

Stellen wij, dat de gevraagde evenredigheid zij

$$x : y = z : u,$$

dan komen er, naar den aard van het voorstel, de volgende vergelijkingen:

$$xu = yz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x + y + z + u = 78, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2522, \quad \ldots \quad (3)$$

$$xyzu = 32400. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De waarde van xu volgens (1), overbrengende in (4) komt er

$$y^2z^2 = 32400,$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{array}{l} yz = 180 \\ \text{en dus ook} \quad xu = 180 \end{array}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Trekkende (3) af van het vierkant van (2), zoo komt er, na deeling door 2,

$$xy + xz + xu + yz + yu + zu = 1781,$$

en hiervan wederom volgens (5) aftrekkende

$$xu + yz = 360,$$

blijft er over

$$xy + xz + yu + zu = 1421$$

of

$$(x + u)(y + z) = 1421. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

De vergelijking (1) schrijvende in den vorm

$$(x + u) + (y + z) = 78,$$

vindt men, door dezelve met (6) te verbinden,

$$\left.\begin{array}{l} x + u = 49, \\ \text{en} \quad y + z = 29 \end{array}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

en door eindelijk elk dezer laatste vergelijkingen met eene

Digitized by Google

der vergelijkingen (5) te verbinden, vindt men

$$x = 45,\ u = 4,\ y = 20 \text{ en } z = 9.$$

De gevraagde evenredigheid is derhalve

$$45 : 20 = 9 : 4.$$

Hadden wij in plaats van van (5) genomen $yz = -180$ en dus ook $xu = -180$, dan zou de vergelijking (6) geworden zijn

$$(x + u)(y + z) = 2141,$$

en deze met (1) in verband gebragt, zou slechts onbestaanbare waarden voor $x + u$ en $y + z$ opgeleverd hebben. Daarom namen wij slechts $yz = +180$.

Verplaatst men de termen der gevondene evenredigheid, zoodanig, dat slechts het product der uiterste en dat der middelste termen 180 blijft, dan blijft zij aan het voorstel beantwoorden; want deze verplaatsingen kunnen noch in de som der termen, noch in de som hunner vierkanten, noch in hun gedurig product verandering te weeg brengen. Deze verplaatste evenredigheden zullen almede door onze oplossing worden opgeleverd, indien men slechts bedenkt, dat de waarden van $x + u$ en $y + z$, volgens (7), met elkander mogen verwisseld worden, en dat daarna eene dergelijke verwisseling mag plaats hebben van de waarden van x en u uit die van $x + u$ en xu, alsmede van de waarden van y en z uit die van $y + z$ en yz afgeleid.

LXXXVII. Voorstel.

Door P. Krom.

Van eene rekenkunstige reeks, is de som der vier laatste termen 212, ***de som der vijf daaraan voorafgaande termen*** 175 ***en de som der dan nog overige termen*** 78. ***Welke is de eerste term, het verschil en het aantal termen dezer reeks?***

Opgelost *door* P. Krom, J. A. Hansen, J. S. Speijer, J. B. Geel, J. H. van Kooten, A. A. Moll, J. A. Stamkart, R. van de Weerd, G. Koster *en* J. Hekmskerk, Az.

Oplossing *van* P. Krom.

Stellen wij, dat de reeks uit $n + 9$ termen bestaat, dat de eerste term x en het verschil y zij, dan zijn de n eerste termen:

$$x,\ x + y,\ x + 2y,\ enz.\ldots.\ tot\ x + (n - 1)y;$$

Digitized by Google

de vijf daaropvolgende termen

$x + ny$, $x + (n + 1)y$, *enz.....* *tot* $x + (n + 4)y$,

en de vier laatste termen

$x + (n + 5)y$, $x + (n + 6)y$, *enz.....* *tot* $x + (n + 8)y$.

Voor de sommen dezer groepen van termen, heeft men dan:

$$\tfrac{5}{2}n\{x + x + (n - 1)y\} = 78,$$

$$\tfrac{5}{2}\{x + ny + x + (n + 4)y\} = 175,$$

en $$\tfrac{4}{2}\{x + (n + 5)y + x + (n + 8)y\} = 212,$$

welke vergelijkingen dadelijk herleidbaar zijn tot:

$$2xn + yn^2 - yn = 156, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x + yn + 2y = 35, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en $$2x + 2yn + 13y = 106. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Zoo men het dubbel van (2) aftrekt van (3), komt er

$$9y = 36,$$

waaruit dadelijk volgt

$$y = 4;$$

en deze waarde van y in (1) en (2) substituerende, komt er

$$xn + 2n^2 - 2n = 78 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

en $$x + 4n = 27. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Uit (5) volgt $x = 27 - 4n$, zoodat men, deze waarde voor x in (4) substituerende, verkrijgt

$$n^2 - \tfrac{3}{2}n = -39;$$

hieruit vindt men

$$n = 6\tfrac{1}{2} \text{ of } n = 6,$$

waarvan alleen de laatste waarde bruikbaar is; terwijl men dan verder volgens (5) heeft

$$x = 27 - 4n = 3.$$

De eerste term is dus $x = 3$, het verschil $y = 4$, en het aantal termen $n + 9 = 15$; de reeks is alzoo

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55 en 59,

zijnde naar behooren de som der vier laatste termen 212, die der daaraan voorafgaande vijf termen 175, en die van de dan nog overige termen 78.

LXXXVIII. Voorstel.

Door P. Krom.

Van eene meetkunstige reeks gegeven zijnde, dat de som der termen 93, de som van hunne vierkanten 3069, en de som van hunne derde magten 126387 is, vraagt men die reeks te vinden.

Digitized by Google

Opgelost *door* P. Krom, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. H. van Kooten, G. Koster, A. A. Moll, J. S. Speijer, J. A. Stamkart, R. van de Weerd en J. Heemskerk, Az.

Oplossing *van* P. Krom.

Stellen wij voor den eersten term der reeks x, voor hare gemeene reden y, en voor het aantal harer termen n, dan hebben wij:

voor de som der termen,

$$\frac{x(y^n - 1)}{y - 1} = 93, \text{ of } \frac{y^n - 1}{y - 1} = \frac{93}{x}; \quad . \quad . \quad (1)$$

voor de som van de vierkanten der termen,

$$\frac{x^2(y^{2n} - 1)}{y^2 - 1} = 3069, \text{ of } \frac{y^{2n} - 1}{y^2 - 1} = \frac{3069}{x^2}; \quad . \quad (2)$$

en voor de som van hunne derde magten

$$\frac{x^3(y^{3n} - 1)}{y^3 - 1} = 126387, \text{ of } \frac{y^{3n} - 1}{y^3 - 1} = \frac{126387}{x^3}; \quad . \quad (3)$$

zoodat nu, uit deze drie vergelijkingen, de waarden der drie onbekenden x, y en n moeten opgespoord worden.

Deelen wij (2) door (1), dan komt er

$$\frac{y^n + 1}{y + 1} = \frac{33}{x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en zoo wij (3) door (1) deelen, vinden wij

$$\frac{y^{2n} + y^n + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{1359}{x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Uit (4) volgt onmiddellijk

$$y^n + 1 = \frac{33y + 33}{x}$$

en uit (1) $$y^n - 1 = \frac{93y - 93}{x},$$

zoodat wij door aftrekking dezer waarden verkrijgen

$$2 = \frac{126 - 60y}{x}$$

of $$x = 63 - 30y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (5) volgt onmiddellijk

$$y^{2n} + y^n + 1 = \frac{1359y^2 + 1359y + 1359}{x^2}$$

en uit (2)

Digitized by Google

$$y^{2n} - 1 = \frac{3069y^2 - 3069}{x^2},$$

waaruit wederom door aftrekking gevonden wordt

$$y^n + 2 = \frac{4428 + 1359y - 1710y^2}{x^2}$$

en hiervan andermaal, de uit (4) voortvloeijende waarde

$$y^n + 1 = \frac{33xy + 33x}{x^2}$$

aftrekkende, komt er

$$1 = \frac{4428 + 1359y - 33x - 33xy - 1710y^2}{x^2}$$

of $x^2 = 4428 + 1359y - 33x - 33xy - 1710y^2$;
hierin voor x de waarde (6) substituerende, vinden wij, na behoorlijke ontwikkeling, rangschikking en herleiding,

$$y^2 - \tfrac{1}{2}y + 1 = 0,$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$y = 2 \text{ of } y = \tfrac{1}{2}.$$

Nemen wij $y = 2$, dan is volgens (6) $x = 3$; voor deze waarden van x en y, gaat vervolgens (1) over in

$$\frac{2^n - 1}{1} = \frac{93}{3} \text{ of } 2^n = 32,$$

waaruit volgt $n = 5$; en de gevraagde reeks is dan:

3, 6, 12, 24 en 48.

Nemen wij echter $y = \frac{1}{2}$, zoo is volgens (6) $x = 48$, zoodat dan (1) overgaat in

$$\frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{93}{48} \text{ of } (\tfrac{1}{2})^n = 1 - \frac{93}{96} = \frac{1}{32},$$

waaruit almede $n = 5$ volgt; de gevraagde reeks wordt hierdoor:

48, 24, 12, 6 en 3.

LXXXIX. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Op de zijden van een' driehoek als middellijnen, zijn buitenwaarts halve cirkels beschreven, en vervolgens zijn aan deze, twee aan twee genomen, de gemeenschappelijke raaklijnen getrokken. Indien nu van deze raaklijnen, de deelen, tusschen de raakpunten begrepen, gegeven zijn, vraagt men, daaruit den driehoek te berekenen en te construeren.

Digitized by Google

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, J. S. SPEIJER, H. W. BLOEM *en* R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Laten A', B' en C' (Fig. 58) de middelpunten zijn der halve cirkels, buitenwaarts op de zijden van eenen driehoek ABC als middellijnen beschreven; laten, van de gemeenschappelijke raaklijnen dezer cirkels twee aan twee genomen, de deelen PP', QQ' en RR' tusschen de raakpunten P en P', Q en Q', R en R' begrepen zijn; zij voorts $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, $PP' = a'$, $QQ' = b'$ en $RR' = c'$, dan komt het er vooreerst op aan a, b en c te berekenen, indien a', b' en c' gegeven zijn.

De middelpunten A' en B' met de raakpunten R en R' vereenigd, en vervolgens A'D evenwijdig met RR' getrokken zijnde, is A'RR'D een regthoek; indien dus ook nog A' met B' vereenigd wordt, is A'B'D een regthoekige driehoek, en van deze is niet alleen de schuine zijde A'B' evenwijdig met AB, maar ook is $A'B' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$, terwijl $B'D = B'R' - A'R = B'C - A'C = \frac{1}{2}(b - a)$ is. Hieruit volgt

$$A'D^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}(b-a)^2 = \left\{\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}(b-a)\right\}\left\{\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}(b-a)\right\} =$$
$$= \tfrac{1}{2}(c+b-a) \times \tfrac{1}{2}(c+a-b) = (s-a)(s-b),$$

maar ook is $A'D^2 = RR'^2 = c'^2$,

en dus $(s - a)(s - b) = c'^2$.

Op gelijke wijze blijkt, dat men ook heeft

$$(s - a)(s - c) = b'^2,$$

en $$(s - b)(s - c) = a'^2.$$

Zoo men nu deze drie laatste vergelijkingen twee aan twee met elkander vermenigvuldigt, het product door de derde deelt en daarna den vierkantswortel trekt, bekomt men:

$$s - a = \frac{b'c'}{a'},$$

$$s - b = \frac{a'c'}{b'},$$

en $$s - c = \frac{a'b'}{c'};$$

waaruit dan verder volgt:

Digitized by Google

$$a=(s-b)+(s-c)=\frac{a'c'}{b'}+\frac{a'b'}{c'}=\frac{a'(b'^2+c'^2)}{b'c'},$$

$$b=(s-a)+(s-c)=\frac{b'c'}{a'}+\frac{a'b'}{c'}=\frac{b'(a'^2+c'^2)}{a'c'},$$

en $$c=(s-a)+(s-b)=\frac{b'c'}{a'}+\frac{a'c'}{b'}=\frac{c'(a'^2+b'^2)}{a'b'}.$$

Om den driehoek ABC uit de gegevens a', b' en c' te construeren, beschrijve men eenen driehoek PQR, (Fig. 59), waarvan $QR = a'$, $PR = b'$ en $PQ = c'$ is; neme op zijne zijden, zoo noodig verlengd, $PE + QF = PQ = c'$, $PG = RH = PR = b'$, $RI = QK = QR = a'$; trekke vervolgens EE' en FF' evenwijdig met PQ, GG' en HH' evenwijdig met PR, II' en KK' evenwijdig met QR. Dan is:

$QR : PR = QF : PF'$ of $a' : b' = c' : PF'$,
$PR : QR = PE : QE'$ of $b' : a' = c' : QE'$,
$PQ : QR = PG : RG'$ of $c' : a' = b' : RG'$,
$QR : PQ = RH : PH'$ of $a' : c' = b' : PH'$,
$PR : PQ = RI : QI'$ of $b' : c' = a' : QI'$,
$PQ : PR = QK : RK'$ of $c' : b' = a' : RK'$,

waaruit volgt:

$$PF' = PH' = \frac{b'c'}{a'} = s - a,$$

$$QE' = QI' = \frac{a'c'}{b'} = s - b,$$

$$RG' = RK' = \frac{a'b'}{c'} = s - c;$$

hoezeer het eigenlijk genoegzaam was, voor de waarden van $s - a$, $s - b$ en $s - c$, slechts één der beide verkregene lijnen te construeren, levert de dubbele constructie eene meerdere regelmatigheid, en bovendien eene proeve voor hare naauwkeurigheid op. Neemt men nu verder (Fig. 60), op eene onbepaalde lijn, $MA = s - a$, $MB = s - b$, $ML = MN = s - c$, en beschrijft men verder uit A en B, met AN en BL als stralen, cirkelboogjes elkander in C snijdende, dan is ABC de begeerde driehoek; want nu is:

$AB = AM + BM = (s - a) + (s - b) = c$,
$AC = AM + MN = (s - a) + (s - c) = b$,
en $BC = ML + BM = (s - b) + (s - c) = a$.

Digitized by Google

XC. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Wanneer men de middelpunten van twee overstaande zijden eens willekeurigen vierhoeks, met de middelpunten van deszelfs diagonalen vereenigt, zullen de vereenigingslijnen een parallelogram insluiten. En de inhoud van dit parallelogram zal gelijk zijn aan het halve verschil van twee der vier driehoeken, waarin de vierhoek door de diagonalen verdeeld wordt; namelijk van die twee driehoeken, welke aan de gebezigde overstaande zijden liggen. Men vraagt naar het bewijs.

Opgelost *door* R. van de Weerd, H. W. Bloem, J. S. Speijer, J. H. Schäfer en J. A. Hansen.

Oplossing *van* R. van de Weerd.

Zij ABCD (Fig. 61) een willekeurige vierhoek, welks diagonalen AC en BD elkander in I snijden; laten voorts E en F de middelpunten der twee overstaande zijden AD en BC, G en H de middelpunten der diagonalen zijn. Indien wij dan de vereenigingslijnen EG, EH, FG en FH trekken, sluiten zij eenen vierhoek EHFG in.

Dewijl in den driehoek ACD de zijden AD en AC door EG middendoorgedeeld worden, is EG evenwijdig met CD; dewijl in den driehoek BCD de zijden BD en BC door HF middendoorgedeeld worden, is ook HF evenwijdig met CD; de lijnen EG en HF zijn derhalve almede onderling evenwijdig. Desgelijks blijkt, dat EH en FG ieder in het bijzonder met AB, en dus ook met elkander evenwijdig zijn; de vierhoek EHFG is dus een parallelogram, waardoor het eerste gedeelte der stelling bewezen is.

Tot het bewijs van het tweede gedeelte, hebben wij:

drieh. AEG $= \frac{1}{4}$ *drieh.* ACD,

drieh. DEH $= \frac{1}{4}$ *drieh.* ABD,

drieh. CGF $= \frac{1}{4}$ *drieh.* ABC,

en *drieh.* BHF $= \frac{1}{4}$ *drieh.* BCD;

want de zijden dezer gelijkvormige driehoeken staan tot elkander in reden als 1 tot 2. De som der twee eerste, en die der twee laatste vergelijkingen nemende, vinden wij

Digitized by Google

*drieh.*AEG+*drieh.*DEH=½(*drieh.*ACD+*drieh.*ABD)
en *drieh.*CGF+*drieh.*BHF=½(*drieh.*ABC+*drieh.*BCD);
maar hiervoor kunnen wij schrijven
*dr.*ADI+*vierh.*EHIG=½*dr.*ADI+¼(*dr.*DIC+*dr.*AIB)
en *dr.*BCI—*vierh.*FHIG=½*dr.*BCI+¼(*dr.*DIC+*dr.*AIB),
zoodat wij, deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, verkrijgen
*dr.*ADI—*dr.*BCI+*vierh.*EHIG+*vierh.*FHIG=½*dr.*ADI—½*dr.*BCI,
of *vierh.*EHIG+*vierh.*FHIG=½*dr.*BCI—½*dr.*ADI,
dat is *parallelogram* EHFG=½(*drieh.*BCI—*drieh.*ADI);
hetgeen bewezen moest worden.

AANMERKINGEN *uit de overige oplossingen.*

1°. Indien de middelpunten E' en F' der overstaande zijden AB en CD, met de punten G en H vereenigd worden, is almede E'HF'G een parallelogram, en men heeft
parallelogram E'HF'G=½(*drieh.*ABI—*drieh.*CDI).

2°. Zijn AB en CD evenwijdig, dan vallen de vier punten E, H, F en G in eene zelfde regte lijn, zoodat er dan geen parallelogram EHFG ontstaat; in dit geval is dan ook *drieh.* BCI = *drieh.* ADI. Worden AD en BC evenwijdig, dan gaat even zoo het parallelogram E'HF'G in eene regte lijn over, en dan is *drieh.* ABI = *drieh.* CDI.

3°. Indien het middelpunt van een der diagonalen, bij voorbeeld het midden G van AC, in het snijpunt I der beide diagonalen valt, zoo als in Fig. 62 is voorgesteld, heeft men
drieh. BCI = *drieh.* ABI en *drieh.* ADI = *drieh.* CDI,
dus ook
drieh. BCI — *drieh.* ADI = *drieh.* ABI — *drieh.* CDI,
en bijgevolg
parallelogram EHFG = *parallelogram* E'HF'G.

4°. Indien men onderstellen wilde, dat de middelpunten G en H der diagonalen beide, in derzelver snijpunt I vielen, zouden deze diagonalen elkander wederkeerig middendoordeelen; de vierhoek ABCD zou dan zelve een parallelogram zijn, en dan zouden de parallelogrammen EHFG en E'HF'G beide slechts regte lijnen zijn, volgens hetgeen onder 2° is aangemerkt.

5°. Het parallelogram EHFG (Fig. 61) zal eene ruit zijn,

Digitized by Google

indien EH = EG is; maar daar AB = 2EH en CD = 2EG is, zullen dan de overstaande zijden AB en CD aan elkander gelijk moeten wezen; zoo als omgekeerd uit de gelijkheid dezer overstaande zijden volgt, dat EHFG eene ruit zal zijn. De beide parallelogrammen EHFG en E'HF'G kunnen niet gelijktijdig ruiten zijn; want hiertoe zou gelijktijdig AB = CD en AD = BC moeten zijn, zoodat dan ABCD zelve een parallelogram, en dus volgens 2° de parallelogrammen EHFG en E'HF'G beide regte lijnen zouden wezen.

6°. Indien men AC en BD als zijden, en daarentegen AB en CD als diagonalen des vierhoeks ABCD aanmerkt, komt dit voorstel volkomen overeen met het CXXXVI. Voorstel van het V. Deel der *Verz. van Wisk. Voorst.*; mits men alsdan wel acht geve op den negatieven toestand der driehoeken. Als men dus dien negatieven toestand behoorlijk in het oog houdt, zal het voorstel, hoezeer gewijzigd, ook doorgaan voor het geval, dat de vierhoek eenen inspringenden hoek heeft.

XCI. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Wanneer men in een' kegel eenen bol beschrijft, blijft er, bij het wegnemen van den bol, een bovenstuk en een onderstuk over. Indien nu de assedriehoek van den kegel een regthoekige gelijkbeenige driehoek is, zal de inhoud van het genoemde onderstuk tot den inhoud van den gehee-len kegel staan, als de hoogte van den kegel tot zijne schuine zijde. Men vraagt naar het bewijs.

Opgelost *door* H. W. Bloem, J. A. Hansen, G. Koster, J. S. Spruijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* H. W. Bloem.

Laat ABC (Fig. 63) de bedoelde assedriehoek en CD de as van den kegel voorstellen, dan is de in dien driehoek beschreven cirkel, welke middelpunt O op de as CD valt, eene centrale doorsnede van den in den kegel beschreven bol; en wanneer men de punten E en F, in welke de gelijke beenen AC en BC van den in C regthoekigen driehoek ABC door genoemden cirkel geraakt worden, met elkander en met het middelpunt O vereenigt, is OFCE een vierkant.

Digitized by Google

Hieruit volgt, dat $CF = OF = OD$ is, terwijl men ook heeft $CD = BD$.

Stelt men nu gemakshalve $BC = p$ en $CD = q$, dan is blijkbaar ook $BF = BD = CD = q$, en men heeft:

$$OD = CF = BC - BF = p - q,$$
$$FG = CG = \tfrac{1}{2}CO = \tfrac{1}{2}(CD - OD) = \tfrac{1}{2}(2q - p),$$
$$CH = CD - 2OD = 3q - 2p,$$
$$GH = CG - CH = \tfrac{1}{2}(3p - 4q).$$

Volgens bekende regels, heeft men verder:

Inh. keg. $ECF = \frac{1}{3}\pi \times CG \times FG^2$,

Inh. bolv. segm. $EHF = \frac{1}{6}\pi \times GH \times (3FG^2 + GH^2)$,

Inh. bol $DEHF = \frac{4}{3}\pi \times OD^3$,

Inh. kegel $ABC = \frac{1}{3}\pi \times CD \times BD^2$;

en hierin voor de verschillende lijnen de boven uitgebragte waarden stellende, vindt men na behoorlijke ontwikkeling en herleiding:

Inh. kegel $ECF = \frac{1}{24}\pi(8q^3 - 12pq^2 + 6p^2q - p^3)$, ... (1)

Inh. bolv. segm. $EHF = \frac{1}{192}\pi(-28q^3 + 57pq^2 - 39p^2q + 9p^3)$, ...(2)

Inh. bol $DEHF = \frac{4}{3}\pi(-q^3 + 3pq^2 - 3p^2q + p^3)$, ... (3)

Inh. kegel $ABC = \frac{1}{3}\pi q^3$. . . . . (4)

Trekt men nu de waarde (2) van de waarde (1) af, zoo komt er

Inh. bovenstuk $CEHF = \frac{1}{24}\pi(64q^3 - 126pq^2 + 84p^2q - 19p^3)$;

dezen inhoud aftrekkende van de waarde (4), vindt men

Inh. onderstuk AEDFB + *Inh. bol* DEHF =
$= \frac{1}{24}\pi(-56q^3 + 126pq^2 - 84p^2q + 19p^3)$

en hiervan wederom de waarde (3) aftrekkende, verkrijgt men

Inh. onderst. $AEDFB = \frac{1}{24}\pi(-24q^3 + 30pq^2 + 12p^2q - 13p^3)$...(5)

Neemt men verder in aanmerking, dat $BC^2 = 2\,CD^2$ of $p^2 = 2q^2$ is, waardoor $12p^2q = 24q^3$ en $13p^3 = 26pq^2$ wordt, zoo ziet men dadelijk, dat in plaats van (5) kan geschreven worden

Inh. onderstuk $AEDFB = \frac{1}{6}\pi pq^2$; . . . (6)

terwijl men desgelijks, omdat $q^2 = \frac{1}{2}p^2$ en dus $q^3 = \frac{1}{2}p^2q$ is, in plaats van (4) kan schrijven

Inh. kegel $ABC = \frac{1}{6}\pi p^2q$. . . . . (7)

Uit (6) en (7) volgt dan eindelijk

Inh. onderstuk AEDFB : *Inh. kegel* $ABC = q : p = CD : BC$,

hetgeen bewezen moest worden.

Digitized by Google

XCII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men heeft eenen driehoek ABC (Fig. 64). ***Buiten dien driehoek zijn twee punten gegeven, waarvan er echter één binnen den hoek*** ABC, ***en één binnen den hoek*** BAC ***ligt. Men vraagt nu in de zijde*** AB ***een derde punt te vinden, zoodanig, dat de lijnen, die de gegevene punten met het gevraagde punt vereenigen, van den gegeven driehoek*** ABC, ***twee driehoeken van gelijken inhoud afsnijden.***

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. Bassan, J. S. Speijer en R. van de Weerd.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Laat ABC (Fig. 64) de driehoek, P en Q de gegevene punten zijn; indien men dan uit P en Q lijnen trekt, die, respectievelijk evenwijdig met AC en BC loopende, de verlengden van AB in P′ en Q′ ontmoeten, kan men als gegevens aannemen: $PP' = p$, $QQ' = q$, $AP' = m$, $BQ' = n$, $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$.

Zij T het begeerde punt, zoodat de lijnen TP en TQ, uit hetzelve naar P en Q getrokken, van den driehoek ABC driehoeken TAM en TBN van gelijken inhoud afsnijden; zoo men dan $AT = x$ en $BT = y$ stelt, zal het er op aankomen, de waarde van x of van y uit de aangenomene gegevens te berekenen; zijnde onmiddellijk

$$x + y = c. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In de gelijkvormige driehoeken TAM en TP′P, is

$$P'T : AT = PP' : AM \text{ of } m + x : x = p : AM;$$

in de gelijkvormige driehoeken TBN en TQ′Q, is

$$Q'T : BT = QQ' : BN \text{ of } n + y : y = q : BN;$$

uit welke evenredigheden volgt

$$AM = \frac{px}{m + x} \text{ en } BN = \frac{qy}{n + y}.$$

Daar de inhouden van twee driehoeken, die eenen gemeenschappelijken hoek hebben, zamengesteld evenredig zijn met de zijden om dien hoek, zoo heeft men

$$\frac{\textit{drieh.}ATM}{\textit{drieh.}ABC} = \frac{AT \times AM}{AB \times AC} \text{ en } \frac{\textit{drieh.}BTN}{\textit{drieh.}ABC} = \frac{BT \times BN}{AB \times BC};$$

wegens de gelijkheid van de inhouden der driehoeken ATM en BTN, volgt uit deze vergelijkingen onmiddellijk

Digitized by Google

$$\frac{AT \times AM}{AC} = \frac{BT \times BN}{BC},$$

of zoo men, voor de hier voorkomende lijnen, de gestelde en gevondene waarden in de plaats stelt,

$$\frac{px^2}{b(m+x)} = \frac{qy^2}{a(n+y)}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Zoo men nu in deze vergelijking, volgens (1) substitueert $y = c - x$, of $x = c - y$, verkrijgt men na herleiding eene der derdemaagtsvergelijkingen

$$x^3 - \frac{(c+n)ap+(2c-m)bq}{ap+bq}x^2 + \frac{(c-2m)bcq}{ap+bq}x + \frac{mbc^2q}{ap+bq} = 0, \ldots (3)$$

of

$$y^3 - \frac{(c+m)bq+(2c-n)ap}{bq+ap}y^2 + \frac{(c-2n)acp}{bq+ap}y + \frac{nac^2p}{bq+ap} = 0, \ldots (4)$$

waaruit men x of y bepalen kan, zoodra de gegevens in getallen uitgedrukt zijn.

Voor het bijzondere geval, dat $m = n = 2c$ en $p = q$ mogt zijn, gaan de vergelijkingen (3) en (4) over in

$$x^3 - \frac{2ac}{a+b}x^2 - \frac{3bc^2}{a+b}x + \frac{2bc^3}{a+b} = 0,$$

en $$y^3 - \frac{3bc}{a+b}y^2 - \frac{3ac^2}{a+b}y + \frac{2ac^3}{a+b} = 0;$$

terwijl deze wederom, voor $a = b$, naar behooren geven

$$x = \tfrac{1}{2}c \text{ en } y = \tfrac{1}{2}c.$$

Voor het bijzondere geval, dat het punt P in de zijde AC mogt gegeven zijn, is $m = 0$ en $AM = p$; de vergelijkingen (3) en (4) worden dan

$$x^3 - \frac{(c+n)ap+2bcq}{ap+bq}x^2 + \frac{bc^2q}{ap+bq}x = 0 \ldots (5)$$

en $$y^3 - \frac{bcq+(2c-n)ap}{bq+ap}y^2 + \frac{(c-2n)acp}{bq+ap}y + \frac{nac^2p}{bq+ap} = 0, \ldots (6)$$

aan deze vergelijkingen voldoen nu de volgens (1) overeenstemmende waarden $x = 0$ en $y = c$, welke echter niet aan het voorstel beantwoorden. Deelt men alzoo (5) door x, en (6) door $y - c$, dan heeft men voor dit geval de vergelijkingen

$$x^2 - \frac{(c+n)ap+2bcq}{ap+bq}x + \frac{bc^2q}{ap+bq} = 0$$

en $$y^2 - \frac{(c-n)ap}{bq+ap}y - \frac{nacp}{bq+ap} = 0,$$

Digitized by Google

waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{(c+n)ap+2bcq \pm \sqrt{\{(c+n)^2a^2p^2+4abcpqn\}}}{2(ap+bq)} \ldots (7)$$

en $$y = \frac{(c-n)ap \pm \sqrt{\{(c+n)^2a^2p^2+4abcpqn\}}}{2(ap+bq)} \ldots (8)$$

In de formule (7) kan slechts het teeken — vóór de wortelgrootheid gebruikt worden; want soo men het teeken + gebruikte, en dan den laatsten term onder het wortelteeken verwaarloosde, zou men $x = c + \frac{acp}{ap+bq}$ of $x > c$ vinden; zonder verwaarlooging van genoemden laatsten term, zou dus zoo veel te meer $x > c$ zijn, hetgeen met den aard des vraagstuks niet overeenkomt. Opdat verder $x + y = c$ zij, zal men dan in (8) slechts het teeken + vóór de wortelgrootheid kunnen bezigen, zoodat men, voor het bijzonder geval, dat $n = 0$ gegeven is, alleen heeft

$$x = \frac{(c+n)ap+2bcq-\sqrt{\{(c+n)^2a^2p^2+4abcpqn\}}}{2(ap+bq)}$$

en $$y = \frac{(c-n)ap+\sqrt{\{(c+n)^2a^2p^2+4abcpqn\}}}{2(ap+bq)}.$$

Was bovendien $n = 0$, zoodat ook nog het punt Q in de zijde BC gegeven en $BN = q$ ware, dan zou men hebben

$$x = \frac{bcq}{ap+bq} \quad \text{en} \quad y = \frac{acp}{ap+bq},$$

hetgeen ook gemakkelijk terstond gevonden wordt, indien men M en N onmiddellijk als de gegevene punten aanneemt.

XCIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Buiten eenen cirkel zijn twee punten gegeven. Men vraagt in den omtrek van dien cirkel een derde punt te vinden, zoodanig, dat van de lijnen, die de gegevene punten met het gevraagde vereenigen, door den cirkel gelijke koorden worden afgesneden.

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. S. SPEIJER, W. L. IVANGH *en* R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten A en B (Fig. 65) de gegevene punten buiten den cirkel, M deszelfs middelpunt en P het te vinden punt van

Digitized by Google

deszelfs omtrek zijn; indien men dan de lijnen AP en BP trekt, den cirkelomtrek in Q en R snijdende, zal PQ = PR wezen.

Trekken wij de lijnen AM en BM, en daarna eenen straal MC, die den hoek AMB in twee gelijke deelen deelt, dan kunnen wij als gegevens aannemen: AM = a, BM = b, CM = r en *hoek* AMC = *hoek* BMC = α; en zoo wij vervolgens uit P door M de middellijn PD trekken en *hoek* CMD = ϕ stellen, zal het ter bepaling van het punt P slechts noodig zijn, den onbekenden hoek ϕ uit de aangenomene gegevens te berekenen.

Uit de gelijkheid der koorden PQ en PR, volgt, dat ook de bogen PQ en PR gelijk zijn; de bogen QD en RD, die hunne aanvulsels tot den halven omtrek zijn, zijn dus mede aan elkander gelijk, en hieruit volgt weder de gelijkheid der hoeken QPD en RPD; wij kunnen dus ook nog *hoek* APM = *hoek* BPM = ψ stellen. In de driehoeken APM en BPM, is dan verder

hoek PAM = *hoek* AMD − *hoek* APM = $\alpha - \phi - \psi$
en *hoek* PBM = *hoek* BMD − *hoek* BPM = $\alpha + \phi - \psi$,
zoodat wij uit die driehoeken kunnen afleiden de evenredigheden

Sin. $(\alpha - \phi - \psi)$: *Sin.* ψ = PM : AM = r : a
en *Sin.* $(\alpha + \phi - \psi)$: *Sin.* ψ = PM : BM = r : b,
of de vergelijkingen

$$a \; Sin. \; (\alpha - \phi - \psi) = r \; Sin. \; \psi \quad . \; . \; . \quad (1)$$

en $$b \; Sin. \; (\alpha + \phi - \psi) = r \; Sin. \; \psi, \quad . \; . \; . \quad (2)$$

waarin de twee onbekenden ϕ en ψ voorkomen.

Uit (1) kunnen wij achtervolgens afleiden:

$a \; Sin. \; (\alpha - \phi) \; Cos. \; \psi - a \; Cos. \; (\alpha - \phi) \; Sin. \; \psi = r \; Sin. \; \psi,$
$a \; Sin. \; (\alpha - \phi) - a \; Cos. \; (\alpha - \phi) \; Tang. \; \psi = r \; Tang. \; \psi,$
en

$$Tang. \; \psi = \frac{a \; Sin. \; (\alpha - \phi)}{r + a \; Cos. \; (\alpha - \phi)}; \quad . \; . \; . \quad (3)$$

uit (2) volgt desgelijks

$$Tang. \; \psi = \frac{b \; Sin. \; (\alpha + \phi)}{r + b \; Cos. \; (\alpha + \phi)}, \quad . \; . \; . \quad (4)$$

zoodat wij, door deze waarden van *Tang.* ψ aan elkander gelijk te stellen, eene vergelijking verkrijgen, waarin ϕ alleen als onbekende voorkomt, namelijk

Digitized by Google

$$\frac{a\ Sin.\ (\alpha - \phi)}{r + a\ Cos.\ (\alpha - \phi)} = \frac{b\ Sin.\ (\alpha + \phi)}{r + b\ Cos.\ (\alpha + \phi)}.$$

Door verdrijving der breuken en verplaatsing der termen, verandert deze vergelijking in

$$ar\ Sin.\ (\alpha - \phi) - br\ Sin.\ (\alpha + \phi) =$$
$$= ab\{Sin.(\alpha+\phi)Cos.(\alpha-\phi) - Sin.(\alpha-\phi)Cos.(\alpha+\phi)\};$$

maar de laatste factor van het tweede lid is niet anders dan de ontwikkeling van $Sin.\{(\alpha + \phi) - (\alpha - \phi)\} = Sin.\,2\phi$, zoodat wij hebben

$$ar\ Sin.\ (\alpha - \phi) - br\ Sin.\ (\alpha + \phi) = ab\ Sin.\ 2\phi$$

of, na ontwikkeling en vereeniging van termen,

$$(a-b)r\,Sin.\alpha\,Cos.\phi - (a+b)r\,Cos.\alpha\,Sin.\phi = 2ab\,Sin.\phi\,Cos.\phi \ldots (5)$$

In deze vergelijking $Sin.\ \phi = \sqrt{(1 - Cos.^2\phi)}$ substituerende, wordt zij

$$(a-b)r\,Sin.\alpha\,Cos.\phi = \{2ab\,Cos.\phi + (a+b)r\,Cos.\alpha\}\sqrt{(1-Cos.^2\phi)},$$

en zoo wij haar vervolgens in het vierkant brengen, komt er, na behoorlijke herleiding en rangschikking,

$$\left.\begin{array}{c} 4a^2b^2\,Cos.^4\phi + 4ab(a+b)r\,Cos.\alpha\,Cos.^3\phi \\ + \{(a+b)^2r^2 - 4abr^2\,Sin.^2\alpha - 4a^2b^2\}\,Cos.^2\phi \\ - 4ab(a+b)r\,Cos.\alpha\,Cos.\phi - (a+b)^2r^2\,Cos.^2\alpha \end{array}\right\} = 0 \ldots (6)$$

Uit deze vierdemagtsvergelijking, kan nu de waarde van $Cos.\ \phi$ door benadering gevonden worden, zoodra de bekenden in getallen gegeven zijn; hierdoor wordt dan ook ϕ zelve bekend, terwijl dan verder door (3) of (4) de waarde van ψ, en vervolgens ook de lengte der gelijke koorden $PQ = PR = 2r\ Cos.\ \psi$ kan worden berekend.

Aanmerkingen van J. Badon Ghijben. 1°. Neemt men op MA een stuk ME, hetwelk derde evenredig is tot MA en MC; desgelijks op MB een stuk MF, hetwelk derde evenredig is tot MB en MC; laat men verder uit E en F loodlijden EG en FH op MC neder, en stelt men $MG = m$, $EG = n$, $MH = p$, $FH = q$, zoo is $ME = \frac{r^2}{a}$, $MF = \frac{r^2}{b}$ en dus

$$m = \frac{r^2}{a}Cos.\alpha,\ n = \frac{r^2}{a}Sin.\alpha,\ p = \frac{r^2}{b}Cos.\alpha,\ q = \frac{r^2}{b}Sin.\alpha,$$

waaruit volgt

$$m + p = \frac{(a+b)r^2\,Cos.\alpha}{ab} \text{ en } n - q = -\frac{(a-b)r^2\,Sin.\alpha}{ab},$$

Digitized by Google

of ook

$$(a+b)rCos.\alpha = \frac{(m+p)ab}{r} \text{ en } (a-b)rSin.\alpha = -\frac{(n-q)ab}{r}.$$

Hierdoor gaat de vergelijking (5) over in

$$2rSin.\phi Cos.\phi + (n-q)Cos.\phi + (m+p)Sin.\phi = 0; \ldots (5')$$

en hieruit vindt men, in plaats van (6), de vierdemagts-vergelijking

$$\left.\begin{array}{l} 4r^2Cos.^4\phi + 4r(m+p)\,Cos.^3\phi \\ +\{(m+p)^2 + (n-q)^2 - 4r^2\}Cos.^2\phi \\ -4r(m+p)Cos.\phi - (m+p)^2 \end{array}\right\} = 0, \ldots (6')$$

waarin men behalve r de vier lijnen m, n, p en q als gegevens kan aanmerken. Men merke echter op, dat deze vier laatste gegevens niet onderling onafhankelijk zijn, maar aan de voorwaarde $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ of $mq = pn$ moeten voldoen.

2°. Neemt men M tot oorsprong van onderling regthoekige coördinaten, en MC als het negatieve deel van de as der abscissen aan, en stelt men dan de coördinaten van het te vinden punt P door x en y voor, zoo is $x = r\,Cos.\phi$ en $y = r\,Sin.\phi$; de vergelijking (5') na met r vermenigvuldigd te zijn, gaat hierdoor over in

$$2xy + (n-q)x + (m+p)y = 0, \ldots (7)$$

hetgeen de vergelijking eener hyperbool is. Zoo men dus deze hyperbool construeert, zal zij door hare snijding met den cirkel het begeerde punt P doen kennen.

In het oog houdende, dat $mq = pn$ is, vindt men, dat aan de vergelijking (7) voldaan wordt door $x = -m$ en $y = -n$, alsmede door $x = -p$ en $y = q$ te nemen; hieruit volgt, dat de genoemde hyperbool door de punten E en F gaat. Voorts voldoen ook $x = 0$ en $y = 0$ aan de vergelijking (7); de hyperbool gaat dus almede door het punt M.

Wanneer men, na de punten E en F vereenigd te hebben, de lijn EF middendoordeelt in O, en uit O de loodlijn OI op MC nederlaat, is blijkbaar O het middelpunt van eenen regthoek EE'FF' en derhalve

$$MI = \tfrac{1}{2}(MG + MH) = \tfrac{1}{2}(m+p),$$
$$OI = \tfrac{1}{2}(FH - EG) = \tfrac{1}{2}(q-n);$$

wil men dus de coördinaten-assen evenwijdig aan zich zelve

Digitized by Google

verplaatsen, zoodat zij door het punt O gaan, dan zal men, de nieuwe coördinaten van eenig punt der hyperbool (7) door x' en y' aanduidende, in de vergelijking (7) moeten substitueren

$$x = x' - \tfrac{1}{2}(m + p) \quad \text{en} \quad y = y' + \tfrac{1}{2}(q - n),$$

waardoor men voor de vergelijking der hyperbool, ten opzigte van die nieuwe assen, verkrijgt

$$x'y' = \tfrac{1}{4}(m + p)(n - q). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieruit blijkt, dat O het middelpunt en EF eene middellijn der hyperbool is; dat lijnen door het punt O evenwijdig met en loodregt op CM getrokken hare asymptoten zijn, en dat alzoo de hyperbool zelve gelijkzijdig is.

3°. Uit het aangevoerde volgt nu deze constructie: trek uit de gegevene punten A en B, naar het middelpunt M van den gegeven cirkel (Fig. 66), lijnen AM en BM den omtrek in K en L snijdende, en deel *hoek* AMB middendoor door eene lijn MC; maak ME derde evenredig tot MA en MK, en MF derde evenredig tot MB en ML; trek EF en deel deze lijn in O middendoor; trek door het punt O eene lijn XX' evenwijdig met CM, en eene lijn YY' loodregt op CM; beschrijf eindelijk eene hyperbool, welke de lijnen XX' en YY' tot asymptoten heeft en door een der punten M, E of F gaat, dan zal deze hyperbool den omtrek des cirkels in het begeerde punt snijden.

De punten A en B buiten den cirkel gegeven zijnde, moeten de punten E en F noodzakelijk binnen den cirkel vallen; de cirkel zal dus door de hyperbool altijd in vier punten P gesneden worden, die alle aan de vraag beantwoorden. Voor één dezer punten, zijn de gelijke koorden werkelijk gedeelten van de lijnen AP en BP; voor de drie overigen kunnen deze gelijke koorden beide of een van beide in het verlengde der lijnen AP en BP vallen. Het bestaan dezer vier punten, stemt overeen met de vier bestaanbare waarden van ϕ, welke de vergelijking (6) moet opleveren.

4°. Voor twee der gevondene punten P, sluit de gelijkheid der koorden de gelijkheid der hoeken APM en BPM in zich; voor de twee andere volgt uit de gelijkheid der koorden, dat de hoeken APM en BPM elkanders supplementen

Digitized by Google

zijn. Ons voorstel lost dus de reeds vroeger behandelde vraag op (Zie: *Verz. van Wisk. Voorst.*, I. Deel, XXII. Voorstel.) *Om het punt te vinden, waar de paal eener kolfbaan moet geraakt worden door eenen bal, die, uit een gegeven punt voortgeslagen, door den paal naar een ander gegeven punt zal teruggekaatst worden.* Van de vier punten P is dan het begeerde datgene, voor hetwelk de beide gelijke koorden in de verlengden der lijnen AP en BP vallen; en dit zal met een der vier punten P slechts dan kunnen plaats hebben, wanneer de lijn, die de punten A en B vereenigt den cirkel niet snijdt.

XCIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Te integreren de vergelijking

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{(xy - x^2)\sqrt{(y^2 - x^2)} - x^2y}{(y^2 - xy)\sqrt{(y^2 - x^2)} - xy^2}$$

Opgelost *door* J. Bassan, W. L. Ivangh, J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

I. Oplossing *van* J. Bassan.

De breuken verdrijvende, verandert de opgegevene vergelijking in

$$(y^2-xy)\partial x\sqrt{(y^2-x^2)}-xy^2\partial x=(xy-x^2)\partial y\sqrt{(y^2-x^2)}-x^2y\partial y,$$

dat is, na verplaatsing van termen,

$$(y^2\partial x-xy\partial x-xy\partial y+x^2\partial y)\sqrt{(y^2-x^2)}=xy(y\partial x-x\partial y);$$

deze vergelijking door xy^2 deelende, komt er

$$\left(\frac{\partial x}{x}-\frac{\partial x}{y}-\frac{\partial y}{y}+\frac{x\partial y}{y^2}\right)\sqrt{(y^2-x^2)}=\frac{y\partial x-x\partial y}{y},$$

dat is: $$\frac{\partial x}{x}-\frac{\partial y}{y}-\left(\frac{\partial x}{y}-\frac{x\partial y}{y^2}\right)=\frac{y\partial x-x\partial y}{y\sqrt{(y^2-x^2)}},$$

$$\frac{\partial x}{x}-\frac{\partial y}{y}-\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}=\frac{\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}}},$$

of $$\frac{\partial x}{x}-\frac{\partial y}{y}-\partial.\frac{x}{y}=\frac{\partial.\frac{x}{y}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}}}.$$

En hiervan blijkt onmiddellijk de integraal te zijn

$$Nep.\ Log.\ \frac{x}{y}-\frac{x}{y}=Boog\ Sin.\ \frac{x}{y}+Const.$$

Digitized by Google

II. Oplossing van W. L. Ivangh.

Na de breuken verdreven te hebben, kan men voor de opgegevene vergelijking schrijven

$y\partial x(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}-xy^2\partial x=x\partial y(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}-x^2y\partial y$,

of, door vereeniging van termen,

$(y\partial x-x\partial y)(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}=xy(y\partial x-x\partial y)$,

waaruit dan verder volgt

$$\frac{y\partial x-x\partial y}{xy}=\frac{y\partial x-x\partial y}{(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}}.$$

Alsnu integrerende, komt er

$$Nep.\ Log.\ \frac{x}{y}=\sqrt{\frac{y+x}{y-x}}+Const.$$

III. Oplossing van J. S. Speijer en R. van de Weerd.

De gegevene vergelijking kan ook aldus geschreven worden:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x\{(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}-xy\}}{y\{(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}-xy\}};$$

en deelende nu teller en noemer van het gebroken des tweeden lids door $(y-x)\sqrt{(y^2-x^2)}-xy$, zoo komt er terstond

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x}{y}\quad\text{of}\quad\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y},$$

waarvan de integraal is

$$Nep.\ Log.\ x=Nep.\ Log.\ y+Const.$$

Hiervoor kan men schrijven

$$Nep.\ Log.\ x=Nep.\ Log.\ y+Nep.\ Log.\ c,$$

of, van de logarithmen tot de getallen overgaande,

$$x=cy;$$

moetende $c<1$ zijn, omdat anders $\sqrt{(y^2-x^2)}$ onbestaanbaar zou wezen.

Aanmerking van J. Badon Ghijben. De schijnbaar verschillende uitkomsten der drie voorgaande oplossingen, behoeven geene bevreemding te wekken. Immers in de integraalvergelijking

$$Nep.\ Log.\ \frac{x}{y}-\frac{x}{y}=Boog\ Sin.\ \frac{x}{y}+Const.,$$

welke door de eerste oplossing verkregen is, komen x en y niet anders voor, dan door middel van derzelver verhouding $\frac{x}{y}$; die integraalvergelijking leert dus, ten aanzien van de

Digitized by Google

veranderlijke grootheden x en y, ook niets anders, dan dat derzelver verhouding standvastig is. En hetzelfde kan gezegd worden, met betrekking tot de integraalvergelijking, die in de tweede oplossing gevonden is; want men behoeft haar te dien einde slechts in den vorm

$$Nep.\ Log.\ \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{1+\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}}} + Const.$$

te schrijven. Elk der voorgaande oplossingen leidt dus tot het besluit, dat de verhouding $\frac{x}{y}$ standvastig is, en dit besluit wordt door de derde oplossing zeker op de eenvoudigste wijze verkregen.

XCV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De waarde van y te vinden, uit de vergelijking

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2-a}.$$

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. BASSAN, R. VAN DE WEERD *en* W. L. IVANGH.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

De gegevene vergelijking afscheidende, verkrijgt men onmiddellijk

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{(1+x^2-a)\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{(1+x^2)\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} - \frac{a\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

dat is $\frac{\partial y}{y} = \partial x\sqrt{(1+x^2)} - \frac{a\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

Deze vergelijking integrerende, en tevens de willekeurige standvastige bij het eerste lid voegende, komt er

$$Nep.\ Log.\ cy = \int \partial x\sqrt{(1+x^2)} - a\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}};$$

maar nu is (Zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 188 en § 189)

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} = Nep.\ Log.\ (x+\sqrt{(1+x^2)}),$$

$$\int \partial x\sqrt{(1+x^2)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}Nep.Log.(x+\sqrt{(1+x^2)}),$$

en derhalve, door substitutie dezer waarden,

$$Nep.Log.cy = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)} + (\tfrac{1}{2}-a)Nep.Log.(x+\sqrt{(1+x^2)}).$$

Digitized by Google

Hiervoor kan men achtervolgens schrijven:

$$Nep.Log.cy-(\tfrac{1}{2}-a)Nep.Log.(x+\sqrt{(1+x^2)})=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)},$$

$$Nep.Log.cy-Nep.Log.\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^{\frac{1}{2}-a}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)},$$

$$Nep.\ Log.\ \frac{cy}{\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^{\frac{1}{2}-a}}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)},$$

en, van de logarithmen tot de getallen overgaande,

$$\frac{cy}{\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^{\frac{1}{2}-a}}=e^{\frac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)}};$$

derhalve heeft men dan eindelijk

$$y=\frac{\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^{\frac{1}{2}-a}}{c}\times e^{\frac{1}{2}x\sqrt{(1+x^2)}},$$

waarin e het grondtal der Neperiaansche logarithmen, en c eene willekeurige standvastige verbeelden.

XCVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Welke is de waarde van

$$y=\tfrac{9}{4}\int\left\{\frac{x^2\partial x}{(x^3-1)^2}\int\frac{x^2\partial x(x^3-2)\sqrt{(x^3-2)}}{(x^3-1)^3}\right\}?$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Bassan, J. S. Sperjer, R. van de Weerd *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Schrijven wij de opgegevene vergelijking vooreerst in den vorm

$$y=\int\left\{\frac{-3x^2\partial x}{2(x^3-1)^2}\int\frac{-3x^2\partial x(x^3-2)^{\frac{3}{2}}}{2(x^3-1)^3}\right\},$$

en stellen wij vervolgens

$$\frac{1}{x^3-1}=Sin.^2\phi,$$

dan is:

$$x^3-1=\frac{1}{Sin.^2\phi},$$

$$x^3-2=\frac{1}{Sin.^2\phi}-1=\frac{1-Sin.^2\phi}{Sin.^2\phi}=\frac{Cos.^2\phi}{Sin.^2\phi},$$

$$(x^3-2)^{\frac{1}{2}}=\frac{Cos.^3\phi}{Sin.^3\phi},$$

en

$$3x^2\partial x=-\frac{2Cos.\phi\partial\phi}{Sin.^3\phi}\text{ of }\frac{-3x^2\partial x}{2}=\frac{Cos.\phi\partial\phi}{Sin.^3\phi},$$

zoodat dan de opgegevene vergelijking overgaat in

$$y=\int\{Sin.\phi Cos.\phi\partial\phi\int Cos.^4\phi\partial\phi\}.$$

Digitized by Google

Nu is (Zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 247)

$$\int Cos.^4\phi\partial\phi = \tfrac{1}{4}\, Sin.\phi\ Cos.^3\phi + \tfrac{3}{8}\, Sin.\phi\ Cos.\phi + \tfrac{3}{8}\,\phi + C;$$

door dus de termen dezer vergelijking met $Sin.\phi\ Cos.\phi\partial\phi$ te vermenigvuldigen en de integralen der producten te nemen, komt er

$$y = \tfrac{1}{4}\int Sin.^2\phi\ Cos.^4\phi\partial\phi + \tfrac{3}{8}\int Sin.^2\phi\ Cos.^2\phi\partial\phi + \tfrac{3}{8}\int\phi Sin.\phi\ Cos.\phi\partial\phi + C\int Sin\,\phi\ Cos.\phi\partial\phi + C'.$$

Al verder vindt men gemakkelijk:

$$\int Sin.^2\phi\ Cos.^4\phi\partial\phi = \tfrac{1}{6}\ Sin.^3\phi\ Cos.^3\phi + \tfrac{1}{16}\ Sin.^3\phi\ Cos.\phi - \tfrac{1}{16}\ Sin.\phi\ Cos.^3\phi + \tfrac{1}{16}\,\phi,$$

$$\int Sin.^2\phi\ Cos.^2\phi\partial\phi = \tfrac{1}{6}\ Sin.^3\phi\ Cos.\phi - \tfrac{1}{8}\ Sin.\phi\ Cos.^3\phi + \tfrac{1}{8}\,\phi,$$

$$\int\phi Sin.\phi\ Cos.\phi\partial\phi = \tfrac{1}{2}\,\phi Sin.^2\phi + \tfrac{1}{4}\ Sin.\phi\ Cos.\phi - \tfrac{1}{4}\,\phi,$$

$$\int Sin.\phi\ Cos.\phi\partial\phi = \tfrac{1}{2}\ Sin.^2\phi,$$

en deze waarden substituerende, verkrijgt men

$$y = \tfrac{1}{96}\ Sin.\phi\ Cos.\phi\{4Sin.^2\phi\ Cos.^2\phi + 6\ Sin.^2\phi - 6\ Cos.^2\phi + 9\}$$
$$- \tfrac{1}{32}\,\phi\{1 - 6\ Sin.^2\phi\} + \tfrac{1}{8}\,C\ Sin.^2\phi + C'.$$

Nu is:

$$Sin^2\phi = \frac{1}{x^3 - 1},\ \text{dus}\ Cos.^2\phi = \frac{x^3 - 2}{x^3 - 1}$$

$$Sin.\phi\ Cos.\phi = \frac{\sqrt{(x^3 - 2)}}{x^3 - 1},$$

en

$$\phi = Boog\ Sin.\ \frac{1}{\sqrt{(x^3 - 1)}};$$

alzoo wordt dan

Digitized by Google

$$y = \frac{\sqrt{(x^3-2)}}{96(x^3-1)}\left\{\frac{4(x^3-2)}{(x^3-1)^2} + \frac{6}{x^3-1} - \frac{6(x^3-2)}{x^3-1} + 9\right\}$$
$$-\frac{1}{32}\left\{1 - \frac{6}{x^3-1}\right\} \textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{\sqrt{(x^3-1)}} + \frac{C}{2(x^3-1)} + C',$$

of na herleiding

$$y = \frac{(3x^6 + 10x^3 - 17)\sqrt{(x^3-2)}}{96(x^3-1)^3} - \frac{x^3-7}{32(x^3-1)} \textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{\sqrt{(x^3-1)}} + \frac{C}{2(x^3-1)} + C'.$$

XCVII. VOORSTEL.

Door R. VAN DE WEERD.

Binnen eene ellips (Fig. 67) ***is een punt*** P ***gegeven. Uit dit punt*** P ***trekt men twee lijnen*** PR ***en*** PS, ***die de ellipe in*** R ***en*** S ***ontmoeten, en met elkander eenen regten hoek*** RPS ***vormen. Indien nu de plaats van het punt*** R ***bekend is, vraagt men de lengte der lijn*** PS ***te berekenen.***

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER *en* R. VAN DE WEERD.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Dit voorstel heeft veel overeenkomst met het CCXXVI. VOORSTEL van het II. DEEL der *Verzam. van Nieuwe Wisk. Voorst.* en kan ook genoegzaam op dezelfde wijze opgelost worden. (Vergelijk de aldaar voorkomende AANMERKING van J. BADON GHIJBEN.)

Nemen wij dan de assen AB en CD der ellips als coördinaten-assen, en dus haar middelpunt O als oorsprong aan, dan is hare vergelijking

$$a^2x^2 + m^2y^2 = m^2n^2,$$

door m en n de lengte der halve assen voorgesteld wordende.

Digitized by Google

Stellen wij verder:

voor de coördinaten van het punt P, a en b;
" " " " " " R, a' en b';
" " " " " " S, p en q;

dan zijn a en b onderling onafhankelijke gegevens, a' en b' gegevens die moeten voldoen aan de vergelijking

$$n^2a'^2 + m^2b'^2 = m^2n^2, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

terwijl p en q onbekenden zijn, die van elkander afhangen door de vergelijking

$$n^2p^2 + m^2q^2 = m^2n^2. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Voorts heeft men dan:

voor de vergelijking van de lijn PR, $y-b = \frac{b'-b}{a'-a}(x-a)$;

" " " " " PS, $y-b = \frac{q-b}{p-a}(x-a)$;

en daar deze lijnen loodregt op elkander staan, is volgens den bekenden regel

$$\frac{b'-b}{a'-a} = -\frac{p-a}{q-b}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

De te berekenen lengte der lijn PS, of den afstand van P tot S, s noemende, hebben wij vooreerst

$$s = \sqrt{\{(p-a)^2 + (q-b)^2\}};$$

omdat echter volgens (3) $q - b = -\frac{a'-a}{b'-b}(p-a)$ is, gaat deze waarde van s terstond over in

$$s = \frac{p-a}{b'-b}\sqrt{\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2\}}, \quad \ldots \quad (4)$$

waarin nu nog slechts de onbekende p voorkomt.

Om ook deze te bepalen, trekken wij uit (3)

$$q = \frac{-(a'-a)p + (aa' + bb' - a^2 - b^2)}{b'-b},$$

en brengen deze waarde in (2) over, dan komt er na herleiding

$$\left.\begin{array}{l}\{m^2(a'-a)^2 + n^2(b'-b)^2\}p^2 \\ -2m^2(a'-a)(aa' + bb' - a^2 - b^2)p \\ +m^2\{(aa' + bb' - a^2 - b^2)^2 - n^2(b'-b)^2\}\end{array}\right\} = 0, \quad \ldots (5)$$

uit welke vierkantsvergelijking men p kan oplossen.

Stellen wij gemakshalve:

$$(a'-a)^2 + (b'-b)^2 = c^2, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$m^2(a'-a)^2 + n^2(b'-b)^2 = m^2d^2, \quad \ldots \quad (7)$$

en $$aa' + bb' - a^2 - b^2 = f^2, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Digitized by Google

dan hebben wij, in plaats van (4),

$$s = \frac{p - a}{b' - b}\, c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

terwijl de vergelijking (5) wordt

$$m^2 d^2 p^2 - 2m^2 f^2 (a' - a) p + m^2 (f^4 - n^2 (b' - b)^2) = 0,$$

of wel $$p^2 - 2\frac{f^2(a' - a)}{d^2} p + \frac{f^4 - n^2(b' - b)^2}{d^2} = 0,$$

waaruit volgt

$$p = \frac{f^2(a' - a)}{d^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{f^4 (a' - a)^2}{d^4} - \frac{f^4 - n^2(b' - b)^2}{d^2}\right\}},$$

of $$p = \frac{f^2(a' - a) \pm \sqrt{\{n^2 d^2 (b' - b)^2 - f^4 (d^2 - (a' - a)^2)\}}}{d^2}.$$

Uit (7) volgt onmiddellijk

$$d^2 - (a' - a)^2 = \frac{n^2}{m^2} (b' - b)^2,$$

zoodat de voor p gevondene waarde voortaan overgaat in

$$p = \frac{f^2(a' - a) \pm \frac{n}{m}(b' - b)\sqrt{(m^2 d^2 - f^4)}}{d^2};$$

door hiervan a af te trekken, vinden wij

$$p - a = \frac{f^2(a' - a) - ad^2 \pm \frac{n}{m}(b' - b)\sqrt{(m^2 d^2 - f^4)}}{d^2}, \quad \ldots (10)$$

en deze waarde in (9) overbrengende, verkrijgen wij, voor de te berekenen lengte der lijn PS

$$s = \left\{\frac{f^2(a' - a) - ad^2}{(b' - b)d^2} \pm \frac{n}{md^2}\sqrt{(m^2 d^2 - f^4)}\right\} \times c. \quad \ldots (11)$$

Deze uitdrukking kan nog op de volgende wijze herleid worden. Volgens (8) en (7) is

$$f^2 = a(a' - a) + b(b' - b)$$

en $$d^2 = (a' - a)^2 + \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2;$$

hieruit volgt:

$$f^2(a' - a) = a(a' - a)^2 + b(b' - b)(a' - a),$$

$$ad^2 = a(a' - a)^2 + \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2 a,$$

$$f^2(a' - a) - ad^2 = b(b' - b)(a' - a) - \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2 a,$$

Digitized by Google

Stellen wij verder:

voor de coördinaten van het punt P, a en b;
» » » » » » R, a' en b';
» » » » » » S, p en q;

dan zijn a en b onderling onafhankelijke gegevens, a' en b' gegevens die moeten voldoen aan de vergelijking

$$m^2a'^2 + m^2b'^2 = m^2n^2, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

terwijl p en q onbekenden zijn, die van elkander afhangen door de vergelijking

$$n^2p^2 + m^2q^2 = m^2n^2. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Voorts heeft men dan:

voor de vergelijking van de lijn PR, $y-b = \frac{b'-b}{a'-a}(x-a)$;

» » » » » » PS, $y-b = \frac{q-b}{p-a}(x-a)$;

en daar deze lijnen loodregt op elkander staan, is volgens den bekenden regel

$$\frac{b'-b}{a'-a} = -\frac{p-a}{q-b}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

De te berekenen lengte der lijn PS, of den afstand van P tot S, s noemende, hebben wij vooreerst

$$s = \sqrt{\{(p-a)^2 + (q-b)^2\}};$$

omdat echter volgens (3) $q - b = -\frac{a'-a}{b'-b}(p-a)$ is, gaat deze waarde van s terstond over in

$$s = \frac{p-a}{b'-b}\sqrt{\left\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2\right\}}, \ldots (4)$$

waarin nu nog slechts de onbekende p voorkomt.

Om ook deze te bepalen, trekken wij uit (3)

$$q = \frac{-(a'-a)p + (aa' + bb' - a^2 - b^2)}{b'-b},$$

en brengen deze waarde in (2) over, dan komt er na herleiding

$$\left.\begin{array}{l}\{m^2(a'-a)^2 + n^2(b'-b)^2\}p^2 \\ -2m^2(a'-a)(aa' + bb' - a^2 - b^2)p \\ +m^2\{(aa' + bb' - a^2 - b^2)^2 - n^2(b'-b)^2\}\end{array}\right\} = 0, \ldots (5)$$

uit welke vierkantsvergelijking men p kan oplossen.

Stellen wij gemakshalve:

$$(a'-a)^2 + (b'-b)^2 = c^2, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$m^2(a'-a)^2 + n^2(b'-b)^2 = m^2d^2, \quad \ldots \quad (7)$$

en

$$aa' + bb' - a^2 - b^2 = f^2, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Digitized by Google

dan hebben wij, in plaats van (4),

$$s = \frac{p - a}{b' - b}\, c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

terwijl de vergelijking (5) wordt

$$m^2d^2p^2 - 2m^2f^2(a'-a)p + m^2(f^4 - n^2(b'-b)^2) = 0,$$

of wel $$p^2 - 2\frac{f^2(a'-a)}{d^2}p + \frac{f^4 - n^2(b'-b)^2}{d^2} = 0,$$

waaruit volgt

$$p = \frac{f^2(a'-a)}{d^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{f^4(a'-a)^2}{d^4} - \frac{f^4 - n^2(b'-b)^2}{d^2}\right\}},$$

of $$p = \frac{f^2(a'-a) \pm \sqrt{\{n^2d^2(b'-b)^2 - f^4(d^2 - (a'-a)^2)\}}}{d^2}.$$

Uit (7) volgt onmiddellijk

$$d^2 - (a' - a)^2 = \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2,$$

zoodat de voor p gevondene waarde vóórteerst overgaat in

$$p = \frac{f^2(a'-a) \pm \frac{n}{m}(b'-b)\sqrt{(m^2d^2 - f^4)}}{d^2};$$

door hiervan a af te trekken, vinden wij

$$p - a = \frac{f^2(a'-a) - ad^2 \pm \frac{n}{m}(b'-b)\sqrt{(m^2d^2 - f^4)}}{d^2}, \quad \ldots (10)$$

en deze waarde in (9) overbrengende, verkrijgen wij, voor de te berekenen lengte der lijn PS

$$s = \left\{\frac{f^2(a'-a) - ad^2}{(b'-b)d^2} \pm \frac{n}{md^2}\sqrt{(m^2d^2 - f^4)}\right\} \times c. \quad \ldots (11)$$

Deze uitdrukking kan nog op de volgende wijze herleid worden. Volgens (8) en (7) is

$$f^2 = a(a' - a) + b(b' - b)$$

en $$d^2 = (a' - a)^2 + \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2;$$

hieruit volgt:

$$f^2(a' - a) = a(a' - a)^2 + b(b' - b)(a' - a),$$

$$ad^2 = a(a' - a)^2 + \frac{n^2}{m^2}(b' - b)^2a,$$

$$f^2(a'-a) - ad^2 = b(b'-b)(a'-a) - \frac{n^2}{m^2}(b'-b)^2a,$$

Digitized by Google

$$\frac{f^2(a'-a)-ad^2}{b'-b} = \frac{m^2b(a'-a)-n^2a(b'-b)}{m^2},$$

zoodat dan de voor s gevonden vorm verandert in

$$s = \frac{m^2b(a'-a)-n^2a(b'-b)\pm mn\sqrt{(m^2d^2-f^4)}}{m^2d^2}\times c \ldots (12)$$

Laat men de ellips in een' cirkel overgaan, dan wordt $m = n$ en dus ook $c = d$, waardoor men op dezelfde vergelijking nederkomt, die in het bovengenoemde voorstel gevonden is.

Als het gegeven punt P het middelpunt is, dan zijn a en b beide nul; in dit geval is dan ook $f = 0$, $m^2d^2 = m^2a'^2 + n^2b'^2$ en $c = \sqrt{(a'^2 + b'^2)}$. Alsdan vinden wij voor de lijn PS

$$s = \pm\frac{nc}{d} = \pm mn\sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{m^2a'^2 + n^2b'^2}}.$$

XCVIII. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Binnen eene ellips is een punt P (Fig. 67) ***gegeven. Uit dit punt trekt men twee onderling regthoekige lijnen, en daarna vereenigt men de punten*** R ***en*** S, ***waar deze lijnen de ellips ontmoeten. Alsnu begeert men de meetkunstige plaats van het punt*** I ***te vinden, hetwelk de vereenigingslijn*** RS ***middendoordeelt.***

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* R. van de Weerd.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Nemen wij weder de assen AB en CD der ellips tot coördinaten-assen aan; zij AB $= 2m$, CD $= 2n$, en stellen wij verder:

voor de coördinaten van het punt P, a en b;
" " " " " " R, p' en q';
" " " " " " S, p en q;

dan hebben wij hier dezelfde vergelijkingen (1), (2) en (3) als in het voorgaande voorstel, mits wij slechts p' en q' in plaats van a' en b' schrijven. Alzoo is dan

$$n^2p'^2 + m^2q'^2 = m^2n^2, \quad \ldots\ldots (1)$$

$$n^2p^2 + m^2q^2 = m^2n^2, \quad \ldots\ldots (2)$$

en

$$\frac{q'-b}{p'-a} = -\frac{p-a}{q-b}. \quad \ldots\ldots (3)$$

Digitized by Google

Laten voorts x en y de coördinaten van het punt I zijn, dan hebben wij, omdat dit punt midden tusschen de punten R en S ligt,

$$p + p' = 2x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

en

$$q + q' = 2y. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wij hebben dus vijf vergelijkingen tusschen de zes onbekende grootheden x, y, p, q, p' en q'. Hiervan moeten nu de vier laatsten geëlimineerd worden, waarna wij eene vergelijking tusschen x en y zullen overhouden, die dan de vergelijking van de bedoelde meetkunstige plaats zal wezen.

Trekken wij (1) van (2) af, dan komt er

$$n^2(p^2 - p'^2) + m^2(q^2 - q'^2) = 0$$

of $n^2(p + p')(p - p') + m^2(q + q')(q - q') = 0$,

maar uit (4) en (5) volgt $p' = 2x - p$ en $q' = 2y - q$, en door substitutie dezer waarden gaat de laatste vergelijking, na deeling door 4, over in

$$n^2x(p - x) + m^2y(q - y) = 0,$$

waaruit volgt

$$q - y = -\frac{n^2x}{m^2y}(p - x). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Substitueren wij de waarden $p' = 2x - p$ en $q' = 2y - q$ almede in (3), dan komt er

$$\frac{2y - q - b}{2x - p - a} = -\frac{p - a}{q - b}$$

of $(2y - q - b)(q - b) = -(2x - p - a)(p - a)$,

waarvoor geschreven kan worden

$$(b - y)^2 - (q - y)^2 = (p - x)^2 - (a - x)^2$$

of $(p - x)^2 + (q - y)^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2$;

hierin volgens (6) $(q - y)^2 = \frac{n^4x^2}{m^4y^2}(p - x)^2$ substituerende, vinden wij

$$(p - x)^2\left\{1 + \frac{n^4x^2}{m^4y^2}\right\} = (a - x)^2 + (b - y)^2,$$

waarnit onmiddellijk volgt

$$(p - x)^2 = \frac{(a - x)^2 + (b - y)^2}{n^4x^2 + m^4y^2} \times m^4y^2. \quad \ldots \quad (7)$$

Uit (6) volgt ook nog

$$mq = my - \frac{n^2x}{my}(p - x)$$

Digitized by Google

en dus $m^2q^2 = m^2y^2 - 2n^2x(p-x) + \frac{n^4x^2}{m^2y^2}(p-x)^2$;

deze waarde van m^2q^2 substitueren wij in (2), dan komt er

$$n^2p^2 - 2n^2x(p-x) + m^2y^2 + \frac{n^4x^2}{m^2y^2}(p-x)^2 = m^2n^2,$$

waarvoor geschreven kan worden

$$n^2(p-x)^2 + n^2x^2 + m^2y^2 + \frac{n^4x^2}{m^2y^2}(p-x)^2 = m^2n^2;$$

hieruit volgt dan terstond

$$(p-x)^2 = \frac{(m^2n^2 - n^2x^2 - m^2y^2)m^2y^2}{n^2(n^2x^2 + m^2y^2)},$$

en deze waarde van $(p-x)^2$, met (7) vergeleken, geeft ons, voor de begeerde vergelijking tusschen x en y,

$$\frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{n^4x^2 + m^4y^2} = \frac{m^2n^2 - (n^2x^2 + m^2y^2)}{m^2n^2(n^2x^2 + m^2y^2)} \quad \ldots \quad (8)$$

Indien wij den teller van het eerste lid ontwikkelen, de breuken verdrijven, en vervolgens de vergelijking behoorlijk herleiden, komt er

$$(m^2+n^2)(n^2x^2+m^2y^2)^2 - 2m^2n^2(n^2x^2+m^2y^2)(ax+by) + m^2n^2\{(a^2+b^2)(n^2x^2+m^2y^2) - (n^4x^2+m^4y^2)\} = 0; \quad \ldots \quad (9)$$

de gevraagde meetkunstige plaats is dus eene kromme lijn van de derde orde.

Wij zullen ons niet ophouden met het nagaan van den loop dezer kromme, maar ons vergenoegen met de volgende opmerkingen:

Is $b = 0$, dat is, ligt het punt P in de as AB, dan wordt onze vergelijking

$$(m^2+n^2)(n^2x^2+m^2y^2)^2 - 2m^2n^2(n^2x^2+m^2y^2)ax + m^2n^2\{a^2(n^2x^2+m^2y^2) - (n^4x^2+m^4y^2)\} = 0;$$

indien daarenboven $a = 0$ is, dat is, indien het punt P het middelpunt der ellips is, dan komt er

$$(m^2+n^2)(n^2x^2+m^2y^2)^2 = m^2n^2(n^4x^2+m^4y^2).$$

Nemen wij $m = n = r$, en laten wij dus de ellips tot een' cirkel overgaan, dan wordt de vergelijking (9), na door r^6 gedeeld te zijn,

$$2(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)(ax+by) + (x^2+y^2)(a^2+b^2-r^2) = 0;$$

vervolgens door x^2+y^2 deelende, welke factor niet gelijk nul kan zijn, hebben wij

$$x^2+y^2-(ax+by)+\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-r^2) = 0,$$

of wel $(x-\frac{1}{2}a)^2 + (y-\frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}(2r^2-a^2-b^2)$;

Digitized by Google

de gevraagde meetkunstige plaats is dan een cirkel. Nemen wij verder $b = 0$, dan gaat de laatste vergelijking over in

$$(x-\tfrac{1}{2}a)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(2r^2-a^2),$$

zoo als reeds in het CCXXVII. Voorstel van het II. Deel der *Verz. van Nieuwe Wisk. Voorst.* gevonden is.

Eindelijk merken wij nog aan, dat hoezeer reeds uit den aard des voorstels blijkt, dat het punt I altijd binnen de ellipse zal vallen, zulks nog bevestigd wordt door de vergelijking (8), welke niet bestaan kan, indien niet $m^2n^2-n^2x^2-m^2y^2$ positief, en dus $x^2x^2 + m^2y^2 < m^2n^2$ is.

XCIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Het gewigt van eenen gelijkelachtigen regten cirkelvormigen kegel te vinden, indien de digtheid van dat ligchaam, in elk punt, zamengesteld evenredig is met de diepte van dat punt beneden den top, en met deszelfs afstand van de as des kegels. Gegeven zijnde het gewigt eener kubieke eenheid, welke in digtheid overeenkomt met de punten des kegels aan den omtrek van het grondvlak gelegen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Nemen wij op de as TM des kegels TAB (Fig. 68) twee oneindig digt bij elkander gelegene punten C en C′, op de afstanden $TC = x$ en $TC' = x + \partial x$ beneden den top, en brengen wij door deze punten C en C′ vlakken evenwijdig aan het grondvlak, dan snijden deze vlakken uit den kegel eene eerste differentiaal, welke van $x = 0$ tot $x = TM$ moet geïntegreerd worden, om den geheelen kegel te bekomen. Alle punten dezer differentiaal moeten aangemerkt worden als op gelijke diepte beneden den top te liggen; de digtheid in elk punt van die differentiaal is dus nog slechts evenredig met den afstand, waarop hetzelve van de as verwijderd is.

Snijden wij, uit deze eerste differentiaal, eene tweede differentiaal, door twee gewone cilindervlakken, CC′ tot as, $CD = y$ en $CD' = y + \partial y$ tot stralen hebbende, dan zal die tweede differentiaal van $y = 0$ tot $y = CE$ moe-

Digitized by Google

ten geïntegreerd worden, om de eerste differentiaal te bekomen. In deze tweede differentiaal moeten alle punten aangemerkt worden, als even ver van de as en even diep beneden den top te liggen, en zij is dus gelijkslachtig. Stellen wij, dat q het gewigt is eener kubieke eenheid, welke gelijke digtheid als deze tweede differentiaal heeft; zij p het gegeven gewigt eener kubieke eenheid, in digtheid overeenkomende met de punten des kegels aan den omtrek des grondvlaks gelegen, en stellen wij $TM = h$, $AM = MB = r$; dan hebben wij, volgens de gestelde voorwaarde,

$$q : p = xy : hr \quad \text{of} \quad q = \frac{pxy}{hr}.$$

Door de beide cilinders, welke $CD = y$ en $CD' = y + \partial y$ tot stralen, en $CC' = \partial x$ tot gemeenschappelijke hoogte hebben, van elkander af te trekken, vinden wij, voor den inhoud der tweede differentiaal,

$$\pi(y+\partial y)^2\partial x - \pi y^2\partial x = \pi\partial x(2y\partial y + \partial y^2) = 2\pi y\partial x\partial y;$$

en dezen inhoud met de bovengevondene waarde van q vermenigvuldigende, komt er voor het gewigt der tweede differentiaal, hetwelk blijkbaar de tweede differentiaal van het geheele gewigt G des kegels is,

$$\partial^2 G = \frac{2\pi p}{hr}\, xy^2\partial x\partial y.$$

Uit de figuur volgt $CE : MB = TC : TM$, en dus is $CE = \frac{MB \times TC}{TM} = \frac{rx}{h}$; wordt dus de bovenstaande waarde van $\partial^2 G$ geïntegreerd, alsof x en ∂x standvastig zijn, en neemt men deze integraal van $y = 0$ tot $y = \frac{rx}{h}$, dan vindt men, voor het gewigt der eerste differentiaal,

$$\partial G = \frac{2\pi p}{hr}\, x\partial x \int y^2\partial y =$$

$$= \frac{2\pi p}{hr} x\partial x \left\{\tfrac{1}{3}y^3 + Const.\right\} = \frac{2\pi p}{hr} \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{rx}{h}\right)^3 x\partial x$$

of

$$\partial G = \frac{2\pi p r^2}{3h^4}\, x^4\partial x;$$

en zoo men vervolgens deze waarde van ∂G integreert van $x = 0$ tot $x = h$, vindt men, voor het gewigt des geheelen kegels,

Digitized by Google

$$G = \frac{2\pi pr^2}{3h^4}\int x^4 \partial x = \frac{2\pi pr^2}{3h^4}\left\{\tfrac{1}{5}x^5 + Const.\right\} = \frac{2\pi pr^2}{3h^4}.\tfrac{1}{5}h^5$$

of $$G = \tfrac{2}{15}\pi pr^2 h.$$

In de onderstelling, dat de kegel overal dezelfde digtheid als aan den omtrek des grondvlaks heeft, vindt men voor zijn gewigt, door den inhoud met p te vermenigvuldigen, onmiddellijk

$$G' = \tfrac{1}{3}\pi pr^2 h;$$

derhalve is $$G = \tfrac{2}{5}G',$$

dat is: het gewigt des ongelijkslachtigen kegels is, wegens de afneming in digtheid volgens de opgegevene wet, slechts twee vijfde gedeelten van hetgeen dat gewigt zou zijn, indien de kegel overal dezelfde grootste digtheid als aan den omtrek des grondvlaks had.

C. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Twee verschillende katrolschijven, die zich in een zelfde verticaal vlak schuin boven elkander bevinden, zijn in grootte en stelling gegeven, en worden ondersteld in dat vlak geheel vrij, en dus zonder wrijving, om derzelver spillen te kunnen draaijen. Een touw, waarvan het gewigt per lengte-eenheid gegeven is, loopt boven over die beide schijven. Zoo nu aan het eene einde van dat touw eene gegevene kracht P werkt, vraagt men naar de grootte der kracht Q, welke aan het andere einde moet werken, om met P evenwigt te maken. Hierbij het gewigt van het touw slechts in aanmerking nemende voor dat gedeelte, hetwelk van de eene schijf naar de andere loopt; en voorts het geheele touw als volkomen buigzaam en zonder dikte beschouwende.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten A en B (Fig. 69) de middelpunten der katrolschijven, en CDEF het daarover loopende touw voorstellen; indien dan van dit touw het gewigt slechts in aanmerking komt voor het gedeelte DE, dat van de eene schijf naar de andere loopt, zullen de krachten P en Q, aan de uiteinden C en F van het touw werkende, gelijk zijn aan deszelfs spanningen in D en E. Deze spanningen zullen, indien er

Digitized by Google

evenwigt tusschen P en Q is, met het gewigt van het gedeelte DE evenwigt maken; en daar het touw gelijkslachtig is, zal het gedeelte DE een boog van eene gewone kettinglijn wezen, welke de omtrekken der katrolschijven in D en E raakt.

Door het onbekende laagste punt O' dezer kettinglijn, eene horizontale lijn O'X' en eene verticale lijn O'Y' getrokken zijnde, zou hare vergelijking, ten opzigte van deze lijnen als coördinaten-assen, zijn:

$$x' = c \; Nep.\; Log. \frac{c + y' + \sqrt{(2cy' + y'^2)}}{c};$$

terwijl dan, indien g het gegevene gewigt van de lengte-eenheid touw voorstelt, de spanning in het laagste punt O' door

$$C = gc,$$

en die in eenig ander willekeurig punt G, door

$$S = g(y' + c)$$

wordt uitgedrukt; zijnde dit een en ander uit de théorie der kettinglijn genoegzaam bekend.

Daar echter de stand der assen O'X' en O'Y' onbekend is, nemen wij andere en bekende horizontale en verticale lijnen OX en OY als coördinaten-assen aan; indien dan de onbekende afstand van O'X' en OX door b, en die van O'Y' en OY door a wordt voorgesteld, zullen wij in de vorige vergelijking $x' = a - x$ en $y' = y - b$ moeten substitueren, om voor de vergelijking der kettinglijn ten opzigte van OX en OY als assen te verkrijgen

$$a - x = c \; Nep.Log. \frac{c - b + y + \sqrt{\{2c(y-b) + (y-b)^2\}}}{c}, \quad . \quad . \quad (a)$$

terwijl de spanning in eenig willekeurig punt G zijn zal

$$S = g\,(c - b + y); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

wordende voorts uit (a) door differentiatie gevonden

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sqrt{\{2c(y-b) + (y-b)^2\}}}{c}. \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Voor de vergelijking van den cirkel, waardoor de katrolschijf A wordt voorgesteld, kunnen wij stellen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x - h}{y - k}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Digitized by Google

en voor de vergelijking van den cirkel, die de katrolschijf B voorstelt, kunnen wij desgelijks nemen

$$(x - h')^2 + (y - k')^2 = r'^2, \ldots \ldots (d')$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x - h'}{y - k'} \ldots \ldots \ldots (e')$$

Laten nu m en n de coördinaten van het punt D, m' en n' die van het punt E zijn, dan moeten deze coördinaten voldoen aan de vergelijking (a), hetgeen geeft:

$$a - m = c\,Nep.Log.\frac{c - b + n + \sqrt{\{2c(n-b) + (n-b)^2\}}}{c} \ldots (1)$$

en

$$a - m' = c\,Nep.Log.\frac{c - b + n' + \sqrt{\{2c(n'-b) + (n'-b)^2\}}}{c}; \ldots (2)$$

bovendien moeten de coördinaten m en n aan de vergelijking (d), de coördinaten m' en n' aan de vergelijking (d') voldoen, hetgeen geeft

$$(m - h)^2 + (n - k)^2 = r^2 \ldots \ldots (3)$$

en

$$(m' - h')^2 + (n' - k')^2 = r'^2. \ldots \ldots (4)$$

Omdat de boog DE der kettinglijn den cirkel A in D raakt, moeten voor $x = m$ en $y = n$ de differentiaalquotiënten (c) en (e) aan elkander gelijk worden; hetzelfde moet met differentiaalquotiënten (c) en (e') voor $x = m'$ en $y = n'$ plaats hebben, wegens de raking in het punt E van den boog DE der kettinglijn met den cirkel B; hieruit volgt

$$\frac{\sqrt{\{2c(n-b) + (n-b)^2\}}}{c} = \frac{m - h}{n - k} \ldots (5)$$

en

$$\frac{\sqrt{\{2c(n'-b) + (n'-b)^2\}}}{c} = \frac{m' - h'}{n' - k'} \ldots (6)$$

Terwijl eindelijk in (b), voor $y = n$, $S = P$; en, voor $y = n'$, $S = Q$ moet worden; hetgeen nog geeft

$$P = g(c - b + n) \text{ en } Q = g(c - b + n');$$

dat is, zoo wij gemakshalve $\frac{P}{g} = p$ en $\frac{Q}{g} = q$ stellen, als wanneer p de verhouding der gegevene kracht P, en q die der gevraagde kracht Q, tot het gewigt der lengte-eenheid touw voorstelt,

$$p = c - b + n \ldots \ldots \ldots (7)$$

en

$$q = c - b + n' \ldots \ldots \ldots (8)$$

Hierdoor hebben wij nu *acht* vergelijkingen met de *acht*.

Digitized by Google

onbekende grootheden a, b, c, m, n, m', n' en q, terwijl h, k, r, h', k', r' en p gegeven zijn.

De waarden van n en n', uit (7) en (8) voortvloeijende, brengen wij in de zes eerste vergelijkingen over; dan komt er:

$$a - m = c\ Nep.\ Log.\ \frac{p + \sqrt{(p^2 - c^2)}}{c}, \ldots (1')$$

$$a - m' = c\ Nep.\ Log.\ \frac{q + \sqrt{(q^2 - c^2)}}{c}, \ldots (2')$$

$$(m - h)^2 + (p - c + b - k)^2 = r^2, \ldots (3')$$

$$(m' - h')^2 + (q - c + b - k')^2 = r'^2, \ldots (4')$$

$$\frac{\sqrt{(p^2 - c^2)}}{c} = \frac{m - h}{p - c + b - k}, \ldots (5')$$

$$\frac{\sqrt{(q^2 - c^2)}}{c} = \frac{m' - k'}{q - c + b - k'}; \ldots (6')$$

waardoor wij *zes* vergelijkingen met de *zes* onbekenden a, b, c, m, m' en q hebben.

Vervolgens brengen wij de waarden van m en m', uit (5') en (6') voortvloeijende, in de vier voorafgaande vergelijkingen over; dit geeft:

$$a - h - \frac{q - c + b - k}{c}\sqrt{(p^2 - c^2)} = c\,Nep.\,Log.\,\frac{p + \sqrt{(p^2 - c^2)}}{c}, \ldots (1'')$$

$$a - h' - \frac{q - c + b - k'}{c}\sqrt{(q^2 - c^2)} = c\,Nep.\,Log.\,\frac{q + \sqrt{(q^2 - c^2)}}{c}, \ldots (2'')$$

$$p - c + b - k = \frac{rc}{p}, \quad \ldots\ldots (3'')$$

$$q - c + b - k' = \frac{r'c}{q}; \quad \ldots\ldots (4'')$$

en wij hebben dan *vier* vergelijkingen, met de *vier* onbekenden a, b, c en q.

Zoo wij nu verder (1'') en (2'') door middel van (3'') en (4'') vereenvoudigen tot

$$a - h - \frac{r}{p}\sqrt{(p^2 - c^2)} = c\,Nep.\,Log.\,\frac{p + \sqrt{(p^2 - c^2)}}{c}$$

$$a - h' - \frac{r'}{q}\sqrt{(q^2 - c^2)} = c\,Nep.\,Log.\,\frac{q + \sqrt{(q^2 - c^2)}}{c},$$

en daarna het verschil dezer vergelijkingen nemen, komt er

$$h' - h - \frac{r}{p}\sqrt{(p^2 - c^2)} + \frac{r'}{q}\sqrt{(q^2 - c^2)} = c\,Nep.\,Log.\,\frac{p + \sqrt{(p^2 - c^2)}}{q + \sqrt{(q^2 - c^2)}}; \ldots (9$$

terwijl wij door het verschil van (3'') en (4'') te nemen,

Digitized by Google

verkrijgen $$p - q - (k - k') = c\left\{\frac{r}{p} - \frac{r'}{q}\right\},$$

waaruit volgt $$c = \frac{pq(p - q) - pq(k - k')}{rq - r'p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Brengen wij eindelijk deze waarde van c in de vergelijking (9) over, dan komt er na behoorlijke herleiding, en zoo wij tevens gemakshalve $k' - k = d$ en $k - k' = e$ stellen,

$$d - \frac{r\sqrt{\{(rq - r'p)^2 - q^2(p - q - e)^2\}}}{rq - r'p} + \frac{r'\sqrt{\{(rq - r'p)^2 - p^2(p - q - e)^2\}}}{rq - r'p} =$$

$$= \frac{pq(p - q - e)}{rq - r'p} \, Nep.\, Log. \frac{p(rq - r'p) + p\sqrt{\{(rq - r'p)^2 - q^2(p - q - e)^2\}}}{q(rq - r'q) + q\sqrt{\{(rq - r'p)^2 - p^2(p - q - e)^2\}}} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

In deze laatste vergelijking komt nu slechts de ééne onbekende q voor, met de gegevens: $d = h' - h$ (de horizontale projectie van den afstand van de middelpunten A en B der katrolschijven), $e = k - k'$ (de verticale projectie van den genoemden afstand), r en r' (de stralen der schijven), en $p = \frac{P}{g}$ (de verhouding der gegevene kracht P tot het gegevene gewigt van de lengte-eenheid touw). Uit dezelve kan q niet anders dan door benadering berekend worden, nadat men de gegevens in getallen heeft uitgedrukt. Na deze berekening, wordt ook de kracht $Q = gq$ bekend, en daardoor is dan de vraag opgelost.

Nadat q berekend is, vindt men achtervolgens:

Digitized by Google

c, door de formule (10);
b, " " " (3") of (4");
a, " " " (1") of (2");
m en m', " " " (5') en (6');
n en n', " " " (7') en (8);
waardoor alzoo mede al het overige onbekende bekend wordt.

CI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën eener regte lijn in de ruimte, begeert men de projectiën van het punt dezer lijn te vinden, dat zich het digtst bij de as van projectie bevindt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Spreijer *en* L. Cohen Stuart.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat OX (Fig. 70) de as van projectie zijn; zij voorts A'B' de gegevene horizontale, en A"B" de gegevene verticale projectie eener lijn in de ruimte. Indien wij dan A'B' verlengen, totdat zij OX ontmoet, en uit het ontmoetingspunt C' eene loodlijn op OX trekken, zal deze door hare snijding met A"B" het punt C" aanwijzen, waar het verticale vlak van projectie door de lijn in de ruimte gesneden wordt. Desgelijks zal het punt D', waar de lijn in de ruimte het horizontale vlak snijdt, aangewezen worden door de snijding van A'B' met eene loodlijn op OX gesteld uit het punt D", waar OX door het verlengde van A"B" gesneden wordt.

Trekken wij door eenig punt O der as van projectie eene loodlijn ZOY op die as, dan stellen OY en OZ respectievelijk de horizontale en verticale doorgangen voor, van een vlak, door het punt O loodregt op OX gesteld; en deze doorgangen OY en OZ zijn dan in de ruimte onderling regthoekig. Nemen wij het laatstgenoemde vlak als een derde vlak van projectie aan, en verbeelden wij ons daartoe, dat hetzelve om de lijn OZ wordt omgewenteld, totdat OY in het verlengde van OX, en dus in den stand OY' komt; indien wij dan C'C loodregt op OZ, D'd loodregt op OY trekken, en vervolgens, op OY', OD = Od nemen, zijn C en D de projectiën op het vlak ZOY' van de vroeger bepaalde ontmoetingspunten C' en D'; de lijn CD getrokken

Digitized by Google

zijnde, is deze dan de projectie der lijn in de ruimte op het derde vlak van projectie. Maar op dat zelfde vlak projecteert zich de as van projectie in het enkele punt O; derhalve is eene loodlijn OP, uit O op CD nedergelaten, de projectie op het vlak ZOY' van den kortsten afstand tusschen de lijn in de ruimte en de as van projectie; en het voetpunt P, van de loodlijn OP, is dan op het vlak ZOY' de projectie van dat punt der lijn in de ruimte, hetwelk zich het digtst bij de as van projectie bevindt. Daar nu de hoogte van de projectie P, boven de lijn OY', tevens de hoogte is van het begeerde punt boven het horizontale vlak, behoeven wij slechts uit P eene lijn evenwijdig met OX, en uit het punt P', waar A'B' door deze evenwijdige lijn geaneden wordt, eene loodlijn op OX te trekken, welke A'B' ergens in P' snijdt; dan zullen P' en P'' de projectiën van het begeerde punt zijn.

Indien de projectiën A'B' en A''B'' gegeven waren in den stand van Fig. 71, zou de constructie onveranderd blijven; bij hare verklaring zou men slechts behoeven op te merken, dat nu de punten (D', D'') en (P', P'') achter het verticale vlak ZOX lagen.

Is een der gegevene projectiën evenwijdig met de as, b. v. de verticale A''B'', zoo als in Fig. 72 is voorgesteld, dan zal het punt C'', waar de lijn het verticale vlak ontmoet, het begeerde punt zijn; want alsnu is de lijn in de ruimte evenwijdig met het horizontale vlak en daarvan op eenen afstand gelijk aan C'C'' verwijderd, en derhalve is ook C'C'' de kortste afstand tusschen die lijn en de as van projectie.

CII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale doorgangen van een hellend vlak, benevens een punt in het horizontale vlak van projectie, begeert men uit dat punt eene lijn naar eenig punt van het hellende vlak te trekken, die evenwijdig met het verticale vlak van projectie loopt, en eene gegevene lengte heeft.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, J. A. Hansen, W. L. Ivangh en L. Cohen Stuart.

Digitized by Google

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Laat OX (Fig. 73) de as van projectie, AA' en AA'' de gegevene horizontale en verticale doorgangen van het hellende vlak, en P het gegevene punt in het horizontale vlak van projectie zijn; dan weten wij vooreerst, dat de verticale projectie P'' van dit punt gevonden wordt, door PP'' loodregt op OX te trekken. Trekken wij verder door P eene lijn D'E' evenwijdig met OX; uit het punt E', waar deze lijn den doorgang AA' ontmoet, eene loodlijn E'E'' op OX; en uit het voetpunt E'' van die loodlijn eene lijn E''D'' evenwijdig met den doorgang AA''; dan is E'D' de horizontale en E''D'' de verticale projectie van de gemeene doorsnede, van het hellende vlak A'AA'' met een vlak D'E', dat door het punt P evenwijdig aan het verticale vlak van projectie gebragt wordt. Daar de te trekken lijn evenwijdig met het verticale vlak van projectie moet loopen, moet zij zich vooreerst in hare wezenlijke lengte op dat verticale vlak projecteren; terwijl zij ten andere in het vlak D'E' moet liggen en dus het vlak A'AA'' niet anders dan in de lijn (D'E', D''E'') kan ontmoeten. De verticale projectie der te trekken lijn moet dus even lang zijn als die lijn zelve, en uit P'' naar eenig punt van D''E'' loopen. Beschrijven wij dienvolgens uit P'' met de gegevene lengte als straal eenen cirkelboog, de lijn D''E'' in F'' en G'' snijdende, dan is P''F'' of P''G'' de verticale projectie der begeerde lijn, waarvan de overeenkomstige horizontale projectie PF' of PG' gevonden wordt, door F''F' of G''G' loodregt door OX te trekken, totdat zij D'E' in F' of G' ontmoet.

Mogt de cirkelboog, uit P'' beschreven, de lijn D''E'' niet snijden, dan is het onmogelijk aan de vraag te voldoen. Mogt die cirkelboog de lijn D''E'' raken, dan kan er slechts één lijn getrokken worden, die aan de vraag voldoet, en deze staat dan loodregt op het hellende vlak.

Zijn de gegevene doorgangen A'A' en A''A'' evenwijdig aan de as van projectie, dan zal men de verticale projectie D''E'' der gemeene doorsnede, van het hellende vlak met het vlak door P evenwijdig aan het verticale gebragt, door tusschenkomst van een derde vlak van projectie, ergens in O loodregt op de as OX gesteld, kunnen construeren, zoo als in

Digitized by Google

Fig. 74 is aangewezen. Blijvende overigens in dit geval de oplossing der vraag onveranderd.

CIII. Voorstel.

Door P. Krom.

Een zeker vierkant getal van vijf cijfers te vinden, uit de volgende bepalingen: de drie voorste cijfers maken een pronikgetal uit, hetwelk, in zes gelijke deelen verdeeld wordende, even zoo veel vierkanten oplevert, welker wortels ieder het dubbel zijn van den vierkantswortel uit het getal; dat door de twee achterste cijfers van het begeerde getal uitgedrukt wordt. En de pronikwortel uit de drie voorste cijfers wordt gevonden, indien men den vierkantswortel uit het geheele getal met den vierkantswortel uit de twee achterste cijfers vermindert, en de rest door het dubbel van den laatstgenoemden vierkantswortel deelt.

Opgelost *door* P. Krom, J. B. Geel, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., W. L. Ivangh, J. H. van Kooten, G. Koster *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* P. Krom.

Stellen wij het getal, dat door de twee achterste cijfers van het begeerde getal uitgedrukt wordt, door x^2 voor, dan is, volgens de eerste voorwaarde, $2x$ de vierkantswortel uit het een zesde deel van het pronikgetal, dat door de drie voorste cijfers van het begeerde getal wordt uitgedrukt. Het genoemde pronikgetal zelve is alzoo $6 \times (2x)^2 = 24x^2$, en derhalve is dan het begeerde getal $24x^2 \times 100 + x^2 = 2401x^2$.

Den vierkantswortel hieruit, of $49x$, met den vierkantswortel x uit de twee achterste cijfers verminderende, en de rest $48x$ door het dubbel $2x$ van den laatstgenoemden vierkantswortel deelende, komt er 24, en dit is alzoo, volgens de tweede voorwaarde, de pronikwortel uit de drie voorste cijfers. Het pronikgetal, door de drie voorste cijfers uitgedrukt, is derhalve $24 \times 25 = 600$.

Maar dit pronikgetal is, volgens de eerste voorwaarde, ook $24x^2$; en wij hebben alzoo de vergelijking

$$24x^2 = 600,$$

waaruit volgt $x^2 = 25$;

derhalve hebben wij dan, voor het begeerde getal,

$$2401x^2 = 60025.$$

Digitized by Google

CIV. Voorstel.

Door P. Krom.

Men vraagt eene afdalende rekenkunstige reeks van vijf termen te vinden, zoodat, wanneer men elk dezer termen in het vierkant brengt, de tweede magt van het derde vierkant 13825 meer is dan het product van het tweede en vierde vierkant; terwijl dit laatste product wederom 33975 meer is, dan het product van het eerste en vijfde vierkant.

Opgelost *door* P. Krom, J. B. Gerl, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az., W. L. Ivangh, J. H. van Kooten, J. Koster *en* J. S. Speijer.

Oplossing van P. Krom.

Stellen wij de reeks voor door

$$x + 2y,\ x + y,\ x,\ x - y \text{ en } x - 2y,$$

dan zijn de vierkanten der termen

$$(x + 2y)^2,\ (x + y)^2,\ x^2,\ (x - y)^2 \text{ en } (x - 2y)^2.$$

Het product van het tweede en vierde vierkant is nu

$$(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4,$$

en het product van het eerste en vijfde is

$$(x+2y)^2(x-2y)^2 = (x^2-4y^2)^2 = x^4-8x^2y^2+16y^4,$$

zoodat wij, volgens het voorstel, hebben de vergelijkingen:

$$x^4 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 13825$$

en $(x^4-2x^2y^2+y^4) - (x^4-8x^2y^2-16y^4) = 33975,$

of wel $$2x^2y^2 - y^4 = 13825 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$6x^2 - 15y^4 = 33975. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De vergelijking (2) door 3 deelende en het komende quotiënt van (1) afrekkende, verkrijgen wij

$$4y^4 = 2500,$$

waaruit volgt $$2y^2 = 50,$$

$$y^2 = 25,$$

en $$y = 5,$$

kunnende men geenszins $y = -5$ nemen, omdat dan de reeks niet afdalende zou wezen.

De gevondene waarde van y in (1) overbrengende, komt er

$$50x^2 - 625 = 13825,$$

waaruit volgt $$x^2 = 289$$

en $$x = \pm 17.$$

Derhalve is dan de gevraagde reeks:

27, 22, 17, 12 en 7;

of $-7, -12, -17, -22$ en -27.

Digitized by Google

CV. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Zeker getal bestaat uit vier cijfers, welke, naarmate zij in rang afdalen, in grootte opklimmen, en daarbij eene rekenkunstige reeks van de tweede orde vormen, welker gelijke verschillen de eenheid zijn. Indien men de som van de cijfers der twee hoogste rangen, vermenigvuldigt met het verschil der twee overige cijfers, dan is dat product 21; *terwijl het gedurig product der vier cijfers* 648 *is. Welk is dat getal?*

Opgelost *door* J. S. Speijer, W. L. Ivangh, J. H. van Kooten, G. Koster, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Az. *en* J. A. Stamkart.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Men stelle de twee eerste termen der bedoelde reeks door x en $x + y$ voor, dan is, omdat hare tweede verschillen de eenheid zijn, de reeks zelve:

$$x,\ x + y,\ x + 2y + 1 \text{ en } x + 3y + 3,$$

welker termen nu de cijfers van het gevraagde getal voorstellen. De cijfers der twee hoogste rangen zijn dan x en $x + y$, en derhalve is volgens de opgave

$$(2x+y)(y+2) = 21 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en

$$x(x+y)(x+2y+1)(x+3y+3) = 648. \quad \ldots \quad (2)$$

Hoewel nu, uit deze twee vergelijkingen, de onbekenden x en y zouden kunnen opgelost worden, is de bepaling, dat de termen der reeks cijfers moeten zijn, reeds genoegzaam om y te bepalen, zoodat de tweede voorwaarde geheel kan gemist worden. Immers kan x niet gelijk nul zijn, omdat het getal dan slechts uit drie cijfers bestaan zou. Evenmin kan y gelijk nul zijn, want dan zou de reeks, welker twee eerste termen aan elkander gelijk waren, niet wel eene rekenkunstige reeks kunnen genoemd worden; doch, wat meer is, door $y = 0$ te nemen, zou men niet aan de vergelijking (1) kunnen voldoen, dewijl daarin x een geheel getal voorstelt. Daar nu $x + 3y + 3 < 10$ moet wezen, zoo moet ook $y < 2$ zijn, en derhalve is $y = 1$.

De vergelijking (1) geeft dan verder

Digitized by Google

$$(2x + 1)3 = 21,$$

waaruit volgt $x = 3$;

zoodat wij voor het begeerde getal verkrijgen: 3469.

Aanmerking *uit de oplossing van* W. L. Ivangh. Ook de tweede der gegevene voorwaarden, in verband met de bepaling, dat de termen der bedoelde reeks cijfers en dus geheele getallen kleiner dan 10 moeten wezen, is reeds toereikend om het begeerde getal te vinden. De deelers namelijk van 648, die kleiner dan 10 zijn, zijn geene andere dan 1, 2, 3, 4, 6, 8 en 9. Neemt men nu in aanmerking, dat $648 = 2^3 3^4$ is, dan ziet men dadelijk, dat uit de genoemde deelers geen ander viertal dan 3, 4, 6 en 9 kan gekozen worden, waarvan het gedurig product juist 648 is; en dat alzoo slechts het getal 3469 aan de tweede voorwaarde voldoen kan.

CVI. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

De wortel uit zeker kwadraatgetal van drie cijfers staat tot de som der drie cijfers als 3 tot 2, terwijl het cijfer der tientallen in getal en wortel hetzelfde is; doch, dat der eenheden in den wortel is gelijk aan het verschil tusschen de cijfers der eenheden en tientallen van het getal. Welk is het bedoelde kwadraatgetal?

Opgelost *door* J. Heemskerk, Az., J. S. Spruijt, J. A. Stamkart, J. H. van Kooten, G. Koster, J. B. Grel, J. A. Hansen *en* W. L. Ivangh.

I. Oplossing *van* J. Heemskerk, Az.

Laten de cijfers van het kwadraatgetal voorgesteld worden door

$$x,\ y \text{ en } y + z,$$

dan zijn die van den wortel

$$y \text{ en } z,$$

en wij hebben de evenredigheid

$$10y + z : x + 2y + z = 3 : 2,$$

waaruit volgt

$$3x + 6y + 3z = 20y + 2z,$$

of

$$z = 14y - 3x.$$

Hieruit volgt dadelijk, dat y niet grooter dan 2 kan we-

Digitized by Google

zen; want x is niet grooter dan 9, dus $3x$ niet grooter dan 27, en bijaldien nu y grooter dan 2 kon zijn, zou $z = 14y - 3x$ grooter dan 10 wezen. Verder kan y noch 0, noch 1 zijn; want zoo $y = 0$ ware, zou de wortel een getal van ééne cijfer, en dus het kwadraatgetal geen getal van drie cijfers zijn; en zoo $y = 1$ ware, zou indien z even was, $y + z$ oneven zijn, of omgekeerd, hetgeen ten aanzien van de cijfers der eenheden van een kwadraatgetal en deszelfs wortel onmogelijk is. Hieruit volgt dan, dat men noodzakelijk moet hebben

$$y = 2,$$

en

$$z = 28 - 3x.$$

Het kwadraatgetal wordt hierdoor

$$100z + 10y + y + z = 97x + 50,$$

en deszelfs wortel

$$10y + z = 48 - 3x,$$

zoodat men heeft

$$(48 - 3x)^2 = 97x + 50,$$

of na herleiding

$$9x^2 - 385x + 2254 = 0,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{385}{18} \pm \frac{259}{18}.$$

Het bovenste teeken vervalt hier, omdat dan $x > 10$ zou worden; alzoo is $x = \frac{385}{18} - \frac{259}{18} = \frac{126}{18} = 7$, $z = 28 - 3x = 7$ en $y + z = 9$. Het kwadraatgetal is dus 729 en deszelfs wortel is 27.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

De twee laatste voorwaarden, die in dit voorstel zijn opgegeven, kunnen geheel gemist worden. De eerste voorwaarde is genoegzaam om het gevraagde getal te bepalen.

Omdat de wortel van dit getal tot de som der cijfers staat als 3 tot 2, zoo stelle men de som der cijfers (die allen geheele getallen kleiner dan 10 zijn) door $2x$ voor, dan is $3x$ de wortel van het getal, en $9x^2$ het getal zelve. Dit getal is dus door 9 deelbaar. Volgens eene zeer bekende eigenschap der getallen, moet dan ook de som der cijfers van het getal, dat is $2x$, door 9 deelbaar wezen. Wij kun-

Digitized by Google

men dus stellen $x = 9y$ en dan is het getal $9x^2 = 729y^2$. Daar nu het getal slechts uit drie cijfers moet bestaan, kan y niet anders dan 1 zijn; en diensvolgens is dan 729 het begeerde getal.

Dit getal kan nu wel aan de beide andere voorwaarden getoetst worden; maar deze voorwaarden brengen niets bij tot bepaling van hetzelve.

CVII. Voorstel.

Door J. H. van Kooten.

Men vraagt alle mogelijke geheele getallen te vinden, die de eigenschap hebben, dat zij gelijktijdig door de twee laatste cijfers van hunne tweede en van hunne derde magt uitgedrukt worden.

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Speijer, J. B. Geel, J. Heemskerk, Az., J. H. van Kooten, G. Koster *en* W. L. Ivangh.

Oplossing van J. A. Hansen.

Vooreerst zij opgemerkt, dat de tweede voorwaarde overtollig is, daar elk getal x, hetwelk voldoet aan de eerste voorwaarde $x^2 = 100m + x$, ook aan de tweede voldoet. Immers uit $x^2 = 100m + x$ volgt $x^2 - x = 100m$, en dit met $x + 1$ vermenigvuldigende bekomt men $x^3 - x = 100m(x+1)$, waaruit wederom volgt $x^3 = 100m(x+1) + x$.

Daar $x^2 - x = 100m = (x - 1)x$ een rond honderdtal is, hetwelk bestaat uit het product van twee factoren, die op elkander volgende en dus onderling ondeelbare getallen zijn, zoo zal de eene factor door 4 en de andere door 25 deelbaar moeten zijn. Maar de eenige op elkander volgende getallen van twee cijfers, waarvan het eene door 4 en het andere door 25 kan gedeeld worden, zijn 24 en 25 of 75 en 76. Alzoo zijn de gevraagde getallen 25 en 76, en geene andere.

CVIII. Voorstel.

Door L. Hofnagel.

Een cirkel is door stralen in drie onderling gelijke deelen of sectoren verdeeld. Indien nu de omtrek van elke sector gegeven is, vraagt men naar den straal des cirkels in een dezer sectoren beschreven.

Digitized by Google

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Strijen, J. A. Stamkart, H. W. Bloem, J. B. Gerl, J. A. Hansen, W. L. Ivanor, G. Koster en L. Hoefnagel.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Zij AMB (Fig. 75) een der drie onderling gelijke sectoren, waarin de cirkel verdeeld is, dan is *hoek* AMB $=$ 120°. Zij MC de straal, welke dien hoek middendoordeelt, dan ligt vooreerst het middelpunt van den cirkel, in den sector beschreven, op dien straal MC.

Deelen wij voorts den boog AC in D, en den straal MB in E middendoor, indien wij dan de punten D en E vereenigen door eene regte lijn DE, zal het snijpunt F van DE met den straal MC het middelpunt des genoemden cirkels zijn. Want BC, EC en MD getrokken, en uit F eene loodlijn FG op MB nedergelaten hebbende, is vooreerst CE loodregt op MB, omdat BMC een gelijkzijdige driehoek en E het midden van MB is; ten andere is MD loodregt op MB, omdat *boog* BD $=$ *boog* BC $+ \frac{1}{2}$ *boog* AC $= 90°$ is; de drie lijnen MD, FG en CE zijn dus evenwijdig, waaruit volgt

$$MD : FG = ME : EG,$$
$$ME : EG = MC : FC,$$

dus ook $MD : FG = MC : FC;$

maar MD $=$ MC zijnde, is dan ook FG $=$ FC, en een cirkel uit F met FG $=$ FC beschreven, zal alzoo de ingeschreven cirkel in den sector AMB zijn.

Omdat ME de helft van MC is, zal ook MG de helft van MF zijn; stellen wij dus

$$MA = MB = MC = R \text{ en } FC = FG = r,$$

dan hebben wij

$$MF = R - r \quad \text{en} \quad MG = \tfrac{1}{2}(R - r),$$

zoodat uit den regthoekigen driehoek MFG volgt

$$r = FG = \sqrt{(MF^2 - MG^2)} = \tfrac{1}{2}(R - r)\sqrt{3}.$$

Uit deze vergelijking vinden wij dadelijk

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}},$$

of, teller en noemer met $2 - \sqrt{3}$ vermenigvuldigende,

$$r = (-3 + 2\sqrt{3})R.$$

Zij nu de omtrek van den sector AMB $= s$ gegeven,

Digitized by Google

dan is, omdat de boog ACB het derde gedeelte is van den omtrek des cirkels, die R tot straal heeft,

$$a = MA + MB + Boog\,ACB = 2R + \tfrac{1}{3}.2\pi R = \tfrac{2}{3}(3+\pi)R$$

hieruit volgt $$R = \frac{3a}{2(3+\pi)};$$

en door substitutie dezer waarde, komt er dan verder

$$r = \frac{(-3+2\sqrt{3})3a}{2(3+\pi)} = \frac{-9+6\sqrt{3}}{6+2\pi}a,$$

zoodat nu de gevraagde straal in den gegeven omtrek is uitgedrukt.

CIX. Voorstel.

Door W. L. Ivangh.

Wanneer eenig door de zon beschenen punt, op een horizontaal vlak schaduw werpt, zal die schaduw op het horizontale vlak eene kegelsnede beschrijven; indien men namelijk de verandering der zonsdeclinatie gedurende den dag buiten rekening laat. Men vraagt deze kegelsnede te bepalen; gegeven zijnde de zonsdeclinatie, de breedte der plaats, en de hoogte van het schaduwgevende punt boven het horizontale vlak.

Opgelost *door* W. L. Ivangh. *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Zij P (Fig. 76) het schaduwgevende punt, en AB het horizontale vlak; indien dan P′ het voetpunt is van de loodlijn, uit het punt P op het vlak AB nedergelaten, is vooreerst gegeven $PP' = h$. Zij voorts NZ eene lijn, door het punt P evenwijdig met de as der aarde getrokken; indien dan het horizontale vlak door deze lijn in O gesneden wordt, is eene lijn N′Z′, door O en P′ getrokken, de projectie van den meridiaan der plaats, op het horizontale vlak; terwijl *hoek* $POP' = B$ de gegevene breedte der plaats is. Op den middag, valt dan de schaduw der lijn ON langs ON′.

Laat nu, op eenig ander oogenblik van den dag, OM de schaduw van de lijn ON zijn; indien wij dan, in het vlak NOM, eerst uit P eene loodlijn PQ op OP stellen, en vervolgens de lijn PR zoodanig trekken, dat *hoek* $QPR = D$ de gegevene zonsdeclinatie is, welke wij gelijknamig met de breedte der plaats onderstellen, zoo is op dat oogenblik het punt R de schaduw van het punt P; want de lichtstraal uit

Digitized by Google

de zon S naar het punt P gaande, beschrijft gedurende den dag een kegelvlak, dat P tot top en PN tot as heeft, en waarvan de halve tophoek NPS het complement der declinatie is.

De te bepalen kegelsnede is dan de meetkunstige plaats van het punt R. Om deze te vinden, zullen wij aanvankelijk hare poolvergelijking opmaken, daarbij O tot pool en ON' tot oorsprong der hoeken aannemende; derhalve stellen wij $OR = s$, *hoek* $N'OR = \phi$, alsmede *hoek* $POQ = \psi$.

Beschrijven wij uit O als middelpunt eenen bol, dan ontstaat er een bolvormige driehoek CDE, waarin $CD = B$, $DE = \phi$, $CE = \psi$ en *hoek* $CDE = 90°$ is; hieruit volgt onmiddellijk

$Cos.\psi = Cos.B\ Cos.\phi$ en $Sin.\psi = \sqrt{\{1 - Cos.^2 B\ Cos.^2\phi\}}$;

verder hebben wij, uit den driehoek OPR, waarin *hoek* $OPR = 90° - D$ en dus *hoek* $ORP = 180° - (90° - D) - \psi = 90° - (\psi - D)$ is,

$$OP = \frac{OR \times Sin.\ ORP}{Sin.\ OPR} = \frac{s\ Cos.\ (\psi - D)}{Cos.\ D},$$

en uit den driehoek OPP', die regthoekig in P' is,

$$OP = PP'\ Cosec.\ POP' = k\ Cosec.\ B;$$

hieruit volgt

$$\frac{s\ Cos.\ (\psi - D)}{Cos.\ D} = k\ Cosec.\ B,$$

dat is door ontwikkeling van $Cos.\ (\psi - D)$,

$$s\ (Cos.\ \psi + Sin.\ \psi\ Tang.\ D) = k\ Cosec.\ B$$

of

$$s = \frac{k\ Cosec.\ B}{Cos.\ \psi + Tang.\ D\ Sin.\ \psi},$$

en, hierin voor $Cos.\ \psi$ en $Sin.\ \psi$ de bovengevondene waarden inbrengende, komt er

$$s = \frac{k\ Cosec.\ B}{Cos.B\,Cos.\phi + Tang.D\sqrt{(1 - Cos.^2 B\,Cos.^2\phi)}}, \quad \ldots\ (a)$$

hetgeen dan nu de poolvergelijking is der kegelsnede, door de schaduw van het punt P op het horizontale vlak AB beschreven.

Indien de zonsdeclinatie niet gelijknamig met de breedte der plaats is, zoodat, b. v. op noorderbreedte de zonsdeclinatie zuidelijk is, heeft men

Digitized by Google

$$s = \frac{h\ Cosec.\ B}{Cos.\ B\ Cos.\ \phi - Tang.\ D\ \sqrt{(1 - Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi)}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ (b)$$

maar deze beide verschillende waarden van s behooren tot eene zelfde kegelsnede. Immers zoo men uit de gevondene poolvergelijking de wortelgrootheid verdrijft, komt er

$$(s\ Cos.\ B\ Cos.\ \phi - h\ Cosec.\ B)^2 = s^2\ Tang.^2\ D(1 - Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi),$$

of door achtervolgende herleidingen:

$$s^2(Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi - Tang.^2\ D + Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi\ Tang.^2\ D) - 2hs\ Cos.\ \phi\ Cos.\ B\ Cosec.\ B + h^2\ Cosec.^2\ B = 0,$$

$$s^2(Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi\ Sec.^2\ D - Tang.^2\ D) - 2hs\ Cos.\ \phi\ Cot.\ B + h^2\ Cosec.^2\ B = 0,$$

$$s^2(Cos.^2\ B\ Cos.^2\ \phi\ Cosec.^2\ D - 1) - 2hs\ Cos.\ \phi\ Cot.\ B\ Cot.^2\ D + h^2\ Cosec.^2\ B\ Cot.^2\ D = 0,$$

$$s^2 - s^2\ Cos.^2\ \phi\ Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D + 2hs\ Cos.\ \phi\ Cot.\ B\ Cot.^2\ D = h^2\ Cosec.^2\ B\ Cot.^2\ D;$$

en hierin nu $s^2 = x^2 + y^2$ en $s\ Cos.\ \phi = x$ substituerende, verkrijgt men voor de vergelijking der kegelsnede, ten opzigte van onderling regthoekige assen,

$$y^2 + x^2\ (1 - Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D) + 2hx\ Cot.\ B\ Cot.^2\ D = h^2\ Cosec.^2\ B\ Cot.^2\ D; \quad \ldots\ (A)$$

zijnde hierbij O als oorsprong, en ON′ als as der x aangenomen.

Uit deze vergelijking blijkt, dat de kegelsnede eene ellips, parabool of hyperbool zal wezen, naargelang $1 - Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D$ positief, nul of negatief is; en dat de as dezer kegelsnede langs de as der x ligt.

Stelt men in de vergelijking (A), $y = 0$, dan komt er, in de onderstelling, dat $1 - Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D$ niet gelijk nul is,

$$x^2 + 2x\ \frac{h\ Cot.\ B\ Cot.^2\ D}{1 - Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D} = \frac{h^2\ Cosec.^2\ B\ Cot.^2\ D}{1 - Cos.^2\ B\ Cosec.^2\ D},$$

en hieruit s oplossende, vindt men na behoorlijke herleiding

Digitized by Google

$$x = -\frac{hCot.B.Cot.^2D}{1-Cos.^2BCosec.^2D} \pm \frac{hCot.D}{1-Cos.^2BCosec.^2D};$$

de eerste term dezer waarden van x is blijkbaar de abscis van het middelpunt der ellips of hyperbool, terwijl het verschil dier beide waarden van x de groote of eerste as is. Die middelpunts-abscis door m en de halve groote of eerste as door a voorstellende, is alzoo

$$m = -\frac{hCot.BCot.^2D}{1-Cos.^2BCosec.^2D}, \quad \ldots \quad (1)$$

terwijl wij hebben:

$$\left.\begin{array}{l} \text{in de ellips;} \quad a = \dfrac{hCot.D}{1-Cos.^2BCosec.^2D}, \\ \text{en in de hyperbool,} \quad a = \dfrac{hCot.D}{Cos.^2BCosec.^2D-1}; \end{array}\right\} \ldots (2)$$

vervolgens in (A), voor x de waarde van m volgens (1) substituerende, en de overeenkomstige waarde van y berekenende, vindt men na herleiding

$$y = \pm \frac{hCot.D}{\sqrt{(1-Cos.^2BCosec.^2D)}},$$

en zoo wij dus de halve kleine of tweede as door b voorstellen, hebben wij:

$$\left.\begin{array}{l} \text{in de ellips,} \quad b = \dfrac{hCot.D}{\sqrt{(1-Cos.^2BCosec.^2D)}}, \\ \text{en in de hyperbool,} \quad b = \dfrac{hCot.D}{\sqrt{(Cos.^2BCosec.^2D-1)}}. \end{array}\right\} \ldots (3)$$

De juistheid dezer uitkomsten kan men nog bevestigen, door in de vergelijking $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eener ellips, en in de vergelijking $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eener hyperbool, de waarden (1), (2) en (3) te substitueren, als wanneer men in beide gevallen de vergelijking (A) zal terugvinden.

Voor den parameter, zoowel van de ellips als van de hyperbool, vindt men

$$p = \frac{2b^2}{a} = 2h\ Cot.\ D; \quad \ldots \quad (4)$$

voorts kan men de formule voor de tweede as der hyperbool herleiden tot $b = \frac{h}{\sqrt{(1 - Sin.^2\ B\ Sec.^2\ D)}}$, waaruit dadelijk volgt, dat altijd $b > h$ zal wezen.

Digitized by Google

In de onderstelling, dat $1 - Cos.^2 B\ Cosec.^2 D = 0$ is, heeft men

$$Cosec.^2 D = \frac{1}{Cos.^2 B} = Sec.^2 B \text{ en dus } Cot.^2 D = Tang.^2 B,$$

zoodat in dit geval de vergelijking (A) wordt

$$y^2 + 2hx\ Tang.\ B = h^2\ Sec.^2 B;$$

zij kan alsdan geschreven worden in den vorm

$$y^2 = -2h\ Tang.\ B \left(x - \frac{h}{Sin.\ 2B}\right),$$

en wijst alzoo eene parabool aan, welker top tot abscis heeft $\frac{h}{Sin.\ 2B}$, en waarvan de parameter is $-2hTang.\ B$.

Verplaatsen wij den oorsprong der coördinaten van O naar P', dan zullen wij, omdat $OP' = h\ Cot.\ B$ is, $x = x' + h\ Cot.\ B$ moeten nemen; hierdoor gaat de vergelijking (A) na herleiding over in

$$y^2 + x'^2(1 - Cos.^2 B\ Cosec.^2 D) + hx'\ Sin.\ 2\ B\ Cosec.^2 D + h^2(1 - Cosec.^2 D\ Sin.^2 B) = 0 \ldots (A')$$

Is $B = 0$, zoo wordt de vergelijking (A) onbruikbaar; want in dit geval snijdt de lijn NZ door P getrokken het horizontale vlak niet; zoodat men dan een oneindig ver afgelegen punt O tot oorsprong zou genomen hebben. Voor $B = 0$, geeft echter de vergelijking (A')

$$x'^2(Cosec.^2 D - 1) - y^2 = h^2,$$

als vergelijking der hyperbool, door het schaduwpunt beschreven, op eene plaats die onder den evenaar ligt. Is bovendien $D = 0$, zoo gaat de laatste vergelijking, na met $Sin.^2 D$ vermenigvuldigd te zijn, over in

$$x' = 0;$$

onder den evenaar wordt dus tijdens de nachteveningen door het schaduwpunt eene regte lijn beschre-

Digitized by Google

ven, die door het punt P' gaat en loodregt op N'Z' staat.

Is $D = 0$, zonder dat $B = 0$ is, zoo geeft de vergelijking (A') na met $Sin.^2 D$ vermenigvuldigd te zijn,

$$x'^2 \, Cos.^2 B - hx' \, Sin. 2B + h^2 \, Sin.^2 B = 0,$$

waaruit volgt

$$x' = h \, Tang. B;$$

tijdens de nachteveningen beschrijft dus het schaduwpunt, op welke plaats der aarde ook, (de polen alleen uitgezonderd) eene regte lijn loodregt op N'Z', en waarvan een punt F gevonden wordt, door op N'Z' een stuk $P'F = h \, Tang. B$ te nemen.

Voor alle plaatsen in de verzengde of gematigde luchtstreken gelegen, is $B + D < 90°$, dus $B < 90° - D$, $Cos. B > Sin. D$ en $Cos. B \, Cosec. D > 1$; het schaduwpunt beschrijft dus in die streken, met uitzondering van de reeds beschouwde gevallen, waarin $D = 0$ is, altijd eene hyperbool; en wel bepaaldelijk dat gedeelte der hyperbool, hetwelk de holle zijde naar het noorden of zuiden keert, naargelang de zonsdeclinatie zuidelijk of noordelijk is.

Is de breedte het complement der declinatie, hetgeen alleen binnen de poolcirkels, of tijdens den hoogsten zonnestand ook juist onder de poolcirkels kan plaats hebben; dan is $B + D = 90°$, dus $Cos. B = Sin. D$ en $Cos. B \, Cosec. D = 1$. In dit geval beschrijft dus de schaduw eene parabool; welker opening, bij onderstelde noorderbreedte, naar het zuiden gekeerd is.

Is $B + D > 90°$, hetgeen alleen in de koude luchtstreken kan plaats hebben, tijdens de zon aldaar niet onder gaat, dan is $Cos. B \, Cosec. D < 1$, zoodat alsdan het schaduwpunt eene ellips beschrijft.

Is $B = 90°$, dan gaat de vergelijking (A), even als (A'), over in

$$x^2 + y^2 = h^2 \, Cot.^2 D;$$

onder de pool beschrijft dus het schaduwpunt een cirkel, welke $h \, Cot. D$ tot straal heeft. Is bovendien $D = 0$, dan verkrijgt die cirkel eenen oneindig grooten straal; onder der de pool kan dus het punt P tijdens de nachteveningen geen schaduw op het horizontale vlak werpen.

Digitized by Google

CX. Voorstel.

Door W. L. Ivangh.

Op eene onbekende plaats der aarde, en op eenen onbekenden dag, heeft men de kegelsnede afgeteekend, op een horizontaal vlak door de schaduw van eenig door de zon beschenen punt beschreven, en daaruit de hoegrootheid van de assen dier kegelsnede bepaald. Men vraagt naar de breedte der plaats en naar de zonsdeclinatie.

Opgelost *door* W. L. Ivangh *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Hier kunnen de twee gevallen bestaan, dat de waargenomene schaduw eene ellips of eene hyperbool is. De bekende hoegrootheid der halve assen door a en b, de onbekende breedte en zonsdeclinatie door B en D voorstellende, hebben wij in beide gevallen, volgens de formule (4) van de voorgaande oplossing,

$$Cot.\ D = \frac{b^2}{ah}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

waardoor de declinatie onmiddellijk kan worden berekend.

Uit de formulen (2) van het voorgaande voorstel, vinden wij verder:

voor de ellips, $Cos.^2 B = \frac{a - h Cot.D}{a(1+Cot.^2 D)}$,

voor de hyperbool, $Cos.^2 B = \frac{a + h Cot.D}{a(1+Cot.^2 D)}$;

en zoo wij hierin voor $Cot.\ D$ de waarde (5) overbrengen, komt er:

voor de ellips, $Cos.\ B = \pm h\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2h^2+b^4}}$, . . (6)

voor de hyperbool, $Cos.\ B = \pm h\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2h^2+b^4}}$, . . (7)

waardoor dan almede de breedte kan berekend worden.

De declinatie, door de formule (5) aangewezen, kan men noordelijk of zuidelijk nemen, maar de formulen (6) en (7) wijzen door hare dubbele teekens, breedten aan, die zoowel ongelijknamig als gelijknamig met de declinatie kunnen zijn.

Bij de ellips is echter $B + D > 90°$; indien nu deze $B + D$ de som van noorderbreedte en zuiderdeclinatie

Digitized by Google

ware, zou op die breedte de zon niet boven den horizon komen en derhalve geene schaduw kunnen werpen. Is dus de waargenomene schaduw eene ellips, dan zijn breedte en declinatie gelijknamig.

Wat de hyperbool betreft, valt op te merken, dat de schaduw slechts één van de beide afzonderlijk staande deelen dier kromme lijn beschrijven kan. Naargelang nu dit beschrevene deel de holle zijde naar het zuiden of noorden keert, zal de declinatie noordelijk of zuidelijk zijn; maar nevens deze declinatie kan men de breedte naar welgevallen noordelijk of zuidelijk nemen.

Zij b. v. gegeven $h = 1$, $a = 6$ en $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$, dan heeft men:

voor de beide krommen, $Cot.\,D = \frac{8}{3}$ en $D = 20°\ 33'\ 22''$,
voor de ellips, $Cos.\,B = \sqrt{\frac{5}{7}}$ en $B = 74°\ 49'\ 43''$,
voor de hyperbool, $Cos.\,B = \sqrt{\frac{11}{7}}$ en $B = 65°\ 2'\ 21''$.

Behooren dus de gegevene assen tot eene waargenomene ellips, dan ligt de plaats der waarneming op 74° 49′ 43″ noorderbreedte en heeft de zon 20° 33′ 22″ noorderdeclinatie; of de plaats ligt op 74° 49′ 43″ zuiderbreedte en de zon heeft 20° 33′ 22″ zuiderdeclinatie.

Behooren de gegevene assen tot het waargenomen deel eener hyperbool, dat de holle zijde naar het zuiden keert, dan ligt de plaats der waarneming op 65° 2′ 21″ noorder- of zuiderbreedte en heeft de zon 20° 33′ 22″ noorderdeclinatie.

Behooren de gegevene assen tot het waargenomen deel eener hyperbool, dat de holle zijde naar het noorden keert, dan ligt de plaats wederom op 65° 2′ 21″ noorder- of zuiderbreedte, maar heeft de zon 20° 38′ 22″ zuiderdeclinatie.

CXI. Voorstel.

Door W. L. Ivanoh.

Wanneer men de lengten kent der beide zonneschaduwen, welke, bij evengroote noordelijke als zuidelijke declinatie, op den middag, door eene verticale stift op een horizontaal vlak geworpen worden, begeert men daaruit die zonsdeclinatie alsmede de breedte der plaats te vinden.

Oplossing *door* W. L. Ivanoh en J. S. Spruijer.

Oplossing van W. L. Ivanoh.

Digitized by Google

Wanneer men, in de formulen (a) en (b) van het CIX. Voorstel, $Cos.\phi = 0$ stelt, komt er

$$s = \frac{h\,Cosec.B}{Cos.B+Tang.D\,Sin.B} \text{ en } s = \frac{h\,Cosec.B}{Cos.B-Tang.D\,Sin.B}.$$

Om nu de lengten der schaduwen te verkrijgen, door de verticale stift $PP' = h$ (Fig. 76) op den middag, bij even groote noordelijke en zuidelijke zonsdeclinatie D, op het horizontale vlak geworpen, zal men deze waarden van s slechts behoeven te verminderen met $OP' = h\,Cot.\,B$. Zij dus k de lengte van de kleinste, en l die van de grootste der beide genoemde schaduwen, dan is:

$$k = h\left\{\frac{Cosec.B}{Cos.B+Tang.D\,Sin.B} - Cot.\,B\right\},$$

$$l = h\left\{\frac{Cosec.B}{Cos.B-Tang.D\,Sin.B} - Cot.\,B\right\},$$

of na behoorlijke herleiding

$$k = h\,Tang.\,(B-D) \text{ en } l = h\,Tang.\,(B+D).$$

Zijn nu h, k en l gegeven, dan kan men, door de formulen

$$Tang.\,(B-D) = \frac{k}{h} \text{ en } Tang.\,(B+D) = \frac{l}{h},$$

onmiddellijk de waarden van $B-D$ en $B+D$, en dus ook die van B en D berekenen.

Stelt men, in de bekende formule

$$Tang.\,(p \pm q) = \frac{Tang.p \pm Tang.q}{1 \mp Tang.p\,Tang.q},$$

$p = B+D$ en $q = B-D$, dan vindt men

$$Tang.\,2B = \frac{Tang.(B+D)+Tang.(B-D)}{1-Tang.(B+D)\,Tang.(B-D)}$$

en

$$Tang.\,2D = \frac{Tang.(B+D)-Tang.(B-D)}{1+Tang.(B+D)\,Tang.(B-D)};$$

door dus hierin de bovenstaande waarden over te brengen, heeft men ook nog

$$Tang.\,2B = \frac{h(l+k)}{h^2-lk} \text{ en } Tang.\,2D = \frac{h(l-k)}{h^2+lk},$$

waardoor men almede B en D kan berekenen.

CXII. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Van eenen vierhoek, in eenen cirkel beschreven, worden elke twee over elkander staande zijden tot aan derzelver

Digitized by Google

ontmoetingspunt verlengd. Men vraagt de hoegrootheid van deze verlengstukken in de vier zijden des vierhoeks als gegevens uit te drukken.

Opgelost *door* G. Koster, J. H. van Kooten, W. L. Ivanon, J. S. Speijer, H. W. Bloem en R. van de Weerd.

Oplossing *van* G. Koster.

Laat ABCD (Fig. 77) de vierhoek zijn, waarvan gegeven zijn de zijden AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$ en DA $= d$. Indien dan de verlengden van AB en DC elkander in E ontmoeten, zijn de driehoeken EBC en EDA gelijkvormig; want omdat de vierhoek in eenen cirkel beschreven is, is *hoek* EAD het supplement van *hoek* BCD; maar ook *hoek* ECB is het supplement van *hoek* BCD, en derhalve *hoek* ECB $=$ *hoek* EAD, terwijl de beide genoemde driehoeken bovendien in E eenen hoek gemeen hebben. Uit deze gelijkvormigheid volgt nu de evenredigheid

$$EB : ED = EC : EA = BC : DA,$$

dat is, zoo wij EB $= x$ en EC $= y$ stellen,

$$x : y + c = y : x + a = b : d;$$

en hieruit hebben wij de vergelijkingen:

$$dx = b(y + c) \quad \text{en} \quad dy = b(x + a),$$

of $$dx - by = bc \quad \text{en} \quad bx - dy = -ab.$$

Deze vergelijkingen ten opzigte van x en y oplossende, vinden wij terstond

$$EB = x = \frac{(ab + cd)b}{d^2 - b^2},$$

en $$EC = y = \frac{(ad + bc)b}{d^2 - b^2}.$$

Indien voorts F het ontmoetingspunt is van de verlengden van AD en BC, vindt men op dezelfde wijze, door de gelijkvormigheid der driehoeken FCD en FAB,

$$FC = x' = \frac{(ad + bc)c}{a^2 - c^2},$$

en $$FD = y' = \frac{(ab + cd)c}{a^2 - c^2}.$$

Aanmerking. Uit de gevondene waarden, volgt nog onmiddellijk

$$xx' = yy' \quad \text{of} \quad EB \times FC = EC \times FD;$$

Digitized by Google

hetgeen eene opmerkenswaardige eigenschap van de verlengstukken is.

CXIII. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Men vraagt ook den afstand der ontmoetingspunten, in het voorgaande vraagstuk genoemd, in de zijden des vierhoeks als gegevens uit te drukken.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. S. Speijer, H. W. Bloem *en* R. van de Weerd.

Oplossing van W. L. Ivangh.

Trekken wij in Fig. 77 de lijn EF, stellen wij de gegevene zijden des vierhoeks en derzelver verlengstukken door dezelfde letters voor als in de voorgaande oplossing, en zij bovendien *hoek* ECF $= \phi$, dan hebben wij uit den driehoek ECF onmiddellijk

$$EF = \sqrt{\{x'^2 + y^2 - 2x'y\ Cos.\ \phi\}}.$$

Trekken wij voorts den diagonaal BD des vierhoeks, dan hebben wij uit de driehoeken BCD en BAD, waarin *hoek* BCD $= \phi$ en *hoek* BAD $= 180^\circ - \phi$ is,

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ \phi$$

en

$$BD^2 = a^2 + d^2 + 2ad\ Cos.\ \phi,$$

dus $a^2 + d^2 + 2ad\ Cos.\ \phi = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ \phi$

en

$$Cos.\ \phi = \frac{(b^2 + c^2) - (a^2 + d^2)}{2(ad + bc)}.$$

Brengen wij nu deze waarde van $Cos.\ \phi$, benevens de in de voorgaande oplossing gevondene waarden

$$x' = \frac{(ad + bc)c}{a^2 - c^2} \quad \text{en} \quad y = \frac{(ad + bc)b}{d^2 - b^2},$$

in de reeds voor EF verkregene uitdrukking over, en stellen wij daarbij kortheidshalve $ad + bc = p$, dan komt er

$$EF = \sqrt{\left\{\frac{p^2c^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{p^2b^2}{(d^2-b^2)^2} - \frac{pbc(b^2+c^2-a^2-d^2)}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)}\right\}}.$$

Deze vorm kan nog op de volgende wijze herleid worden. Wij hebben namelijk

$$-\frac{pbc(b^2+c^2-a^2-d^2)}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)} = \frac{pbc(a^2-c^2)+pbc(d^2-b^2)}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)}$$

$$= \frac{pbc}{d^2-b^2} + \frac{pbc}{a^2-c^2},$$

en hierdoor wordt

Digitized by Google

$$EF = \sqrt{\left\{\frac{p^2c^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{pbc}{a^2-c^2} + \frac{p^2b^2}{(d^2-b^2)^2} + \frac{pbc}{d^2-b^2}\right\}};$$

voorts is

$$\frac{p^2c^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{pbc}{a^2-c^2} = \frac{pc(pc+b(a^2-c^2))}{(a^2-c^2)^2},$$

en

$$\frac{p^2b^2}{(d^2-b^2)^2} + \frac{pbc}{d^2-b^2} = \frac{pb(pb+c(d^2-b^2))}{(d^2-b^2)^2};$$

maar omdat $p = ad + bc$ is, hebben wij

$$pc+b(a^2-c^2) = adc+bc^2+a^2b-bc^2 = a(ab+cd),$$

en $$pb+c(d^2-b^2) = adb+b^2c+cd^2-b^2c = d(ab+cd);$$

hierdoor wordt dan, zoo wij nogmaals ter bekorting $ab+cd=q$ stellen:

$$\frac{p^2c^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{pbc}{a^2-c^2} = \frac{pqac}{(a^2-c^2)^2},$$

$$\frac{p^2b^2}{(d^2-b^2)^2} + \frac{pbc}{d^2-b^2} = \frac{pqbd}{(d^2-b^2)^2},$$

en

$$EF = \sqrt{\left\{\frac{pqac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{pqbd}{(d^2-b^2)^2}\right\}}$$

$$= \sqrt{pq}\left\{\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(d^2-b^2)^2}\right\};$$

of, zoo wij wederom voor p en q de waarden schrijven, die zij voorstellen,

$$EF = \sqrt{\left\{(ab+cd)(ad+bc)\left(\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(d^2-b^2)^2}\right)\right\}}.$$

CXIV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Te integreren $\partial y = \dfrac{\partial x}{\sqrt[3]{x^{10}}+2\sqrt[3]{x^6}+\sqrt[3]{x^2}}$.

OPGELOST *door* J. S. SPRIJER, J. BASSAN, H. W. BLOEM en S. DIK, CORNSZ.

OPLOSSING *van* J. S. SPRIJER.

Men stelle $x = z^3$, dan is $\partial x = 3z^2\partial z$; en hierdoor gaat de gegevene vergelijking over in

$$\partial y = \frac{3z^2\partial z}{z^{10}+2z^6+z^2} = \frac{3\partial z}{(z^4+1)^2},$$

waarnit volgt

$$y = 3\int\frac{\partial x}{(z^4+1)^2}.$$

Digitized by Google

Nu is (zie Voorstel XXXIV)

$$\int \frac{\partial x}{(x^4+1)^2} = C + \frac{x}{4(x^4+1)} \cdots$$

$$+ \frac{3}{8\sqrt{2}} \text{ Log. } \sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \text{ Boog Tang. } \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2};$$

en hierin voor x hare waarde $x = \sqrt[3]{x}$ substituerende, zoo komt er, omdat men in plaats van $3C$ kan schrijven C,

$$y = C + \frac{3\sqrt[3]{x}}{4(\sqrt[3]{x^4}+1)} \cdots$$

$$+ \frac{9}{8\sqrt{2}} \text{ Log. } \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}.\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.\sqrt{2}+1}} + \frac{9}{8\sqrt{2}} \text{ Boog Tang. } \frac{\sqrt[3]{x}.\sqrt{2}}{1-\sqrt[3]{x^2}}.$$

CXV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Eene harmonische reeks van drie termen te vinden, zoodanig, dat zoowel de eerste en derde termen als derzelver som vierkante getallen zijn, en dat de middelste term eene derde magt is.

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Speijer, H. W. Blokm, J. Bassan, J. H. van Kooten en W. L. Ivangh.

Oplossing van J. A. Hansen.

Om de beide uiterste termen der begeerde reeks, aan de voorwaarden te laten voldoen, dat zoowel hunne som als zij zelven vierkanten zijn, kan men voor die termen de algemeen bekende vormen $(p^2-q^2)^2r^2$ en $4p^2q^2r^2$ aannemen, waarvan de som is $(p^2+q^2)^2r^2$. De middelste term, die volgens de eigenschappen der

Digitized by Google

harmonische evenredigheden gelijk is aan het dubbel product der beide uiterste termen gedeeld door hunne som, wordt dan uitgedrukt door $\frac{2(p^2-q^2)^2r^2\times 4p^2q^2r^2}{(p^2+q^2)^2r^2}$ of $\frac{8p^2q^2r^2(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}$; zoodat de harmonische reeks, die aan de eerstgenoemde voorwaarden voldoet, voorgesteld wordt door

$$(p^2-q^2)^2r^2,\quad \frac{8p^2q^2r^2(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}\quad \text{en}\quad 4p^2q^2r^2.$$

Begeert men geheele getallen, zoo kan men $r=(p^2+q^2)s$ nemen; de reeks is dan

$(p^2-q^2)^2(p^2+q^2)^2s^2$, $8p^2q^2(p^2-q^2)^2s^2$ en $4p^2q^2(p^2+q^2)^2s^2$, en opdat nu de middelste term eene derde magt zij, neme men $s=p^2q^2(p^2-q^2)^2$, waardoor de reeks wordt

$p^4q^4(p^2-q^2)^6(p^2+q^2)^2$, $8p^6q^6(p^2-q^2)^6$ en $4p^6q^6(p^2-q^2)^4(p^2+q^2)^2$; zoodat nu deze algemeene vormen eene reeks in geheele getallen voorstellen, die aan al de voorwaarden der opgaaf voldoet.

Deelt men deze algemeene vormen door eene willekeurige zesde magt, b. v. door $p^6q^6(p^2-q^2)^6$, dan blijven de quotiënten

$$\left(\frac{p^2+q^2}{pq}\right)^2,\quad 8\quad \text{en}\quad \left(\frac{2(p^2+q^2)}{p^2-q^2}\right)^2,$$

eene aan de voorwaarden der opgaaf voldoende reeks voorstellen, welker termen dan echter gebrokens kunnen zijn.

Neemt men $p=2$ en $q=1$, zoo vindt men voor de reeks:

in geheelen, 291600, 373248 en 518400;
of in gebrokens, $6\frac{1}{4}$, 8 en $11\frac{1}{25}$.

CXVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Uit een punt van den omtrek eens cirkels, drie koorden te trekken, zoodanig, dat de vierkanten dezer koorden eene harmonische reeks uitmaken.

Opgelost *door* J. A. Stamkart, J. S. Speijer, W. L. Ivangh, H. W. Bloem, J. Bassan, J. A. Hansen *en* G. Kostka.

Oplossing *van* J. A. Stamkart.

Laten AB, AC en AD (Fig. 78) de begeerde koorden zijn, dan zullen hare vierkanten eene harmonische reeks moeten

Digitized by Google

uitmaken. Dewijl echter, volgens eene bekende eigenschap des cirkels, de vierkanten dier koorden evenredig zijn met hare projectiën op de middellijn AE, zoo volgt hieruit, dat dan ook deze projectiën AB', AC' en AD' eene harmonische reeks zullen moeten vormen. Alzoo heeft men de volgende eenvoudige constructie. Trek, uit het gegevene punt A van den omtrek, de middellijn AE; neem daarop het punt D' geheel naar welgevallen, deel de lijn AD', volgens de daarvoor bekende constructie, in eene harmonische reden, door de deelpunten B' en C'; rigt uit B', C' en D' loodlijnen op de middellijn AE op, den omtrek des cirkels in B, C en D ontmoetende, en trek eindelijk de lijnen AB, AC en AD, dan zullen dit de begeerde koorden zijn.

CXVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Een cirkelkwadrant is in twee sectoren verdeeld, en in elken sector een vierkant beschreven, waarvan eene zijde langs den straal des kwadrants valt, terwijl de overstaande zijde hare uiteinden in de deellijn en in den boog des sectors heeft. Indien nu de zijden dezer vierkanten gegeven zijn, begeert men de deelen, waarin de boog des kwadrants verdeeld is, benevens den straal, te bepalen.

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Spijer, J. Bassan *en* H. W. Bloem.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laat het cirkelkwadrant ABC (Fig. 79) in de twee sectoren ABD en ACD verdeeld, en in deze sectoren de vierkanten EFGH en IKLM op de voorgestelde wijze beschreven zijn, dan zal men, de bogen BD en CD of de hoeken BAD en CAD, benevens den straal AB moeten bepalen, indien de zijden der genoemde vierkanten gegeven zijn.

Stel te dien einde, na ook nog de stralen AF en AK getrokken te hebben,

$$AB = AC = AD = AF = AK = r,$$
$$\text{hoek } BAD = \phi, \text{ dus hoek } CAD = 90° - \phi,$$
$$EF = FG = GH = HE = a,$$
$$IK = KL = LM = MI = b,$$

dan volgt, uit de regthoekige driehoeken AHE en AMI,

Digitized by Google

$$AH = EH \times Cot.\, EAH = a\ Cot.\ \phi,$$
$$AM = IM \times Cot.\, IAM = b\ Tang.\ \phi,$$

en dus is

$$AG = AH + GH = a\ Cot.\ \phi + a,$$
$$AL = AM + LM = b\ Tang.\ \phi + b;$$

verder volgt, uit de regthoekige driehoeken AFG en AKL,

$$AG = \sqrt{(AF^2 - FG^2)} = \sqrt{(r^2 - a^2)},$$
$$AL = \sqrt{(AK^2 - KL^2)} = \sqrt{(r^2 - b^2)},$$

zoodat men heeft de vergelijkingen

$$\sqrt{(r^2 - a^2)} = a\ Cot.\ \phi + a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

en

$$\sqrt{(r^2 - b^2)} = b\ Tang.\ \phi + b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

waaruit nu de beide onbekenden ϕ en r moeten opgelost worden.

Uit (1) en (2) de waarden van r^2 afzonderende en aan elkander gelijk stellende, komt er

$$a^2\ Cot.^2\phi + 2a^2\ Cot.\phi + 2a^2 = b^2\ Tang.^2\phi + 2b^2\ Tang.\phi + 2b^2;$$

en zoo men dan deze vergelijking met $Tang.^2\phi$ of met $Cot.^2\phi$ vermenigvuldigt, vindt men na rangschikking

$$\left.\begin{array}{l} b^2\ Tang.^4\phi + 2b^2\ Tang.^3\phi + 2(b^2 - a^2)\ Tang.^2\phi - 2a^2\ Tang.\phi - a^2 = 0 \\ \text{of} \quad a^2\ Cot.^4\phi + 2a^2\ Cot.^3\phi + 2(a^2 - b^2)\ Cot.^2\phi - 2b^2\ Cot.\phi - b^2 = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (3)$$

uit welke vierdemagtsvergelijkingen $Tang.\phi$ of $Cot.\phi$ kunnen berekend worden, zoodra a en b in getallen gegeven zijn, terwijl dan verder de waarde van r door middel van (1) of (2) gevonden wordt.

Men kan echter ook onmiddellijk eene vergelijking, ter bepaling van r uit de gegevens, opmaken. Uit (1) en (2) namelijk volgt:

$$a\ Cot.\phi = -a + \sqrt{(r^2 - a^2)},$$
$$b\ Tang.\phi = -b + \sqrt{(r^2 - b^2)},$$

Digitized by Google

en deze waarden met elkander vermenigvuldigende, heeft men achtervolgens:

$$ab = ab - a\sqrt{(r^2 - b^2)} - b\sqrt{(r^2 - a^2)} + \sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)},$$

$$a\sqrt{(r^2 - b^2)} + b\sqrt{(r^2 - a^2)} = \sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)},$$

$$a^2(r^2 - b^2) + b^2(r^2 - a^2) + 2ab\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)} = r^4 - a^2r^2 - b^2r^2 + a^2b^2,$$

$$2ab\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)} = r^4 - 2(a^2 + b^2)r^2 + 3a^2b^2,$$

$$4a^2b^2(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) = \{r^4 - 2(a^2 + b^2)r^2 + 3a^2b^2\}^2,$$

$$r^8 - 4(a^2 + b^2)r^6 + 2(2a^4 + 5a^2b^2 + 2b^4)r^4 - 8a^2b^2(a^2 + b^2)r^2 + 5a^4b^4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Laat ter toepassing gegeven zijn $a^2 = 153$ en $b^2 = 25$, dan heeft men volgens (4)

$$r^8 - 712r^6 + 134386r^4 - 5446800r^2 + 73153125 = 0,$$

waaruit gevonden wordt $r^2 = 425$;

voorts is dan volgens (1) en (2)

$$Cot.\phi = -1 + \sqrt{\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)} = \tfrac{1}{3},$$

$$Tang.\phi = -1 + \sqrt{\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)} = 3,$$

dus $\phi = Boog\ BD = 71°\ 33'\ 54'',2$ en $Boog\ CD = 18°\ 26'\ 5'',8.$

Aanmerking *uit de oplossing van* J. S. Speijer. Hoezeer de gevondene eindvergelijkingen tot den vierden graad opklimmen, laat het voorstel slechts ééne, maar ook altijd ééne, oplossing toe; welke willekeurige waarden men ook aan de gegevens toekent.

Immers zijn de coëfficiënten der vergelijkingen (3) zoodanig, dat er niet meer dan ééne afwisseling van teeken in voorkomt, hetzij men $a > b$ of $b > a$ stelt. Die vergelijkingen kunnen dus niet meer dan éénen po-

Digitized by Google

sitieven wortel hebben, maar dien hebben zij ook zeker, omdat de laatste term negatief is. Daar nu *Tang.* ϕ of *Cot.* ϕ inderdaad positief moet zijn, kunnen die vergelijkingen niet meer dan één, maar zullen zij ook altijd één antwoord op de vraag geven.

CXVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Op de zijde AB (Fig. 80) *van eenen driehoek* ABE, *uitwendig een vierkant* ABCD *beschreven zijnde, heeft men de lijn* DE *getrokken. Indien nu deze lijn, benevens de zijden* AE *en* BE *des driehoeks, gegeven zijn, wil men daaruit de zijde* AB *berekenen.*

Opgelost *door* J. Bassan, H. W. Bloem, J. S. Spelijer, J. A. Hansen, W. L. Ivangh *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel AE $= a$, BE $= b$, DE $= d$, AB $=$ AD $= x$ en *hoek* ADE $= \phi$, dan is vooreerst, uit den driehoek DAE,

$$Sin.\ \text{DAE} = \frac{\text{DE} \times Sin.\ \text{ADE}}{\text{AE}} = \frac{d\ Sin.\ \phi}{a},$$

dus ook

$$Cos.\ \text{BAE} = \frac{d\ Sin.\ \phi}{a};$$

voorts is, uit de driehoeken DAE en BAE,

$$\text{AE}^2 = \text{DE}^2 + \text{AD}^2 - 2\text{DE} \times \text{AD} \times Cos.\ \text{ADE}$$

en

$$\text{BE}^2 = \text{AE}^2 + \text{AB}^2 - 2\text{AE} \times \text{AB} \times Cos.\ \text{BAE},$$

of, voor de verschillende lijnen hare waarden inbrengende,

$$a^2 = d^2 + x^2 - 2dx\ Cos.\ \phi$$

en

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2dx\ Sin.\ \phi$$

Hieruit volgt

$$x^2 + d^2 - a^2 = 2dx\ Cos.\ \phi,$$

$$x^2 + a^2 - b^2 = 2dx\ Sin.\ \phi,$$

of, deze vergelijkingen in de tweede magt verheffende,

$$x^4 + 2(d^2 - a^2)x^2 + (d^2 - a^2)^2 = 4d^2 x^2\ Cos.^2\phi,$$

$$x^4 + 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4d^2 x^2\ Sin.^2\phi,$$

en vervolgens hare som nemende, daarbij in het oog houdende dat $Sin.^2\phi + Cos.^2\phi = 1$ is,

$$2x^4 + 2(d^2 - b^2)x^2 + (d^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4d^2 x^2.$$

Deze vergelijking herleidende, komt er

$$x^4 - (d^2 + b^2)x^2 + \tfrac{1}{2}(d^2 - a^2)^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 = 0;$$

hieruit vindt men

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(d^2 + b^2) \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}(d^2 + b^2)^2 - \tfrac{1}{2}(d^2 - a^2)^2 - \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)^2\right\}},$$

of

$$x^2 = \frac{(d^2 + b^2) \pm \sqrt{\left\{(d^2 + b^2)^2 - 2(d^2 - a^2)^2 - 2(a^2 - b^2)^2\right\}}}{2}$$

Digitized by Google

Alzoo is dan het vierkant van de zijde AB des driehoeks, en dus ook die zijde zelve gevonden.

Aanmerking van J. Badon Ghijsen. De gegevens a, b en d mogen niet naar welgevallen aangenomen worden; want hoezeer de beide waarden van x^2 zeker positief zijn, moet de wortelgrootheid, welke in de voor x^2 gevondene uitdrukking voorkomt, bestaanbaar zijn. Die wortelgrootheid kan herleid worden tot $\sqrt{(d+a\sqrt{2}+b)(d+a\sqrt{2}-b)(d+b-a\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b-d)}$; hieruit blijkt dat de gegevene lijnen moeten voldoen aan de voorwaarden, dat d, $a\sqrt{2}$ en b de zijden eens driehoeks zouden kunnen zijn.

CXIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

In een' scherphoekigen driehoek is een vierkant beschreven, waarvan twee hoekpunten in de basis, en de beide overige hoekpunten in de opstaande zijden des driehoeks liggen. Zoo nu gegeven zijn de inhouden der drie kleinere driehoeken, welke met het ingeschrevene vierkant den geheelen driehoek uitmaken, begeert men de zijden des geheelen driehoeks te berekenen.

Opgelost *door* J. Bassan, H. W. Blom, J. A. Hansen, W. L. Ivangh, J. H. van Kooten, G. Koster, J. S. Spijer en J. B. Geel.

Oplossing van J. Bassan.

Zij ABC (Fig. 81) de driehoek en DEFG het ingeschreven vierkant; stellen wij dan *Inh. drieh.* ADE $= a$, *Inh. drieh.* EBF $= b$, *Inh. drieh.* FGC $= c$ en DE $=$ EF $= x$, zoo zullen wij vooreerst x, en vervolgens de zijden des driehoeks ABC in de gegevene inhouden a, b en c trachten uit te drukken.

Laten wij op AC de loodlijn BI neder, EF in H snijdende, dan is:

$$a = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AD} \times \mathrm{DE} = \tfrac{1}{2}\,x \times \mathrm{AD},$$
$$b = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{EF} \times \mathrm{BH} = \tfrac{1}{2}\,x \times \mathrm{BH},$$
$$c = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CG} \times \mathrm{FG} = \tfrac{1}{2}\,x \times \mathrm{CG},$$

waaruit volgt

$$\mathrm{AD} = \frac{2a}{x},\ \mathrm{BH} = \frac{2b}{x} \text{ en } \mathrm{CG} = \frac{2c}{x}.$$

De gelijkvormige driehoeken ABC en EBF geven de evenredigheid

$$\mathrm{BI} : \mathrm{BH} = \mathrm{AC} : \mathrm{EF};$$

Digitized by Google

hieruit kan afgeleid worden

$$BI - BH : BH = AC - EF : EF,$$

dat is $$HI : BH = AD + CG : EF;$$

of voor de lijnen hare waarden inbrengende

$$x : \frac{2b}{x} = \frac{2(a+c)}{x} : x,$$

waaruit nu onmiddellijk volgt

$$x = \sqrt[4]{4b\,(a+c)}.$$

Voorts hebben wij terstond

$$AC = AD + CG + DG = \frac{2(a+c)}{x} + x = \frac{2(a+c)+x^2}{x},$$

waardoor de zijde AC in x en gegevens is uitgedrukt. Om ook de zijden AB en BC in x en gegevens uit te drukken, hebben wij de evenredigheden

$$AB : BI = AE : DE \text{ en } BC : BI = CF : FG;$$

hierin is $$BI = BH + HI = \frac{2b}{x} + x = \frac{2b+x^2}{x},$$

$$AE = \sqrt{\{AD^2 + DE^2\}} = \sqrt{\{\frac{4a^2}{x^2} + x^2\}} = \frac{1}{x}\sqrt{(4a^2 + x^4)},$$

$$CF = \sqrt{\{CG^2 + FG^2\}} = \sqrt{\{\frac{4c^2}{x^2} + x^2\}} = \frac{1}{x}\sqrt{(4c^2 + x^4)},$$

en de genoemde evenredigheden geven alzoo

$$AB = \frac{BI \times AE}{DE} = \frac{(2b+x^2)\sqrt{(4a^2+x^4)}}{x^3},$$

$$BC = \frac{BI \times CF}{FG} = \frac{(2b+x^2)\sqrt{(4c^2+x^4)}}{x^3}.$$

Door dan eindelijk de gevondene waarde van x, in de bovenstaande uitdrukkingen van AC, AB en BC te substitueren, komt er na behoorlijke herleiding:

$$AC = \frac{\sqrt{2b} + \sqrt{2(a+c)}}{\sqrt[4]{b(a+c)^3}} \times (a+c),$$

$$AB = \frac{\sqrt{2b} + \sqrt{2(a+c)}}{\sqrt[4]{b(a+c)^3}} \times \sqrt{(a^2 + ab + bc)},$$

$$BC = \frac{\sqrt{2b} + \sqrt{2(a+c)}}{\sqrt[4]{b(a+c)^3}} \times \sqrt{(c^2 + ab + bc)}.$$

CXX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men vraagt hetzelfde als in het voorgaande voorstel, wanneer, in plaats van de inhouden der drie kleinere driehoeken, de zij-

Digitized by Google

den gegeven zijn van de vierkanten, welke wederom op dezelfde wijze in die kleinere driehoeken kunnen beschreven worden.

Opgelost *door* J. S. Sprijer, J. Bassan, H. W. Bloem, J. A. Hansen *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. S. Sprijer.

Laten (Fig. 81) KLMD, NOPQ, GRST de vierkanten zijn, in de bedoelde kleinere driehoeken beschreven, en waarvan de zijden $KL = LM = a$, $NO = OP = b$, $GR = RS = c$ gegeven zijn; indien dan wederom $DE = EF = x$ gesteld wordt, kan vooreerst de waarde van deze onbekende op de volgende wijze gevonden worden.

De driehoeken LME en ENO zijn gelijkvormig, zoo als ook de driehoeken SRF en FQP; hieruit volgen de evenredigheden

$$LM : ME = EN : NO \text{ en } RS : RF = QF : PQ,$$

of $\quad a : x - a = EN : b$ en $c : x - c = QF : b$;

dus is $\quad EN = \frac{ab}{x-a}$ en $QF = \frac{bc}{x-c}$;

en daar uit de figuur volgt

$$EN + QF + NQ = EF,$$

is alzoo $\quad \frac{ab}{x-a} + \frac{bc}{x-c} + b = x,$

of na behoorlijke herleiding

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + acx + abc = 0,$$

uit welke derdemagtsvergelijking men x berekenen kan, zoodra a, b en c in getallen gegeven zijn.

Heeft men x berekend, zoo zal men gemakkelijk de zijde AC des driehoeks kunnen vinden; want de driehoeken ABC en EBF gelijkvormig zijnde, is

$$OP : EF = EF : AC \text{ of } b : x = x : AC,$$

en dus $\quad AC = \frac{x^2}{b};$

Verder is $\quad BI : BH = x : b,$

dus ook $\quad BI - BH : BI = x - b : x,$

of $\quad x : BI = x - b : x,$

waaruit volgt $\quad BI = \frac{x^2}{x-b};$

ook is

$$EO = \sqrt{(EN^2 + NO^2)} = \sqrt{\left\{\frac{a^2b^2}{(x-a)^2} + b^2\right\}} = \frac{b}{x-a}\sqrt{(2a^2 - 2ax + x^2)},$$

Digitized by Google

en

$$FP = \sqrt{(QF^2 + PQ^2)} = \sqrt{\left\{\frac{b^2c^2}{(x-c)^2} + b^2\right\}} = \frac{b}{x-c}\sqrt{(2c^2 - 2cx + x^2)};$$

de uit de figuur voortvloeijende evenredigheden

$$AB : EO = BI : ON \text{ en } BC : FP = BI : PQ,$$

geven dan eindelijk $AB = \frac{EO \times BI}{ON} = \frac{x^2\sqrt{(2a^2 - 2ax + x^2)}}{(x-b)(x-a)}$,

en $$BC = \frac{FP \times BI}{PQ} = \frac{x^2\sqrt{(2c^2 - 2cx + x^2)}}{(x-b)(x-c)}.$$

Ook de zijden AB en BC vindt men dus terstond, zoodra de waarde van x uit de bovenstaande derdemagtsvergelijking berekend is.

CXXI. Voorstel.

Door T. A. F. Delprat.

De horizontale en verticale projectiën van de gemeene doorsnede van twee vlakken te construeren, indien de horizontale en verticale doorgangen van die vlakken zoodanig gegeven zijn, dat zij allen door een zelfde punt van de as van projectie gaan.

Opgelost *door* T. A. F. Delprat, L. Cohen Stuart *en* J. S. Spelier.

Oplossing *van* T. A. F. Delprat.

Laten PA′ en PA″ (Fig. 82) de horizontale en verticale doorgangen van het eene, PB′ en PB″ die van het andere der gegevene vlakken zijn, zoodat al deze doorgangen door een zelfde punt P gaan van de as van projectie OX, dan is vooreerst het punt P een punt, niet alleen van de gemeene doorsnede der beide vlakken A′PA″ en B′PB″, maar ook tevens van de te construeren horizontale en verticale projectiën dier doorsnede.

Trekken wij, uit een willekeurig punt C van OX, de lijnen CC′ en CC″ evenwijdig met PA′ en PA″, dan zijn dit de doorgangen van een vlak C′CC″, dat evenwijdig met het vlak A′PA″ is, en dat derhalve het vlak B′PB″ snijdt volgens eene lijn, die evenwijdig met de doorsnede der vlakken A′PA″ en B′PB″ loopt.

Construeren wij nu de projectiën DE′ en D″E van de gemeene doorsnede der vlakken B′PB″ en C′CC″, door uit de snijpunten D″ en E′ der doorgangen loodlijnen op de as OX neder te laten, dan zullen de te construeren projectiën, van de gemeene doorsnede der vlakken A′PA″ en B′PB″, evenwijdig met DE′ en D″E moeten loopen; want de doorsnede van A′PA″ en B′PB″ loopt evenwijdig met die van C′CC″ en B′PB″, en evenwijdige lijnen hebben ook evenwijdige projectiën.

Digitized by Google

Trekken wij dus ten laatste door het punt P, de lijnen M'N' en M"N" respectievelijk evenwijdig met DE' en D"E, dan zal M'N' de horizontale en M"N" de verticale projectie zijn van de gemeene doorsnede der vlakken A'PA" en B'PB".

CXXII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van eenen bol, benevens de horizontale doorgang van een vlak dat dien bol raakt, vraagt men den verticalen doorgang van dat rakende vlak, en de projectiën van het raakpunt te construeren.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer *en* L. Cohen Stuart.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten P' en P" (Fig. 83) de projectiën van den bol, M' en M" de projectiën van zijn middelpunt zijn, dan wordt de as van projectie OX door de lijn M'M" regthoekig gesneden in M; zij voorts AA' de horizontale doorgang van een vlak, dat den bol raakt, en welks verticalen doorgang men begeert te construeren.

Trekken wij dan M'B' loodregt op AA', nemen wij MB = M'B', trekken wij uit B eene raaklijn Br aan de verticale projectie P" van den bol, laten wij uit het raakpunt r eene loodlijn rR op de as OX neder, nemen wij M'R' = MR, en trekken wij daarna uit R' en r lijnen, loodregt door en evenwijdig met de as van projectie, elkander in R" snijdende, dan zullen R' en R" de projectiën zijn van het punt, in hetwelk de bol geraakt wordt door een vlak, dat AA' tot horizontalen doorgang heeft. Trekken wij verder M"R", en uit het punt A, dat aan den horizontalen doorgang en de as gemeen is, eene lijn AA" regthoekig door M"R" of haar verlengde, dan zal deze AA" de begeerde verticale doorgang zijn.

Ter verklaring dezer constructie, merken wij op, dat een verticaal vlak, door de lijn M'B' gebragt, den bol volgens eenen grooten cirkel, welks middelpunt ter hoogte MM" boven het horizontale vlak ligt, en het rakende vlak volgens eene uit B' aan dien cirkel getrokkene raaklijn, snijdt; zijnde het punt waar die raaklijn den cirkel raakt tevens het raakpunt van het vlak met den bol. Door dus MB = M'B' te nemen en vervolgens Br te trekken, is het door B'M' gaande verticale vlak, met de zich daarin bevindende doorsnede des bols en de daaraan uit B' te trekkene raaklijn, in zijne wezenlijke gedaante op het verticale vlak van projectie afgebeeld. Hierdoor wordt alzoo de hoogte rR gevonden van het raakpunt boven het horizontale vlak, zoo als mede de afstand MR,

Digitized by Google

waarop de horizontale projectie van dat raakpunt zich van de gelijknamige projectie van het middelpunt des bols verwijdert; $M'R' = MR$ genomen zijnde, is dan R′ de horizontale en R″ de verticale projectie van het raakpunt. Daar voorts het rakende vlak loodregt op den straal van het raakpunt staat, moet ook de verticale doorgang van dat vlak loodregt op de verticale projectie M″R″ van dien straal zijn; en derhalve is AA″, loodregt door M″R″ getrokken, de begeerde verticale doorgang.

Uit het punt B kan nog eene tweede raaklijn Bs aan den cirkel P″ getrokken worden; wederom uit het raakpunt s eene loodlijn sS op de as nederlatende, vindt men door $M'S' = MS$ te nemen, ook S′ en S″ voor de projectiën van het begeerde raakpunt; en door dan uit A een lijn loodregt door M″S″ te trekken, verkrijgt men Aa″ voor den begeerden verticalen doorgang. Er zijn dus twee antwoorden op het voorstel.

CXXIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde: 1° *de horizontale en verticale projectiën van twee gelijke bollen, die even hoog boven het horizontale vlak maar op ongelijke afstanden vóór het verticale vlak liggen, en* 2° *de horizontale en verticale projectiën van een punt; begeert men de horizontale en verticale doorgangen te construeren van een vlak, dat door het gegeven punt gaat en de beide gegeven bollen raakt.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer *en* L. Cohen Stuart.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten M′ en N′ (Fig. 84) de horizontale, M″ en N″ de verticale projectiën van de middelpunten der bedoelde bollen zijn, dan zijn de punten M″ en N″ op onderling gelijke hoogten $M''M = N''N$ boven de as van projectie OX gelegen, terwijl de punten M′ en N′ op ongelijke afstanden van die as verwijderd zijn; laat voorts Q′ de horizontale en Q″ de verticale projectie van het gegevene punt zijn, dat ter hoogte Q″Q boven het horizontale vlak ligt.

Dewijl de beide bollen even groot zijn, kunnen zij omhuld worden door een cilindervlak, dat de lijn (M′N′, M″N″) tot as, en den gelijken straal der bollen tot straal heeft; desgelijks kunnen zij omhuld worden door een kegelvlak, dat almede de lijn (M′N′, M″N″) tot as heeft, welks top (T′, T″) juist in het midden tusschen de punten (M′, M″) en (N′, N″) gelegen is, en welks halve tophoek N′T′F gevonden wordt, door uit T′ eene raaklijn T′F

Digitized by Google

aan de horizontale projectiën der bollen te trekken. Elk vlak nu, dat de beide bollen raakt, zal dan, naargelang die bollen zich aan dezelfde zijde of aan weerszijden van het rakende vlak bevinden, het genoemde cilindervlak of kegelvlak raken, zoodat tot de oplossing der voorgestelde vraag slechts noodig is, aan dat cilinder- of kegelvlak een door het punt (Q', Q") gaand rakend vlak te brengen.

Nemen wij daartoe eene nieuwe as van projectie PY aan, die het verlengde van M'N' ergens in T regthoekig snijdt, zoo wij dan op dat verlengde een stuk Tt" = N"N = M"M nemen, is t" niet alleen de nieuwe verticale projectie van de middelpunten der bollen, maar ook de nieuwe verticale projectie van de as van het omhullende cilinder- of kegelvlak en van den top van dat kegelvlak; en zoo wij vervolgens Q'qq" loodregt op PY trekken en qq" = QQ" nemen, is q" de nieuwe verticale projectie van het gegevene punt.

Beschrijven wij nu vooreerst uit t", met eenen straal t"C gelijk aan dien der gegevene bollen, eenen cirkel, dan is deze cirkel de doorsnede van het omhullend cilindervlak met het nieuwe verticale vlak; deze cirkel zal dus geraakt worden door den doorgang met het nieuwe verticale vlak, van elk vlak dat het cilindervlak raakt, maar zulk een rakend vlak staat loodregt op het nieuwe verticale vlak van projectie, en kan dus niet door het gegevene punt gaan, zonder dat zijn doorgang door de nieuwe verticale projectie q" van dat punt gaat. Indien wij dus door q" eene raaklijn A"a trekken, aan den cirkel uit t" met t"C beschreven, zal deze lijn de doorgang met het nieuwe verticale vlak zijn, van een vlak dat door het gegeven punt gaande den cilinder en dus ook de gegevene bollen raakt; de lijn A'A, uit A loodregt op PY getrokken, zal de horizontale doorgang van dat rakende vlak zijn; wordende, omdat dit vlak door het punt (Q', Q") gaat, deszelfs doorgang AA" met het eerste verticale vlak geconstrueerd door het punt r van dien doorgang te bepalen; waartoe slechts Q'r' evenwijdig met A'A en r'r gelijk aan QQ" behoeft genomen te worden.

Beschrijven wij ten tweede uit t", na de raaklijn T"F verlengd te hebben tot zij PY in I ontmoet, met eenen straal t"K = TI, een anderen cirkel, dan in deze de doorsnede van het omhullend kegelvlak met het nieuwe verticale vlak; deze nieuwe cirkel zal dus geraakt worden door den doorgang met het nieuwe verticale vlak, van elk vlak dat het kegelvlak raakt. Zal nu zulk een rakend vlak door het gegevene punt gaan, dan moet het ook gaan

Digitized by Google

door de lijn die het gegevene punt met den top van het kegelvlak vereenigt; maar deze lijn (Q'T', q"t") ontmoet het horizontale vlak en het nieuwe verticale, respectievelijk in de punten D en E, die op de gewone wijze geconstrueerd zijn; die punten zijn dan respectievelijk punten van de doorgangen van het begeerde rakende vlak met het horizontale en met het nieuwe verticale; alzoo worden deze doorgangen B'B en Bb verkregen, door eerst uit E eene raaklijn Eb te trekken, aan den cirkel uit t" met t"K beschreven, en vervolgens, uit het snijpunt B' van deze raaklijn met PY, de lijn B'B door het punt D te trekken. De doorgang BB" van dit rakende vlak met het eerste verticale vlak, wordt wederom gemakkelijk geconstrueerd door het punt s van dien doorgang te bepalen, waartoe men slechts Q's' evenwijdig met B'B te trekken en s's = QQ" te nemen heeft.

Wij hebben dan alzoo de doorgangen A'AA" en B'BB" geconstrueerd van twee vlakken, die beide door het punt (Q', Q") gaan en de gegevene bollen raken: liggende de beide bollen aan eene zelfde zijde van het vlak A'AA", maar aan weerszijden van het vlak B'BB". Dewijl men uit het punt q" eene tweede raaklijn aan den cirkel t"C, en uit het punt E eene tweede raaklijn aan den cirkel t"K kan trekken, zal men, door verder even als boven te handelen, nog twee andere vlakken kunnen construeren, die door het gegevene punt gaan en de gegevene bollen raken. De bollen zullen wederom aan dezelfde zijde van het eene, en aan weerszijden van het andere dier rakende vlakken gelegen zijn. Opdat de figuur niet te omslagtig zoude worden, hebben wij de constructie van die twee laatstbedoelde vlakken, niet uitgevoerd.

Was het gegevene punt (Q', Q") binnen het cilindervlak gelegen dat de bollen omhult, zoo zou het rakende vlak A'AA", even als het andere rakende vlak, dat de bollen aan zijne zelfde zijde laat, onbestaanbaar wezen. Was het punt (Q', Q") binnen het omhullend kegelvlak gelegen, dan zou het rakende vlak B'BB" even als het andere rakende vlak dat tusschen de bollen doorgaat, onbestaanbaar zijn. Bij de constructie, zou zich de eerste omstandigheid doen kennen door het vallen van het punt q" binnen den cirkel t"C, en de laatste door het vallen van het punt E binnen den cirkel t"K.

Mogt zoowel het punt q" binnen den cirkel t"C, als het punt E binnen den cirkel t"K vallen, dan zou het gegeven punt (Q', Q") gelijktijdig binnen het cilindervlak en binnen het kegel-

Digitized by Google

vlak liggen, en dan zou het geheel onmogelijk zijn door het gegeven punt een rakend vlak aan de twee bollen te brengen.

CXXIV. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Van twee evene getallen, is de som gelijk aan de derde magt van hun verschil. En als men al de onevene geheele getallen, tusschen de eenheid en elk der bedoelde getallen afzonderlijk, te zamen telt, zal het verschil der beide sommen 48 meer zijn, dan het viervoud van het verschil der getallen. Welke zijn deze getallen?

Opgelost *door* L. Hoefnagel, A. A. Moll, J. S. Speijer *en* J. A. Stankart.

Oplossing *van* L. Hoefnagel.

Laten de twee getallen voorgesteld worden door $x+y$ en $x-y$, dan is, volgens de eerste voorwaarde der opgave,

$$2x = (2y)^3 \text{ of } x = 4y^3. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

De onevene getallen, tusschen de eenheid en eenig even getal p, vormen eene rekenkunstige reeks, waarvan de eerste term is 3, de laatste term $p-1$, het aantal termen $\frac{1}{2}(p-2)$, en dus, volgens eene bekende eigenschap der rekenkunstige reeksen, de som $\frac{1}{4}(p-2)(3+p-1) = \frac{1}{4}(p^2-4)$. Door in deze uitdrukking beurtelings $p = x+y$ en $p = x-y$ te nemen, ziet men, dat de zamentelling der onevene getallen, tusschen de eenheid en elk der getallen $x+y$ en $x-y$ afzonderlijk, de beide sommen $\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2-4)$ en $\frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2-4)$ oplevert, wier verschil alzoo wordt uitgedrukt door xy.

Volgens de tweede voorwaarde der opgave is dus

$$xy = 8y + 48. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Door middel van de vergelijking (1), gaat de vergelijking (2) over in $4y^4 = 8y + 48$,

of $y^4 - 2y - 12 = 0$,

waaruit als eenige bruikbare wortel gevonden wordt

$$y = 2;$$

volgens (1) is dan $x = 32$,

en de begeerde getallen zijn derhalve 34 en 30.

CXXV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Twee octaëdraal-getallen te vinden, wier verschil gelijk is aan 101 maal het verschil hunner worteln; en zoodanig, dat

Digitized by Google

het product van de som hunner wortels met den grootsten wortel, 41 grooter zij dan het kleinste der beide getallen.

Opgelost *door* H. G. Witlage en J. S. Speijer.

Oplossing *van* H. G. Witlage.

Stellen wij de wortels der begeerde octaëdraal getallen door x en y voor, dan zijn die getallen zelven (*)

$$\tfrac{1}{3}x(2x^2+1) \text{ en } \tfrac{1}{3}y(2y^2+1),$$

zoodat wij volgens het voorstel moeten hebben

$$\tfrac{1}{3}x(2x^2+1)-\tfrac{1}{3}y(2y^2+1)=101(x-y), \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$x(x+y)=\tfrac{1}{3}y(2y^2+1)+41. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De vergelijking (1) herleidende, vindt men achtervolgens:

$$(2x^3+x)-(2y^3+y)=303\,(x-y),$$

$$2(x^3-y^3)=302\,(x-y),$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=151,$$

en

$$x^2+xy+y^2=151; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hiervan de vergelijking (2) aftrekkende, komt er

$$y^2=110-\tfrac{1}{3}y(2y^2+1),$$

dat is

$$3y^2=330-2y^2-y,$$

of

$$2y^3+3y^2+y-330=0;$$

deze vergelijking heeft slechts één bestaanbaren wortel, namelijk

$$y=5,$$

en deze waarde van y in de vergelijking (3) overbrengende, komt er

$$x^2+5x=126,$$

waaruit volgt

$$x=9.$$

De beide gevraagde getallen zijn dus 489 en 85.

(*) Wanneer een vierhoekige piramidale kogelstapel het onderste boven, en dus met den top naar beneden geplaatst is, kan men op hetzelfde grondvlak een' anderen dergelijken stapel bouwen, waarvan de top naar boven is gekeerd. Hierdoor verkrijgt men een regelmatig octaëdrum van kogels, waarvan elke ribbe evenveel kogels bevat. Het getal kogels nu, in dit octaëdrum begrepen, is een octaëdraal-getal, tot wortel hebbende het aantal kogels waaruit elke ribbe bestaat. Zijn er dan n kogels in elke ribbe, dan zijn er, zoo als genoegzaam bekend is, $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$ in den vierhoekigen piramidalen stapel begrepen; dit aantal verdubbelende, en er vervolgens n^2, dat is het getal kogels van het maar eenmaal aanwezige grondvlak, aftrekkende, vindt men $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-n^2$, of na herleiding $\frac{1}{3}n(2n^2+1)$ voor het aantal kogels in het octaëdrum begrepen. Alzoo is $\frac{1}{3}n(2n^2+1)$ het octaëdraal-getal, welks wortel n is.

Digitized by Google

CXXVI. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

De waarden van x en y te vinden, uit de vergelijkingen:

$$(y + 1)\, x^9 - 8x^{y+2} = 73x - 36\,(x^2 + 1)$$

en

$$x^{2y+1} = 8x^2 + x - 8.$$

Opgelost *door* J. S. Sprijer, H. G. Witlage, J. Bassan en J. A. Stankart.

Oplossing *van* J. S. Sprijer.

Indien men uit de eerste der gegevene vergelijkingen de waarde van x^y afzondert en in de tweede substitueert, zal men eene nieuwe vergelijking bekomen, waaruit men de waarde van y, in x uitgedrukt zal kunnen vinden. Deze waarde van y dan in de tweede vergelijking overbrengende, komt er eene exponentiale vergelijking in x, waaruit deze onbekende door benadering zou kunnen gevonden worden.

Wij zullen ons echter met eene dergelijke oplossing (die zeker in de bedoeling van den voorsteller niet ligt) niet ophouden; maar veeleer nagaan of wij niet langs eenen anderen weg waarden voor x en y kunnen vinden, die aan de opgegevene vergelijkingen voldoen.

Te dien einde schrijven wij de tweede vergelijking in den vorm

$$x\,(x^{2y} - 1) = 8\,(x^2 - 1),$$

dan zien wij dadelijk, dat de beide leden door $x - 1$ deelbaar zijn, en dat dus, onafhankelijk van eenige waarde van y, aan de tweede vergelijking door $x = 1$ voldaan wordt. Door nu deze waarde van x in de eerste vergelijking over te brengen, komt er

$$y + 1 - 8 = 73 - 72$$

en dus

$$y = 8;$$

zoodat $x = 1$ en $y = 8$ aan de opgegevene vergelijkingen voldoen.

Nemen wij aan dat x en y geheele getallen zijn, zoo is er geen ander antwoord op het voorstel. Want alsdan moet x noodzakelijk een deeler van 36 en van 8 zijn; dus niet anders dan 1, 2 of 4. Evenzoo moet ook x^2 een deeler van $73x - 36$ en van $8 - x$ zijn; aan deze eerste voorwaarde voldoet $x = 1$ en $x = 4$, aan de tweede alleen $x = 1$. Derhalve moet $x = 1$ zijn, waarmede dan overeenkomt $y = 8$.

CXXVII. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

In een driehoek is een vierkant beschreven, zoodanig, dat een van deszelfs zijden langs de basis, en twee hoekpunten in

Digitized by Google

de opstaande zijden des driehoeks liggen. Door de bovenzijde van dit vierkant wordt van den driehoek een kleinere driehoek afgesneden, en in dezen, op dezelfde wijze als in den voorgaanden driehoek, een vierkant geplaatst. In den topdriehoek, door de bovenzijde van het tweede vierkant, van den tweeden driehoek afgesneden, is wederom op gelijke wijze een vierkant beschreven, en zoo gaat men onophoudelijk voort. Men vraagt nu, in de zijden des oorspronkelijken driehoeks als gegevens, de verhouding uit te drukken van zijnen inhoud, tot de som der inhouden van al de alzoo gevormde vierkanten.

Opgelost *door* J. Badon Ghijsen, H. W. Bloem, L. Cohen Stuart *en* J. S. Spruyt.

Oplossing *van* J. Badon Ghijsen.

Laat ABC (Fig. 81) de bedoelde driehoek zijn, waarin aanvankelijk het vierkant DEFG beschreven is, dan snijdt de bovenzijde EF van dit vierkant eenen driehoek EBF van den eersten driehoek af. Laat wederom in den driehoek EBF het vierkant NOPQ beschreven zijn, door welks bovenzijde een driehoek OBP van den driehoek EBF wordt afgesneden, dan kan men in den driehoek OBP weder een vierkant plaatsen; en zoo vervolgens.

Daar de driehoek ABC met het ingeschrevene vierkant DEFG, en de driehoek EBF met het ingeschrevene vierkant NOPQ, gelijkvormige figuren zijn, staan de gelijkstandige zijden dezer driehoeken tot elkander als de zijden der ingeschrevene vierkanten; wij hebben dus $AC : EF = EF : OP$.

Op gelijke wijze blijkt dat EF tot OP staat, als OP tot de zijde van het vierkant in den driehoek OBP beschreven, en zoo vervolgens. Stellen wij dus $AC = a$, en noemen wij de zijden der achtervolgende vierkanten s, s_1, s_2, s_3, enz. dan hebben wij de aaneengeschakelde gedurige evenredigheid

$$a : s = s : s_1 = s_1 : s_2 = s_2 : s_3 = \text{enz.},$$

of ook $a^2 : s^2 = s^2 : s_1^2 = s_1^2 : s_2^2 = s_2^2 : s_3^2 = \text{enz.}$

Hieruit blijkt dat de inhouden der achtervolgende vierkanten eene oneindig voortloopende afdalende rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan de eerste term s^2, en de reden $\frac{s^2}{a^2}$ is; de som S van al die inhouden wordt dus uitgedrukt door

$$S = \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{a^2}} = \frac{a^2 s^2}{a^2 - s^2}.$$

Digitized by Google

Na de loodlijn BI op AC te hebben laten vallen, volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken ABC en EBF ook nog

$$AC : EF = BI : BH;$$

maar, den inhoud des driehoeks ABC door I voorstellende, is $BI = \frac{2I}{a}$, en dus $BH = \frac{2I}{a} - z$; alzoo hebben wij

$$a : z = \frac{2I}{a} : \frac{2I}{a} - z,$$

waaruit gevonden wordt

$$z = \frac{2aI}{a^2 + 2I};$$

en brengen wij nu deze waarde van z, in de reeds voor S gevondene over, dan komt er na herheiding

$$S = \frac{4I^2}{a^2 + 4I}.$$

Hieruit volgt dan eindelijk

$$S : I = 4I : a^2 + 4I,$$

of zoo wij $BC = b$ en $AB = c$ stellen, als wanneer volgens eene bekende formule

$4I = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ is,

$$\frac{S}{I} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{a^2+\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}};$$

zijnde alzoo de gevraagde verhouding in de zijden des driehoeks uitgedrukt.

CXXVIII. VOORSTEL.

Door H. W. BLOEM.

Men vraagt den stand van een vierkant ten opzigte van eene regte lijn te bepalen, indien gegeven is, dat één hoekpunt van hetzelve in de lijn ligt, en dat de loodlijnen, uit de drie overige hoekpunten des vierkants op de lijn nedergelaten, gedurig evenredig zijn.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, H. W. BLOEM, J. S. SPRIJER *en* W. L. IVANGH.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Zij ABCD (Fig. 85, 86 of 87) het vierkant, waarvan men den stand moet bepalen ten opzigte van eene lijn XY, in welke het hoekpunt A ligt, dan kunnen, ten aanzien der loodlijnen BB′, CC′ en DD′, uit de overige hoekpunten des vierkants op de lijn XY nedergelaten, drie verschillende onderstellingen worden aangenomen. De loodlijn CC′ namelijk, uit het over A staande hoek-

Digitized by Google

punt vallende, kan de grootste, de kleinste of de middelste term der gedurige evenredigheid zijn.

In het eerste geval, door Fig. 85 voorgesteld, zijn de beide andere loodlijnen BB′ en DD′ aan dezelfde zijde van XY gelegen als CC′. In het tweede en derde geval, door Fig. 86 en 87 voorgesteld, ligt er van die beide andere loodlijnen slechts éene, en wel de grootste DD′, met CC′ aan dezelfde zijde van XY.

In elk geval zal de stand des vierkants ten opzigte der lijn XY volkomen bepaald zijn, door den hoek, dien de zijde AB met de lijn XY maakt. Stellen wij dus *hoek* BAY $= \phi$, AB $= a$, en trekken wij uit C de lijn CE loodregt op DD′, dan hebben wij, in elk der drie figuren,

$$BB' = DE = AB \times \textit{Sin.}\ BAY = a\ \textit{Sin.}\ \phi,$$

$$DD' = AD \times \textit{Sin.}\ DAD' = AB \times \textit{Cos.}\ BAY = a\ \textit{Cos.}\ \phi;$$

voorts is in Fig. 85

$$CC' = DD' + DE = a\ (\textit{Cos.}\ \phi + \textit{Sin.}\ \phi),$$

terwijl wij in Fig. 86 en 87 hebben

$$CC' = DD' - DE = a\ (\textit{Cos.}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi).$$

De gegevene gedurige evenredigheid der loodlijnen, geeft dan:

In het eerste geval (Fig. 85);

$$BB' : DD' = DD' : CC',$$

$$a\ \textit{Sin.}\ \phi : a\ \textit{Cos.}\ \phi = a\ \textit{Cos.}\ \phi : a\ (\textit{Cos.}\ \phi + \textit{Sin.}\ \phi),$$

$$\textit{Sin.}\ \phi\ (\textit{Cos.}\ \phi + \textit{Sin.}\ \phi) = \textit{Cos.}\ ^2\phi,$$

$$\textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = \textit{Cos.}\ ^2\phi - \textit{Sin.}\ ^2\phi,$$

$$\tfrac{1}{2}\ \textit{Sin.}\ 2\phi = \textit{Cos.}\ 2\phi,$$

$$\textit{Tang.}\ 2\phi = 2,$$

$$2\phi = 63°26'6'',$$

$$\phi = 31°43'3''.$$

In het tweede geval (Fig. 86);

$$CC' : BB' = BB' : DD',$$

$$a\ (\textit{Cos.}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi) : a\ \textit{Sin.}\ \phi = a\ \textit{Sin.}\ \phi : a\ \textit{Cos.}\ \phi,$$

$$\textit{Sin.}\ ^2\phi = \textit{Cos.}\ \phi\ (\textit{Cos.}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi),$$

$$\textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = \textit{Cos.}\ ^2\phi - \textit{Sin.}\ ^2\phi,$$

$$\phi = 31°43'3''.$$

In het derde geval (Fig. 87);

$$BB' : CC' = CC' : DD',$$

$$a\ \textit{Sin.}\ \phi : a\ (\textit{Cos.}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi) = a\ (\textit{Cos}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi) : a\ \textit{Cos.}\ \phi,$$

$$\textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = (\textit{Cos.}\ \phi - \textit{Sin.}\ \phi)^2,$$

$$\textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = \textit{Cos.}\ ^2\phi - 2\ \textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi + \textit{Sin.}\ ^2\phi,$$

$$3\ \textit{Sin.}\ \phi\ \textit{Cos.}\ \phi = 1,$$

Digitized by Google

$$Sin.\ 2\phi = \tfrac{2}{3},$$
$$2\phi = 41°48'37'',$$
$$\phi = 20°54'18'',5.$$

Hierdoor is dan voor elk geval de stand des vierkants ten opzigte van de lijn XY bepaald. In de beide eerste gevallen zou men de waarde van 2ϕ ook in het derde kwadrant, en in het derde geval zou men haar in het tweede kwadrant kunnen nemen, maar daaruit zou men voor het vierkant geenen nieuwen stand vinden, die wezenlijk van de drie aangewezene standen verschilde.

Indien $Tang\ 2\phi = 2$ is, heeft men, volgens eene bekende formule,

$$Tang.\ \phi = \frac{-1 + \sqrt{(1 + Tang.^2\ 2\phi)}}{Tang.\ 2\phi} = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

en indien $Sin.\ 2\phi = \frac{2}{3}$ is, heeft men

$$Tang.\ \phi = \frac{1 - Cos.\ 2\phi}{Sin.\ 2\phi} = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

deze beide waarden zijn juist de deelen der in de uiterste en middelste reden verdeelde eenheid. Verdeelen wij dus eene willekeurige lijn RS (Fig. 88) in de genoemde reden, stellen wij uit het verkregene deelpunt Q eene loodlijn PQ op dezelve, die zoo lang als RS is, en trekken wij de lijnen PR en PS, dan zal de hoek RPQ, over het grootste deel RQ staande, gelijk aan den hoek BAB' van Fig. 85 en 86 zijn; terwijl de hoek SPQ gelijk aan den hoek BAB' van Fig. 87 zal wezen. Alzoo wordt derhalve het vierkant ABCD gemakkelijk, in den verlangden stand ten opzigte van de lijn XY, geconstrueerd.

CXXIX. Voorstel.

Door R. van de Weerd.

Men vraagt eenen vierhoek te construeren, om welken een cirkel kan beschreven worden, indien gegeven zijn de punten, in welke de verlengden der overstaande zijden elkander twee aan twee ontmoeten. Tevens begeert men deze constructie toegepast te zien, om den afstand van twee ontoegankelijke voorwerpen, zonder behulp van trigonometrische formulen of sinustafels, te berekenen.

Opgelost *door* J. S. Speijer, R. van de Weerd en W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Om dit geheel onbepaalde voorstel op te lossen, beschrijve men op de lijn, die de gegevene punten A en B (Fig. 89) vereenigt, twee driehoeken ABC en ABD, wier tophoeken ACB en ADB

Digitized by Google

elkanders supplementen zijn. Hiertoe construere men eenen cirkel, die door de punten A en B gaat, neme op den omtrek willekeurige puuten C en C′ aan weerszijden van AB gelegen, trekke de lijnen AC, BC, AC′ en BC′, en make den driehoek ABD gelijk en gelijkvormig aan den driehoek ABC′. Indien dan, zoo noodig verlengd, AC en BD elkander in E, AD en BC elkander in F snijden, zal CEDF de begeerde vierhoek zijn: want uit de constructie volgt, dat de hoeken ECF en EDF elkanders supplementen zijn, weshalve om den vierhoek CEDF een cirkel beschreven kan worden. Op deze wijze kunnen blijkbaar zoovele verschillende vierhoeken als men goedvindt geconstrueerd worden, die alle aan de vraag voldoen.

Om deze constructie dienstbaar te maken aan het bepalen van den afstand van twee ontoegankelijke voorwerpen, merken wij op dat het er hier voornamelijk op aankomt, dat de hoeken ECF en EDF elkanders supplementen zijn; en dat deze voorwaarde vervuld is, indien deze hoeken beide regt zijn.

Laten nu P en Q (Fig. 90) de bedoelde voorwerpen zijn; dan kiese men eenig punt G en ga uit dat punt, in elk der beide rigtingen GP en GQ zooverre tot in H en I voort, dat men de voorwerpen P en Q onder eenen regten hoek PHQ of PIQ waarneemt; vervolgens bepale men het punt K, waar de rigtingen IP en HQ elkander snijden, en eindelijk mete men de afstanden GH $= a$, HK $= b$, KI $= o$ en IG $= d$. Daar dan GHKI een vierhoek is, om welken een cirkel beschreven kan worden, en waarvan de zijden bekend zijn, heeft men volgens het CXIII. Voorstel onmiddellijk

$$PQ = \sqrt{\{(ab+cd)(ad+bc)\left(\frac{ac}{(a^2-c^2)^2}+\frac{bd}{(d^2-b^2)^2}\right)\}}.$$

CXXX. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Den loop na te gaan der kromme lijn, welker vergelijking is

$$y = \frac{x^3}{a^2} - \frac{3x^2}{a} + a.$$

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. S. Speijer *en* W. L. Ivanon.

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

De gegevene vergelijking kan ook aldus geschreven worden:

$$y = \frac{x^3 - 3ax^2 + a^3}{a^2}; \quad \ldots\ldots (1)$$

Digitized by Google

stelt men hierin $y = 0$, zoo verkrijgt men

$$x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0,$$

van welke vergelijking de wortels zijn:

$x = -0{,}532...a$, $x = +0{,}653..a$ en $x = +2{,}879..a$;

deze waarden van x bepalen de snijpunten B, D en G (Fig. 91) van de kromme lijn met de as der abscissen.

Stelt men in (1) $x = 0$, zoo vindt men $y = a$, waardoor het snijpunt C van de kromme lijn met de ordinaten-as bepaald wordt.

Men differentiëre de vergelijking (1) tweemaal, dan verkrijgt men, na herleiding,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x\,(x - 2a)}{a^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{6\,(x - a)}{a^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

stelt men nu het eerste differentiaalquotiënt gelijk nul, dan heeft men, volgens (2),

$$3x\,(x - 2a) = 0,$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door $x = 0$ en $x = 2a$; terwijl volgens (1) met $x = 0$ overeenstemt $y = a$, en met $x = 2a$, $y = -3a$. Deze waarden van x en y bepalen de punten C en F der kromme, in welke de raaklijn evenwijdig met de as der abscissen loopt.

Volgens (3) heeft men verder:

$$\text{voor } x = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{6}{a},$$

en

$$\text{voor } x = 2a, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +\frac{6}{a};$$

uit de teekens van deze waarden van het tweede differentiaalquotiënt blijkt, dat voor $x = 0$, of in het punt C, de ordinaat een maximum, maar dat voor $x = 2a$, of in het punt F, de negatieve ordinaat $-3a$ een minimum is.

Uit de voorgaande beschouwing blijkt reeds, dat de kromme ten minste één buigpunt, en wel een zoodanig punt tusschen C en F moet hebben. Stellen wij het tweede differentiaalquotiënt gelijk nul, dan hebben wij volgens (3)

$$6\,(x - a) = 0;$$

hieraan voldoet alleen $x = a$, waarmede volgens (1) overeenstemt $y = -a$; deze waarden van x en y wijzen alzoo het eenige buigpunt E der kromme aan.

Digitized by Google

Stelt men in (1) $x = \pm \infty$, dan wordt ook $y = \pm \infty$; de kromme lijn heeft dus in elk der beide hoeken XOY en X'OY' eenen oneindig voortloopenden tak. Stelt men voorts in (2) $x = \pm \infty$, zoo wordt ook $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \infty$; de oneindig voortloopende takken CBA en FGH, zullen dus, naarmate zij zich verder van den oorsprong verwijderen, meer en meer eene loodregte rigting op de as der abscissen verkrijgen. Daar zij echter deze rigting eerst voor oneindige waarden der abscis aannemen, blijkt hieruit dat de kromme geene asymptoten heeft.

Door middel van (1), kan men voor (2) schrijven

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3\left\{\frac{x}{a} + \frac{y - a}{x}\right\};$$

hierin $y = 0$ nemende, en tevens aan x achtervolgens eene der drie bovengevondene, met $y = 0$ overeenstemmende, waarden gevende, vindt men gemakkelijk de hoeken, onder welke de as der abscissen door de kromme gesneden wordt. Neemt men $x = a$ en dus $y = -a$, dan komt er

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -3,$$

ter bepaling van de rigting der raaklijn tot het buigpunt E behoorende.

Vermenigvuldigt men het eerste differentiaalquotiënt, in den bovenstaanden vorm, met de abscis x, dan komt er

$$\frac{x\partial y}{\partial x} = 3\left\{\frac{x^2}{a} + y - a\right\},$$

voor den subtangens, op de ordinaten-as genomen. Hierdoor verkrijgt men een gemakkelijk middel, om aan eenig punt der kromme eene raaklijn te kunnen trekken.

Wanneer men eindelijk in de algemeene formule voor den kromtestraal, namelijk in

$$r = -\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

de waarden (2) en (3) overbrengt, komt er na herleiding

$$r = -\frac{\sqrt{\{9x^2\ (x - 2a)^2 + a^4\}^3}}{6a^4\ (x - a)};$$

deze waarde wordt slechts voor $x = a$ oneindig groot, waardoor het bestaan van het eenige buigpunt E bevestigd wordt. Voor $x = 0$ en voor $x = 2a$, komt er respectievelijk

Digitized by Google

$$r = + \tfrac{1}{3} a \text{ en } r = - \tfrac{1}{3} a,$$

voor de kromtestralen der punten C en F; de kromme heeft dus in die beide punten eene even groote kromming.

CXXXI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert twee getallen te vinden, elk uit twee cijfers bestaande; zoodanig, dat de som dezer getallen en de som hunner vier cijfers, vierkanten zijn.

Opgelost *door* J. Bapon Ghijben, J. S. Spruijt, J. Bassan, W. L. Ivangh *en* A. A. Moll.

Oplossing *van* J. Bapon Ghijben.

De cijfers der tientallen door x en y, die der eenheden door z en u, en dus de getallen zelven door $10x + z$ en $10y + u$ voorstellende, zullen wij moeten hebben

$$10x + z + 10y + u = p^2, \ldots\ldots (1)$$

en

$$x + z + y + u = q^2, \ldots\ldots (2)$$

waarin p en q geheele getallen verbeelden.

Voor $x = y = z = u = 1$, zou $p^2 = 22$ en $q^2 = 4$ zijn, en voor $x = y = z = u = 9$, zou $p^2 = 198$ en $q^2 = 36$ wezen; maar 22 en 198 zijn geene volkomene vierkanten; derhalve zal

$$p^2 > 22 \text{ en } < 198, \; q^2 > 4 \text{ en } < 36$$

moeten zijn, zoodat p^2 geene andere waarden hebben kan dan

$$25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 \text{ of } 196 \ldots (a)$$

en q^2 geene andere dan

$$9, 16 \text{ of } 25 \ldots\ldots\ldots (b)$$

Door de vergelijkingen (1) en (2) van elkander af te trekken, vindt men

$$9(x + y) = p^2 - q^2,$$

dus is

$$x + y = \frac{p^2 - q^2}{9}; \ldots\ldots (3)$$

terwijl uit (2) volgt

$$z + u = q^2 - (x + y)$$

of door substitutie der waarde (3)

$$z + u = \frac{10q^2 - p^2}{9} \ldots\ldots (4)$$

Dewijl $x + y$ zeker niet kleiner dan 2 en niet grooter dan 18 kan wezen, moet volgens (3) $\frac{p^2 - q^2}{9} > 1$ en < 19 of

$$p^2 > q^2 + 9 \text{ en } p^2 < q^2 + 171$$

zijn, terwijl blijkens (4) almede

$$p^2 < 10q^2$$

moet wezen; omdat $x + y$ geen gebroken kan wezen, moet ook nog

Digitized by Google

$p^2 - q^2$ deelbaar door 9

zijn, als wanneer tevens $10p^2 - q^2$ door 9 deelbaar en dus $x + u$ geen gebroken zal worden.

Om aan deze voorwaarden te voldoen, kan men uit de waarden (a) en (b) geene andere nemen, dan:

nevens $q^2 = 9$, $p^2 = 36$ of 81;

en nevens $q^2 = 25$, $p^2 = 169$;

terwijl nevens $q^2 = 16$ geene der waarden (a) voor p^2 bruikbaar is. Wij kunnen dus slechts hebben:

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } q^2 = 9 \text{ en } p^2 = 36,\ x + y = 3 \text{ en } z + u = 6; \\ \text{voor } q^2 = 9 \text{ en } p^2 = 81,\ x + y = 8 \text{ en } z + u = 1; \\ \text{voor } q^2 = 25 \text{ en } p^2 = 169,\ x + y = 16 \text{ en } z + u = 9; \end{array}\right\} \ldots (5)$$

maar alle waarden van x, y, z en u die aan deze vergelijkingen (5) voldoen, zullen noodzakelijk een voldoend antwoord op het voorstel geven.

De begeerde getallen kunnen dus zijn:

10 en 26; 16 en 20; 11 en 25; 15 en 21; 12 en 24, 14 en 22; 13 en 23.
10 en 71; 11 en 70; 20 en 61; 21 en 60; 30 en 51, 31 en 50; 40 en 41.
80 en 89; 81 en 88, 82 en 87; 83 en 86, 84 en 85;
70 en 99; 71 en 98, 72 en 97; 73 en 96, 74 en 95;
90 en 79; 91 en 78, 92 en 77; 93 en 76, 94 en 75.

Er zijn dus in het geheel 29 antwoorden op het voorstel.

CXXXII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer uit twee willekeurige punten, in de evenwijdige zijden van een parallelogram genomen, lijnen naar de overstaande hoekpunten getrokken zijn, begeert men die zijden, uit deze getrokkene lijnen als gegevens, te berekenen.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Bassan *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laten, in de evenwijdige zijden AB en CD (Fig. 92) van het parallelogram ABCD, de punten E en F genomen, en uit deze punten de lijnen EC, ED, FA en FB getrokken zijn; indien wij dan als gegeven aannemen $AF = a$, $BF = b$, $CE = c$ en $DE = d$, hebben wij te berekenen $AB = CD = x$. Trekken wij te dien einde EG en FH loodregt op AB en CD, en stellen wij $EG = FH = h$, $AH = p$ en $DG = q$, dan volgt uit de regthoekige driehoeken, die in de figuur voorkomen:

$$p^2 = a^2 - h^2, \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(x - p)^2 = b^2 - h^2, \ldots\ldots\ldots (2)$$

Digitized by Google

$$q^2 = d^2 - h^2, \ldots\ldots\ldots (3)$$

en $$(x - q)^2 = c^2 - h^2. \ldots\ldots\ldots (4)$$

Door nu (1) van (2), (3) van (4), en (3) van (1) af te trekken, vinden wij:

$$x^2 - 2px = b^2 - a^2, \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x^2 - 2qx = c^2 - d^2, \ldots\ldots\ldots (6)$$

en $$p^2 - q^2 = a^2 - d^2; \ldots\ldots\ldots (7)$$

uit (5) en (6) volgt verder

$$p = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2x},$$

$$q = \frac{x^2 + d^2 - c^2}{2x},$$

en deze waarden in (7) overbrengende, komt er

$$\frac{(x^2 + a^2 - b^2)^2 - (x^2 + d^2 - c^2)^2}{4x^2} = a^2 - d^2,$$

of $(x^2 + a^2 - b^2)^2 - (x^2 + d^2 - c^2)^2 = 4x^2(a^2 - d^2)$;

maar door de bekende ontbinding $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ kunnen wij voor het eerste lid schrijven

$$\{(x^2+a^2-b^2)+(x^2+d^2-c^2)\}\ \{(x^2+a^2-b^2)-(x^2+d^2-c^2)\}$$

of $(2x^2 + a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\ (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$,

en wij hebben alzoo

$$(2x^2+a^2-b^2-c^2+d^2)(a^2-b^2+c^2-d^2) = 4x^2(a^2-d^2),$$

waaruit achtervolgens kan afgeleid worden:

$$(a^2-b^2-c^2+d^2)\ (a^2-b^2+c^2-d^2) = 2x^2\ (a^2+b^2-c^2-d^2),$$

$$x^2 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\ (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)}{2(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)},$$

en $$x = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\ (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)}{2(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}}.$$

CXXXIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

In eenen regthoekigen driehoek is een cirkel beschreven, gelijk mede een vierkant, dat den regten hoek der drieheeks tot een zijner hoeken heeft. Zoo nu de straal van dien cirkel en de zijde van dat vierkant gegeven zijn, begeert men daaruit den driehoek te berekenen en te construeren.

Opgelost door J. S. Speijer, J. Bassan, W. L. Ivanch, A. A. Moll en J. A. Stamkart.

Oplossing van J. S. Speijer.

Laat ABC (Fig. 93) een regthoekige driehoek zijn, M het mid-

Digitized by Google

delpunt van den daarin beschreven cirkel, waarvan de straal MG = MH = MI = a gegeven is; zij voorts BDEF het in dien driehoek beschreven vierkant, waarvan gegeven is de zijde DE = EF = b.

Stellen wij dan AB = x, BC = y en AC = z, zoo is vooreerst

$$x^2 + y^2 = z^2; \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

dewijl AC = AI + CI = AG + CH is, hebben wij verder

$$z = x - a + y - a,$$

of

$$x + y = z + 2a; \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

en omdat *drieh.* ABC = *drieh.* ABE + *drieh.* BCE is, hebben wij ook nog

$$xy = b\,(x + y) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Tellen wij nu het tweevoud van (3) bij (1) op, zoo komt er

$$(x + y)^2 = z^2 + 2b\,(x + y),$$

en hierin de waarde van $x+y$ volgens (2) overbrengende, hebben wij

$$(z + 2a)^2 = z^2 + 2b\,(z + 2a),$$

waaruit na ontwikkeling terstond gevonden wordt

$$z = \frac{2a\,(b - a)}{2a - b} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Deze waarde van z in (2) substituerende, komt er

$$x + y = \frac{2a^2}{2a - b}$$

en volgens (3) is dan verder

$$xy = \frac{2a^2\,b}{2a - b},$$

zoodat, volgens eene overbekende leerwijze, uit de beide laatste vergelijkingen gevonden wordt

$$x = \frac{a}{2a - b}\left\{a - \sqrt{(a^2 - 4ab + 2b^2)}\right\} \quad \ldots (5)$$

en

$$y = \frac{a}{2a - b}\left\{a + \sqrt{(a^2 - 4ab + 2b^2)}\right\}; \quad \ldots (6)$$

zijnde hierbij ondersteld dat x de kleinste der beide regthoekszijden voorstelt.

Om den driehoek uit de gegevens, te construeren, beschrijve men op de onbepaalde beenen van eenen regten hoek B, de vierkanten BGMH en BDEF tot zijden hebbende de gegevene lijnen a en b. Vervolgens uit M met MG = MH = a den ingeschreven cirkel beschreven hebbende, trekke men door het hoekpunt E des tweeden vierkants, aan dien cirkel eene raaklijn, de onbepaalde beenen des regten hoeks in A en C snijdende, dan zal ABC de begeerde driehoek zijn.

Digitized by Google

Aanmerking. Uit de constructie blijkt duidelijk dat a en b niet geheel naar willekeur mogen gegeven zijn. Immers moet MI $<$ ME zijn, en daar de panten B, M en E in eene regte lijn liggen, moet men dus hebben MI $<$ BE $-$ BM, dat is

$$a < b\sqrt{2} - a\sqrt{2},$$

waaruit volgt $b > a\,(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$;

voorts moet MI $>$ GF zijn, dus $a > b - a$,

waaruit volgt $b < 2a$.

Deze voorwaarden volgen ook uit de bovengevondene waarden van x en y; want ten eerste volgt daaruit, dat $2a - b$ positief en dus $b < 2a$ moet wezen; en ten tweede moet $a^2 - 4ab + 2b^2$ positief zijn, derhalve ook $b^2 - 2ab + \frac{1}{2}a^2 > 0$,

$b^2 - 2ab + a^2 > \frac{1}{2}a^2$, $b - a > \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ of $b > a(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

CXXXIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de waarden van x en y te vinden, uit de integratie der vergelijkingen:

$$\frac{x\partial y}{y\partial x} = \frac{x^2\,(2xy-1)+y^2}{y^2\,(2xy+1)-x^2} \text{ en } \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3y^2\,(x+y)^2 + 2x^2}{3x^2\,(x+y)^2 - 2y^2}.$$

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* J. Bassan.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien wij uit de beide gegevene vergelijkingen de breuken verdrijven, komt er

$$xy^2\,(2xy+1)\,\partial y - x^2\partial y = x^2y\,(2xy-1)\,\partial x + y^2\partial x, \quad (1)$$

en $$3x^2\,(x+y)^2\partial x - 2y^2\partial x = 3y^2\,(x+y)^2\partial y + 2x^2\partial y. \quad (2)$$

Voor (1) kunnen wij schrijven

$$xy^2\partial y - y^2\partial x + x^2y\partial x - x^2\partial y = 2x^2y^2\partial x - 2x^2y^2\partial y,$$

of door x^2y^2 deelende

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{x^2} + \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2} = 2x\partial x - 2y\partial y,$$

waarvan de integraal onmiddellijk blijkt te zijn

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = x^2 - y^2 + a; \ldots\ldots (3)$$

zijnde a de willekeurige standvastige, die bij het differentiëren verdwijnt.

Voor (2) kunnen wij schrijven

$$(3x^2\partial x - 3y^2\partial y)\,(x+y)^2 = 2\,(x^2\partial y + y^2\partial x),$$

of door $(x+y)^2$ deelende

$$3x^2\partial x - 3y^2\partial y = 2\,\frac{x^2\partial y + y^2\partial x}{(x+y)^2};$$

Digitized by Google

maar nu is $x^2\partial y + y^2\partial x = (x+y)(y\partial x + x\partial y) - xy(\partial x + \partial y) = (x+y)\,\partial.xy - xy\partial.(x+y)$, en hierdoor gaat dan de laatste vergelijking over in

$$3x^2\partial x - 3y^2\partial y = 2\,\frac{(x+y)\,\partial.xy - xy\partial.(x+y)}{(x+y)^2},$$

waarvan de integraal weder onmiddellijk blijkt te zijn

$$x^3 - y^3 = 2\,\frac{xy}{x+y} + b; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

door b de bij te voegen willekeurige standvastige voorgesteld zijnde.

Om nu uit de vergelijkingen (3) en (4) de waarden der onbekenden x en y te vinden, zal men een dier onbekenden moeten elimineren. Indien men de standvastigen a en b onbepaald laat; dan zal, omdat beide vergelijkingen na verdrijving der breuken tot de vierde magt opklimmen, de eindvergelijking van de zestiende magt kunnen zijn. Intusschen zal men deze standvastigen ook zoodanig kunnen en mogen bepalen, dat de vergelijkingen of wel de eindvergelijking tot eene lagere magt opklimmen. Neemt men b.v. $a = 2$, dan gaat (3) na met xy vermenigvuldigd te zijn over in $x^2 - 2xy + y^2 = xy(x^2 - y^2)$ of $x - y = xy(x+y)$.

Aanmerking *uit de Oplossing van* J. Bassan. Neemt men de standvastigen a en b beide gelijk nul, dan gaan (3) en (4) over in

$$x^3 - y^3 = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

en

$$x^3 - y^3 = \frac{2xy}{x+y}, \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

waaruit x en y zonder bezwaar kunnen worden opgelost, hoezeer men dan voor die onbekenden slechts onbestaanbare uitdrukkingen zal vinden. Deelt men namelijk (3') in (4') zoo komt er, na weglating van den gemeenen factor $x - y$,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = \frac{2x^2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)};$$

dat is: $(x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2) = 2x^2y^2$,

$$x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 = 0,$$

$$(x^3 + y^3)(x+y) = 0,$$

of $$(x^3 - xy + y^3)(x+y)^2 = 0;$$

zoodat men kan hebben $x + y = 0$ of $x^3 - xy + y^2 = 0$.

Neemt men $x + y = 0$, zoo volgt uit (3') en (4') dadelijk dat ook $x = 0$ en $y = 0$ moet zijn. Neemt men echter $x^3 - xy + y^3 = 0$ of $x^2 + y^2 = xy$, dan heeft men

Digitized by Google

volgens (3') $x^2 - y^2 = 1$; zoodat men dan x en y op te lossen heeft uit de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = xy \text{ en } x^2 - y^2 = 1.$$

Het verschil van de vierkanten dezer vergelijkingen nemende, komt er $4x^2y^2 = x^2y^2 - 1$ of $3x^2y^2 = -1$, waaruit dadelijk gevonden wordt

$$xy = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-3};$$

dus is dan nu

$$x^2 + y^2 = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-3} \text{ en } x^2 - y^2 = 1,$$

bijgevolg $2x^2 = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}$ en $2y^2 = -1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}$,

en $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-3})}$ en $y = \pm\sqrt{(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-3})}$.

CXXXV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de meetkunstige plaats te vinden van de middelpunten der cirkels, welke zoodanig tusschen de omtrekken van twee elkander snijdende cirkels kunnen beschreven worden, dat zij deze raken.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Speijer, L. Cohen Stuart en W. L. Ivangh.

Oplossing van J. Bassan.

Laten M en N (Fig. 94) de middelpunten, $MA = m$ en $NB = n$ de stralen zijn, van twee cirkels die elkander in C en D snijden.

Laten dan vooreerst E en F de middelpunten zijn van cirkels, die van de eerstgenoemde cirkels den eenen uitwendig en den anderen inwendig raken; indien wij dan door elk der raakpunten e, e', f en f' de lijn trekken, die door de twee middelpunten gaat, hebben wij:

$$ME + NE = Me - Ee + Ne' + Ee' = Me + Ne' = m + n,$$

$$MF + NF = Mf + Ff + Nf' - Ff' = Mf + Nf' = m + n;$$

de afstanden van elk middelpunt E of F dezer cirkels tot de punten M en N, zijn dus te zamen standvastig gelijk aan de som der stralen m en n. Derhalve is de meetkunstige plaats der punten E en F eene ellips, de punten M en N tot brandpunten hebbende. Deze ellips moet blijkbaar door de punten C en D gaan; het gedeelte CED is de meetkunstige plaats van de middelpunten der cirkels, die den cirkel MA inwendig en den cirkel NB uitwendig raken, terwijl het gedeelte CFD de middelpunten der cirkels bevat, die den cirkel MA uitwendig en den cirkel NB inwendig raken.

Zij voorts: G het middelpunt van een cirkel, die de beide eerstgenoemde cirkels inwendig in g en g' raakt, en binnen hun

Digitized by Google

gemeenschappelijk deel ligt; H het middelpunt van eenen cirkel, die de beide eerstgenoemden inwendig in h en h' raakt, en buiten om hen heen gaat; I het middelpunt van eenen cirkel, die de twee eerstgenoemden uitwendig in i en i' raakt. Indien wij dan weder door elk raakpunt de lijn trekken, die door de twee middelpunten gaat, hebben wij:

$MG - NG = (Mg - Gg) - (Ng' - Gg') = Mg - Ng' = m - n$,
$NH - MH = (Hh' - Nh') - (Hh - Mh) = Mh - Nh' = m - n$,
$MI - NI = (Mi + Ii) - (Ni' + Ii') = Mi - Ni' = m - n$;

voor elk der drie laatste cirkels, is dus het verschil der afstanden van hun middelpunt G, H of I, tot aan de punten M en N, standvastig gelijk aan het verschil der stralen m en n. De meetkunstige plaats der punten G, H of I is dus eene hyperbool, waarvan M en N de brandpunten zijn. Deze hyperbool gaat wederom blijkbaar door de snijpunten C en D; het gedeelte CD van den eenen tak is de meetkunstige plaats van de middelpunten der rakende cirkels, binnen het gemeenschappelijke deel der cirkels MA en NB gelegen; het overige deel van dien tak bevat de middelpunten des cirkels, die de cirkels MA en NB uitwendig raken; en den tweeden tak der hyperbool eindelijk is de meetkunstige plaats van de middelpunten der rakende cirkels, die buiten om de cirkels MA en NB heengaan.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Buiten eenen hoek is een punt gegeven; uit dit punt trekt men lijnen, de beenen van dien hoek in P en Q snijdende, en vervolgens deelt men de lijn PQ *middendoor in* R. *De vraag is nu, om de meetkunstige plaats van het punt* R *te vinden.*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, G. F. W. BAUER, L. COHEN STUART, J. S. SPEIJER en W. L. IVANOW.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat XAY (Fig. 95) de gegevene hoek en C het gegevene punt zijn, dan hebben wij de meetkunstige plaats te bepalen van het punt R, dat op eenige uit C getrokkene lijn CPQ, juist in het midden tusschen de punten P en Q, gelegen is.

Nemen wij daartoe de beenen AX en AY van den gegeven hoek, respectievelijk tot assen der x en der y aan, en laat de plaats van het punt C door zijne coördinaten a en b ten opzigte van die assen gegeven zijn, dan is de vergelijking der lijn CPQ

$$Y - b = A(X - a),$$

Digitized by Google

zijnde A een onbepaalde coëfficiënt, die verandert wanneer men de lijn CPQ om het punt C laat draaijen.

Noemen wij p en q de afstanden, waarop zich de snijpunten P en Q van den oorsprong A verwijderen, dan zal, in de vergelijking der lijn CPQ, met $Y = 0$ overeenstemmen $X = p$, terwijl men voor $X = 0$ hebben zal $Y = q$; hieruit volgt dan

$$p = a - \frac{b}{A} \text{ en } q = b - aA.$$

Stellen wij nu de coördinaten van het punt R door x en y voor, dan is, omdat dit punt juist midden tusschen de punten P en Q ligt,

$$x = \tfrac{1}{2}p \text{ en } y = \tfrac{1}{2}q,$$

of $$2x = a - \frac{b}{A} \text{ en } 2y = b - aA,$$

en zoo wij dan, tusschen de beide laatste vergelijkingen, den onbepaalden coëfficiënt A elimineren, komt er

$$(2x - a)(2y - b) = ab,$$

voor de vergelijking der meetkunstige plaats van het punt R. De punten A en C behooren tot deze meetkunstige plaats, want door $x = 0$ en $y = 0$, of ook door $x = a$ en $y = b$, wordt aan hare vergelijking voldaan.

Deze vergelijking bevat mede, niet alleen de punten R′, die verkregen worden, wanneer de uit C getrokkene lijn de verlengden van de beide beenen des gegeven hoeks snijdt, maar ook de punten R″, die ontstaan wanneer deze lijn het eene been AX zelven en het verlengde van het andere been snijdt. Voor de punten R zijn p en q, dus ook x en y, beide positief; voor de punten R′ zijn p en q, dus ook x en y, beide negatief; maar voor de punten R″ is p en dus ook x positief, terwijl q en dus ook y negatief is.

Deelen wij de lijn, die C met A vereenigt, middendoor in O, dan zijn de coördinaten van het punt O blijkbaar $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}b$. Nemen wij nu het punt O tot nieuwen oorsprong aan, de assen evenwijdig aan zich zelven verplaatsende, dan zullen wij, om de vergelijking onzer meetkunstige plaats ten opzigte van deze nieuwe assen OX′ en OY′ te vinden, in de vorige vergelijking moeten substitueren $x = x' + \frac{1}{2}a$ en $y = y' + \frac{1}{2}b$.

Hierdoor verkrijgen wij dan de vergelijking

$$x'y' = \tfrac{1}{4}ab,$$

waaruit blijkt dat de begeerde meetkunstige plaats eene hyperbool is, die O tot middelpunt heeft en waarvan de asymptoten OX′ en

Digitized by Google

OY′ evenwijdig met de beenen van den gegeven hoek loopen. Omdat, bij den aangenomen stand der assen, $a = \text{AB}$ positief maar $b = -\text{AD}$ negatief is, is ook het product $\frac{1}{4}ab$ negatief; de takken der hyperbool liggen dus niet binnen de hoeken X′OY′ en x′Ox′, maar binnen de hoeken X′Ox′ en Y′Ox′ door de asymptoten gevormd.

De lijn AC is eene middellijn der hyperbool, en de andere diagonaal BD van het parallelogram ABCD is de daaraan toegevoegde middellijn, zoo in rigting als in hoegrootheid; hiervan zal men zich gemakkelijk overtuigen, door de bekende eigenschappen van den driehoek, tusschen de asymptoten en de raaklijn van het punt A begrepen.

De rigting van de assen der hyperbool, wordt onmiddellijk gevonden, wanneer men slechts de hoeken, waaronder de asymptoten elkander snijden, middendoordeelt. Om de hoegrootheid dier assen te vinden, stellen wij dat T de top en dus $\text{OT} = m$ de halve eerste as zij; indien wij dan Tt en Tu evenwijdig met de asymptoten trekken, en *hoek* $\text{XAY} = 2\alpha$ stellen, is $\text{OT} = m$ de diagonaal eener ruit OuTt, welker hoeken $\text{tOu} = \text{tTu} = 180° - 2\alpha$ door den diagonaal worden middendoorgedeeld; de zijden dier ruit berekenende, vindt men $\text{Ot} = \text{Ou} = \frac{m}{2\,Sin.\,\alpha}$. De coördinaten van het punt T zijn dus, ten opzigte van OX′ en OY′ als assen, $-\frac{m}{2\,Sin.\,\alpha}$ en $\frac{m}{2\,Sin.\,\alpha}$; en daar deze coördinaten aan de vergelijking $x'y' = \frac{1}{4}ab$ moeten voldoen, is

$$-\frac{m^2}{4\ Sin.^2\alpha} = \frac{1}{4}qb,$$

waaruit volgt $m = \sqrt{(-\ ab\ Sin.^2\alpha)}$.

Daar $a = \text{AB} = \text{CD}$ en $b = -\text{AD}$ is, hebben wij verder

$$m = \sqrt{\{\text{CD}\ Sin.\ \alpha \times \text{AD}\ Sin.\ \alpha\}};$$

de halve eerste as OT der hyperbool is dus gelijk aan eene middenevenredige D′E, tusschen de projectiën A′D′ en C′D′ van de zijden des parallelograms ADC, op eenige lijn evenwijdig aan de reeds bekende rigting dier as. De lengte der halve tweede as wordt dan verder door $m\ Cot.\ \alpha$ uitgedrukt, en dus mede gemakkelijk geconstrueerd.

Indien de gegevene hoek XAY regt is, zal de bedoelde meetkunstige plaats eene gelijkzijdige hyperbool zijn.

Digitized by Google

CXXXVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De integraal te vinden van

$$\partial y = \frac{2x^4 - 9x^2 + 14}{x^8 - 9x^6 + 32x^4 - 51x^2 + 33}\,\partial x.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Spelijer, W. L. Ivanoh en J. Bassan.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Door eene behoorlijke toepassing van de leerwijze der onbepaalde coëfficiënten, vindt men gemakkelijk, dat de noemer van den opgegeven vorm kan ontbonden worden in de factoren $x^4 - 3x^2 + 3$ en $x^4 - 6x^2 + 11$, en wij hebben dus vooreerst

$$\partial y = \frac{2x^4 - 9x^2 + 14}{(x^4 - 3x^2 + 3)(x^4 - 6x^2 + 11)}\,\partial x;$$

maar nu blijkt verder, dat de teller juist gelijk is aan de som van de factoren des noemers, en dat wij derhalve ook kunnen schrijven

$$\partial y = \frac{\partial x}{x^4 - 3x^2 + 3} + \frac{\partial x}{x^4 - 6x^2 + 11},$$

waaruit volgt $y = \int \frac{\partial x}{x^4 - 3x^2 + 3} + \int \frac{\partial x}{x^4 - 6x^2 + 11} \ldots (1)$

De noemers dezer gedeeltelijke breuken, hebben geene bestaanbare eerstemagtsfactoren; maar voor hunne bestaanbare tweedemagtsfactoren, vindt men op de gewone wijze:

$$x^4 - 3x^2 + 3 = (x^2 + x\sqrt{(3+2\sqrt{3})} + \sqrt{3})(x^2 - x\sqrt{(3+2\sqrt{3})} + \sqrt{3})$$
$$x^4 - 6x^2 + 11 = (x^2 + x\sqrt{(6+2\sqrt{11})} + \sqrt{11})(x^2 - x\sqrt{(6+2\sqrt{11})} + \sqrt{11});$$

zoodat elk der beide termen, waaruit het tweede lid van (1) bestaat, kan voorgesteld worden door den vorm

$$S = \int \frac{\partial x}{(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)}.$$

Volgens de bekende leerwijze ter verdeeling van gebrokens, vindt men

$$\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)} = \frac{1}{2ab}\left\{\frac{x+a}{x^2+ax+b} - \frac{x-a}{x^2-ax+b}\right\},$$

dus is

$$S = \frac{1}{2ab}\left\{\int \frac{(x+a)\,\partial x}{x^2 + ax + b} - \int \frac{(x-a)\,\partial x}{x^2 - ax + b}\right\};$$

maar volgens eene algemeen bekende formule is

Digitized by Google

$$\int \frac{(P+Qx)\,\partial x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{Q}{\gamma}\,Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{\alpha}} + \frac{2P\gamma-Q\beta}{\gamma\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}{2\alpha+\beta x};$$

hierin $P = a$, $Q = 1$, $\alpha = b$, $\beta = a$ en $\gamma = 1$ nemende, komt er

$$\int \frac{(x+a)\,\partial x}{x^2+ax+b} = Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{x^2+ax+b}{b}} + \frac{a}{\sqrt{(4b-a^2)}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(4b-a^2)}}{ax+2b}$$

of zoo wij a door $-a$ vervangen

$$\int \frac{(x-a)\,\partial x}{x^2-ax+b} = Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{x^2-ax+b}{b}} + \frac{a}{\sqrt{(4b-a^2)}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(4b-a^2)}}{ax-2b},$$

en door substitutie dezer waarden wordt dan, na vereeniging der logarithmen en der bogen,

$$S = \frac{1}{2ab}\,Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}} + \frac{1}{2b\sqrt{(4b-a^2)}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(4b-a^2)}}{b-x^2}.$$

Nemen wij nu $a = \sqrt{(3+2\sqrt{3})}$ en $b = \sqrt{3}$, dan vinden wij, voor den eersten term van het tweede lid van (1):

$$\frac{1}{2\sqrt{(9+6\sqrt{3})}}\,Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{(3+2\sqrt{3})}+\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{(3+2\sqrt{3})}+\sqrt{3}}} + \frac{1}{2\sqrt{(-9+6\sqrt{3})}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}}{-x^2+\sqrt{3}};\,(2)$$

nemen wij echter $a = \sqrt{(6+2\sqrt{11})}$ en $b = \sqrt{11}$, dan komt er, voor den laatsten term van (1):

$$\frac{1}{2\sqrt{(66+22\sqrt{11})}}\,Nep.\,Log.\,\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{(6+2\sqrt{11})}+\sqrt{11}}{x^2-x\sqrt{(6+2\sqrt{11})}+\sqrt{11}}} + \frac{1}{2\sqrt{(-66+22\sqrt{11})}}\,Boog\,Tang.\,\frac{x\sqrt{(-6+2\sqrt{11})}}{-x^2+\sqrt{11}};\,(3)$$

zoodat dan de som der vormen (2) en (3), onder bijvoeging eener willekeurige standvastige, de waarde van y of de begeerde integraal is.

Digitized by Google

CXXXVIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Men heeft een vat, in de gedaante van een afgeknotten kegel, en waarvan de as verticaal staat, tot zekere hoogte met water gevuld. Nu verlangt men te weten, in welken tijd een gedeelte van dit water zich, door eene kleine opening in den bodem, kan ontlasten.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., L. Cohen Stuart en J. S. Spruijer.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Laat ABML (Fig. 96 of 97) het bedoelde vat voorstellen, in welks bodem LM zich eene kleine opening I bevindt, en zij op zeker tijdstip de waterspiegel in CD. Stel den inhoud der opening I gelijk q, den inhoud der dwarsdoorsnede CD van het vat gelijk m, de hoogte van die dwarsdoorsnede boven den bodem IF $= x$, en den tijd van uitvloeijing gelijk t, dan is (zie J. P. Delprat, *Hydrodynamica* § 39)

$$\partial t = \frac{m\partial x}{qn\sqrt{2gx}},$$

waarin n een standvastige en door proeven bepaalbare coëfficiënt, g de versnelling der zwaartekracht, en m eene functie van x is.

Stellen wij den halven tophoek des kegels *hoek* PMD $= \alpha$, en den straal van den bodem des vats IM $= r$, zoo is de straal der dwarsdoorsnede CD blijkbaar FD $= r \pm x\,Tang.\,\alpha$; het bovenste teeken in Fig. 96, het onderste in Fig. 97 geldende. Derhalve is dan, kortheidshalve $Tang.\,\alpha = a$ stellende,

$$m = \pi(r \pm ax)^2 = \pi(r^2 \pm 2rax + a^2x^2),$$

bijgevolg

$$\partial t = \frac{\pi(r^2 \pm 2rax + a^2x^2)\,\partial x}{qn\sqrt{2gx}},$$

en $$t = \frac{\pi}{qn\sqrt{2g}}\left\{r^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}} \pm 2ra\int\frac{x\partial x}{\sqrt{x}} + a^2\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{x}}\right\}.$$

Nu is

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},\ \int\frac{x\partial x}{\sqrt{x}} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x},\ \int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{x}} = \tfrac{2}{5}x^2\sqrt{x};$$

hierdoor wordt

$$t = \frac{\pi}{qn\sqrt{2g}}(2r^2\sqrt{x} \pm \tfrac{2}{3}rax\sqrt{x} + \tfrac{2}{5}a^2x^2\sqrt{x}) + Const.,$$

of deze integraal van $x = h$ tot $x = h'$ nemende, als wanneer h en h' de hoogten van den waterspiegel boven den bodem zijn, bij het begin en bij het einde van den tijd t der uitvloeijing,

Digitized by Google

$$t = \frac{\pi}{qn\sqrt{2g}}\left\{2r^2(\sqrt{h}-\sqrt{h'})\pm\tfrac{4}{3}ra(h\sqrt{h}-h'\sqrt{h'})+\tfrac{3}{5}a^2(h^2\sqrt{h}-h'^2\sqrt{h'})\right\},$$

$$t = \frac{\pi\sqrt{2}}{15qn\sqrt{g}}\left\{15r^2(\sqrt{h}-\sqrt{h'})\pm 10ra(h\sqrt{h}-h'\sqrt{h'})+3a^2(h^2\sqrt{h}-h'^2\sqrt{h'})\right\};$$

waardoor het voorstel opgelost is.

CXXXIX. Voorstel.

Door L. Cohen Stuart.

Men vraagt, zonder behulp van differentiaal- of integraalrekening, den inhoud der schijf te bepalen, begrepen tusschen eene hyperboloïde met een of twee bladen, en twee snijdende vlakken, in het eerste geval loodregt op de onbestaanbare, in het tweede geval loodregt op de bestaanbare as.

Opgelost *door* L. Cohen Stuart, G. F. W. Barhr *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* L. Cohen Stuart.

Zij $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

de vergelijking der hyperboloïde met één blad, in Fig. 98 voorgesteld, dan is

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

die van het asymptotisch kegelvlak.

Snijden wij deze oppervlakken door een plat vlak, tot vergelijking hebbende

$$z=\gamma,$$

(zijnde in de figuur OP $=\gamma$ genomen) dan is het verschil der elliptische doorsneden ABCD en abcd onafhankelijk van de waarde van γ. (Zie H. Strootman, *Vraagst. over de Analytische of Hoogere Meetk., gevolgd door eene beschouwing der oppervlakken van den tweeden graad*). Die doorsneden toch zijn gelijk en gelijkvormig met hare projectiën op het vlak der xy, en de vergelijkingen dezer projectiën zijn

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+\gamma^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+\gamma^2)}{c^2}}=1 \text{ en } \frac{x^2}{\frac{a^2\gamma^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2\gamma^2}{c^2}}=1;$$

hare inhouden door I en i voorstellende, hebben wij dan

$$I=\frac{ab\pi(c^2+\gamma^2)}{c^2} \text{ en } i=\frac{ab\pi\gamma^2}{c^2},$$

waaruit volgt

$$I-i=ab\pi;$$

Digitized by Google

zoodat het verschil der elliptische doorsneden, onafhankelijk van $OP = \gamma$, standvastig gelijk is aan den inhoud der keel-ellips.

De inhoud der schijf ABCDEFGH, begrepen tusschen de hyperboloïde, en twee snijdende vlakken evenwijdig met het vlak der xy loopende en daarvan op de afstanden $OP = \gamma$ en $OQ = \gamma_1$ verwijderd, is gelijk aan de som der inhouden van den afgeknotten elliptischen kegel abcdefgh, en van het ringvormige ligchaam abcdABCDefghEFGH, begrensd door de hyperboloïde, het kegelvlak en de snijdende vlakken.

Wat het laatste ligchaam betreft, blijkt uit de boven bewezene eigenschap, dat de inhoud daarvan gelijk is aan dien van een cilinder, de keel-ellips tot grondvlak, en den afstand der snijdende vlakken $PQ = \gamma - \gamma_1$ tot hoogte hebbende; die inhoud is alzoo

$$ab\pi\,(\gamma - \gamma_1).$$

De inhoud van den genoemden afgeknotten kegel is blijkbaar

$$\frac{ab\pi\,(\gamma - \gamma_1)}{3c^2}\,(\gamma^2 + \gamma\gamma_1 + \gamma_1^2);$$

en door deze inhouden te zamen te voegen, komt er alzoo voor den gevraagden inhoud V der schijf

$$V = \frac{ab\pi\,(\gamma - \gamma_1)}{3c^2}\,(\gamma^2 + \gamma\gamma_1 + \gamma_1^2 + 3c^2).$$

Het verdient opmerking, dat, voor $\gamma_1 = 0$ en $\gamma = c$, $V = \frac{2}{3}ab\pi$ is; de inhoud van het ligchaam, begrepen tusschen de hyperboloïde, de keel-ellips en een daarmede op den afstand c evenwijdig loopende doorsnede, is dus gelijk aan dien van eene ellipsoïde, die met de hyperboloïde gelijke assen heeft.

Volgen wij dezelfde redeneringen, ten aanzien der in Fig. 99 voorgestelde hyperboloïde met twee bladen, tot vergelijking hebbende

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

zoo blijkt het dat

$$i - I = abcd - ABCD = ab\pi$$

is, en

$$V = abcdefgh - ABCDabcdEFGHefgh =$$

$$= \frac{ab\pi\,(\gamma - \gamma_1)}{3c^2}\,(\gamma^2 + \gamma\gamma_1 + \gamma_1^2 - 3c^2).$$

Stellen wij $\gamma = c + h$ en $\gamma_1 = c + h_1$, zoo gaat de laatste uitdrukking over in

$$V = \frac{ab\pi\,(h - h_1)}{3c^2}\left(h^2 + hh_1 + h_1^2 + 3c\,(h + h_1)\right),$$

en zij blijft dan voor alle positieve waarden van h en h_1 doorgaan.

Digitized by Google

CXL. Voorstel.

Door L. Cohen Stuart.

Bij een stelsel van gelijkvormige ellipsoïden, vallen de assen langs elkander. Men vraagt naar de meetkunstige plaats van de raakpunten der rakende vlakken, welke, door een gegeven punt, aan de genoemde oppervlakken kunnen gebragt worden.

Opgelost *door* L. Cohen Stuart, G. F. W. Bakker en J. S. Speijer.

Oplossing *van* L. Cohen Stuart.

Laten bij al de ellipsoïden van het gegeven stelsel, de assen tot elkander staan als de getallen p, q en r. Nemen wij het gemeenschappelijk middelpunt als oorsprong, en de lijnen waarlangs de assen vallen als assen van coördinaten aan, zoo zijn de genoemde oppervlakken begrepen in de vergelijking

$$\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{q^2} + \frac{Z^2}{r^2} = \theta^2, \quad \ldots\ldots (1)$$

waarin p, q en r standvastig zijn, terwijl θ eene lijn voorstelt, die voor de verschillende ellipsoïden van het stelsel ook verschillende waarden heeft; zijnde, voor elke waarde van θ, X, Y en Z de coördinaten van een onbepaald punt van het overeenkomstige oppervlak.

De vergelijking van een vlak dat ellipsoïde (1) raakt, is

$$\frac{Xx}{p^2} + \frac{Yy}{q^2} + \frac{Zz}{r^2} = \theta^2, \quad \ldots\ldots (2)$$

waarin x, y en z de coördinaten van het raakpunt verbeelden, terwijl X, Y en Z de coördinaten van een onbepaald punt van dat rakende vlak zijn.

Laten voorts a, b en c de coördinaten van het gegeven punt zijn; dan zal men, opdat het rakende vlak (2) door dat punt ga, moeten hebben

$$\frac{ax}{p^2} + \frac{by}{q^2} + \frac{cz}{r^2} = \theta^2, \quad \ldots\ldots (3)$$

terwijl de coördinaten x, y en z van het raakpunt volgens (2) moeten voldoen aan de vergelijking

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \theta^2. \quad \ldots\ldots (4)$$

Trekken wij nu de beide laatste vergelijkingen van elkander af, dan komt er

$$\frac{x(x-a)}{p^2} + \frac{y(y-b)}{q^2} + \frac{z(z-c)}{r^2} = 0, \quad \ldots (5)$$

Digitized by Google

en daar nu deze vergelijking, onafhankelijk van θ, eene betrekking tusschen de gegevens en de coördinaten van het raakpunt van eene der ellipsoïden met eenig door het gegeven punt gaand vlak aanwijst, is zij de vergelijking der begeerde meetkunstige plaats.

Uit de vergelijking (5) blijkt onmiddellijk, dat deze meetkunstige plaats door het middelpunt der ellipsoïden en door het gegeven punt gaat.

Nemen wij het midden der lijn, die het gegeven punt met het middelpunt van het stelsel vereenigt, als nieuwen oorsprong aan; dat is, stellen wij $x = x_1 + \frac{1}{2}a$, $y = y_1 + \frac{1}{2}b$ en $z = z_1 + \frac{1}{2}c$, dan verandert de vergelijking (5) in

$$\frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} + \frac{z_1^2}{r^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} + \frac{c^2}{r^2}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

de gevondene meetkunstige plaats is dus wederom eene ellipsoïde, gelijkvormig aan die van het stelsel, hebbende tot middellijn de lijn die het gegeven punt met het middelpunt van het stelsel vereenigt, terwijl hare assen evenwijdig met die van het stelsel loopen.

Een der ellipsoïden van het stelsel gaat door het gegeven punt; verplaatst men nu het gegeven punt op het oppervlak dier ellipsoïde, dan blijft $\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} + \frac{c^2}{r^2}$ eene standvastige waarde behouden, en derhalve blijft dan ook de vergelijking (6) dezelfde. Hieruit trekken wij nog dit besluit: Voor alle punten, die men, op eene zelfde tot het stelsel behoorende ellipsoïde, als het gegeven punt zou willen aannemen, zijn de gevraagde meetkunstige plaatsen gelijke en gelijkvormige ellipsoïden met evenwijdige assen; en de meetkunstige plaats van hare middelpunten, is die ellipsoïde van het stelsel, welke de voerstralen, uit het middelpunt van het stelsel naar de gegevene punten loopende, middendoordeelt.

Wij merken ten slotte op, dat hetzelfde onderzoek, op een stelsel gelijkvormige hyperboloïden met één of met twee bladen toegepast, tot volkomen gelijksoortige uitkomsten leidt.

CXLI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijsen.

Drie punten in de ruimte, door hunne horizontale en verticale projectiën gegeven zijnde, begeert men de projectiën te construeren van het middelpunt van den cirkel, welke omtrek door die gegevene punten gaat.

Digitized by Google

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Ja., W. C. Verseput, J. S. Speijer *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij OX (fig. 100) de as van projectie; laten A′, B′ en C′ de horizontale, A″, B″ en C″ de verticale projetiën der gegevene punten zijn. Construeren wij dan vooreerst het ontmoetingspunt D van eene lijn, door de punten (A′, A″) en (B′, B″) getrokken, met het horizontale vlak van projectie; hetgeen geschiedt door de lijn A″B″ te trekken, en uit het snijpunt D″ van deze lijn met de as OX eene loodlijn op die as te stellen, welke loodlijn dan eene door A′ en B′ getrokkene lijn in het begeerde punt D zal snijden. Construeren wij evenzoo het ontmoetingspunt E van eene lijn, door de punten (A′, A″) en (C′, C″) getrokken, met het horizontale vlak; indien wij dan door de punten D en E eene lijn trekken, is deze lijn DE de horizontale doorgang van een hellend vlak, dat door de drie gegevene punten gaat.

Nemen wij een nieuw verticaal vlak van projectie aan, het horizontale vlak snijdende volgens eene nieuwe as PY, die ergens loodregt op DE staat; indien wij dan A′α′, B′β′ en C′γ′ loodregt op PY trekken, en deze loodlijnen verlengen met stukken α′a″, β′b″ en γ′c″, die respectievelijk gelijk zijn aan A″α, B″β en C″γ, zullen a″, b″ en c″ de nieuwe verticale projectiën der gegevene punten zijn. En omdat het hellende vlak, door deze punten gebragt, loodregt op het nieuwe verticale vlak staat, zullen deze nieuwe verticale projectiën a″, b″ en c″ gelegen zijn in eene regte lijn PQ, die tevens door het snijpunt P van de nieuwe as met den doorgang DE gaat; terwijl dan tevens de hoek QPY de standhoek zal zijn, onder welken het horizontale vlak door het hellende vlak gesneden wordt.

Laten wij het laatstgenoemde vlak om zijnen horizontalen doorgang DE omwentelen, dan beschrijven de gegevene punten cirkelbogen, wier vlakken loodregt op de lijn DE staan, en die zich op het nieuwe verticale vlak in hunne ware gedaante projecteren; zijnde deze projectiën niet anders dan cirkelbogen, uit P als middelpunt, met Pa″, Pb″ en Pc″ als stralen beschreven. Trekken wij dus uit de punten a, b en c, waar deze bogen het verlengde van PY ontmoeten, lijnen evenwijdig met DE, en uit de horizontale projectiën A′, B′ en C′ lijnen loodregt op DE, dan zullen deze lijnen door hare snijding de punten A, B en C doen kennen, waar de gegevene punten (A′, A″), (B′, B″) en (C′, C″) zullen komen te lig-

Digitized by Google

gen, indien het door die punten gebragte hellende vlak, om zijnen horizontalen doorgang DE, zoo ver wordt omgewenteld, tot dat het op het horizontale vlak komt te liggen.

In dit alzoo neergeslagen hellende vlak; construeren wij nu het middelpunt M van den cirkel, die door de punten A, B en C gaat. Wordt dan dit neergeslagen vlak weder in zijn vorigen stand gebragt, zoo beschrijft ook weder het punt M eenen cirkelboog, welks vlak loodregt op DE staat en waarvan de projectie op het nieuwe verticale vlak gevonden wordt, door eerst Mm loodregt op PY te trekken en vervolgens, uit P als middelpunt met Pm als straal eenen boog te beschrijven, die PQ ergens in m'' ontmoet. Dit punt m'' is dan de projectie van het begeerde middelpunt, op het nieuwe verticale vlak; en zoo wij uit m'' eene lijn evenwijdig met DE, uit M eene lijn loodregt op DE trekken, bepalen deze lijnen door hare snijding, de horizontale projectie M' van het begeerde middelpunt. Daar voorts dit punt ter hoogte $m''\mu'$ boven het horizontale vlak ligt, behoeven wij slechts $M'M''$ loodregt op OX te trekken en $\mu M'' = m''\mu'$ te nemen, om ook zijne verticale projectie M'' op het eerste verticale vlak te vinden.

Derhalve zijn dan M' en M'' de projectiën van het middelpunt des cirkels, die door de gegevene punten (A', A''), (B', B'') en (C', C'') kan gebragt worden.

CXLII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijsen.

Een punt in de ruimte door zijne horizontale en verticale projectiën gegeven zijnde, begeert men de horizontale en verticale doorgangen te construeren van een vlak, dat door het gegevene punt gaat en met de vlakken van projectie gegevene standhoeken maakt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijsen, W. L. Ivangh, J. S. Spelijer en W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* J. Badon Ghijsen.

Laten P' en P'' (fig. 101) de horizontale en verticale projectiën van het gegevene punt zijn; α en β de hoeken, die het begeerde vlak respectievelijk met het horizontale en verticale vlak moet maken, dan kunnen wij de doorgangen van dat vlak op de volgende wijze vinden.

Zoo men, uit een willekeurig punt van de as van projectie, eene loodlijn op eenig hellend vlak laat vallen, en uit datzelfde punt loodlijnen op de projectievlakken stelt, zullen de hoeken,

Digitized by Google

die de eerstgenoemde loodlijn maakt met de loodlijnen op het horizontale en verticale vlak gesteld, respectievelijk gelijk zijn aan de standhoeken van het hellende vlak met het horizontale en verticale. Stellen wij dus, uit eenig willekeurig punt O van de as van projectie OX, eene loodlijn OZ op het horizontale, en eene loodlijn OY op het verticale vlak, en trekken wij uit O eene lijn in de ruimte, die met de onderling regthoekige lijnen OZ en OY de gegevene hoeken α en β maakt, dan zal het gevraagde vlak loodregt op deze lijn in de ruimte moeten staan.

Om de projectiën van deze loodlijn te vinden, maken wij: *hoek* ZOA $= \alpha$, *hoek* YOB $= \beta$, OA $=$ OB, AA′ loodregt op OX, AA″ loodregt op OZ en BB′ loodregt op OY; indien wij ons nu voorstellen, dat de hoek ZOA om OZ wentelende een kegelvlak beschrijft, doorloopt het punt A eenen cirkel, tot verticale projectie hebbende de regte lijn AA″, en tot horizontale den cirkel A′C, uit O als middelpunt met OA′ als straal beschreven; indien wij ons verder voorstellen, dat de hoek YOB om OY wentelende een kegelvlak beschrijft, doorloopt het punt B almede eenen cirkel, die de regte lijn BB′ tot horizontale projectie heeft. Het snijpunt M′, van de lijn BB′ met den cirkel A′C, is derhalve de horizontale projectie van het punt in de ruimte, alwaar de punten A en B zich, gedurende de genoemde omwentelingen, gelijktijdig kunnen bevinden; zijnde de verticale projectie M″ van dat punt het snijpunt van AA″ met eene lijn uit M′ loodregt door de as OX getrokken. Trekken wij dus OM′ en OM″, dan zijn dit de horizontale en verticale projectiën van eene lijn in de ruimte, die met de onderling regthoekige lijnen OZ en OY de gegevene hoeken α en β maakt, en waarop dus het begeerde vlak loodregt moet staan.

Wanneer wij alzoo door het gegevene punt (P′, P″), daartoe de gewone en overbekende constructie bezigende, een vlak N′NN″ brengen, loodregt op de lijn (OM′, OM″) zullen de doorgangen van dit vlak de begeerde zijn.

Daar de lijn BB′ en de cirkel A′C elkander in twee punten kunnen snijden, zal men, door het tweede snijpunt in plaats van het punt M′ te bezigen, door het punt (P′, P″) ook nog een tweede vlak kunnen brengen, dat de gegevene hoeken α en β met de projectievlakken maakt.

Aanmerking *uit de Oplossing van* W. L. Ivangh. Wanneer men zich het snijpunt van het begeerde vlak met de as van projectie, als het middelpunt van eenen bol voorstelt, wordt het op-

Digitized by Google

pervlak van dien bol, door het begeerde vlak en de projectievlakken, volgens de zijden van eenen regthoekigen bolvormigen driehoek gesneden, welks scheve hoeken de gegevene standhoeken zijn, en welks regthoekszijden de hoegrootheid aanwijzen der hoeken, door de doorgangen van het begeerde vlak met de as van projectie gevormd. Construeert men dus (volgens het V Vraagstuk uit het XIII Boek van de *Beginselen der Meetk.* van J. de Gelder, § 1198,) dien driehoek, zoo leert men de hoeken kennen, die de doorgangen van het gevraagde vlak met de as moeten maken. Men kan dan uit een willekeurig punt van de as, lijnen onder de gevondene hoeken trekken, deze lijnen als doorgangen van eenig vlak beschouwen, en vervolgens evenwijdig met dat vlak door het gegevene punt een ander vlak brengen, dat dan het begeerde zal wezen.

CXLIII. Voórstel.

Door H. G. Witlage.

Van welke twee getallen zijn de som, het product en het verschil der kwadraten, gelijk aan elkander?

Opgelost *door* J. B. Geel, H. G. Witlage, W. van Haarst, Jr., J. A. Hansen, W. L. Ivangh, G. Koster, A. A. Moll, J. A. Stamkart, J. S. Spruijt *en* L. Verveen, Jz.

Oplossing *van* J. B. Geel.

Stel dat de getallen zijn $x + y$ en $x - y$, dan is hunne som $2x$, hun product $x^2 - y^2$, en het verschil hunner kwadraten $4xy$, zoodat wij hebben de vergelijkingen

$$2x = x^2 - y^2$$

en

$$2x = 4xy.$$

Uit de laatste vergelijking volgt, na deeling door $2x$, onmiddellijk

$$y = \tfrac{1}{2};$$

hierdoor gaat de eerste vergelijking over in

$$x^2 - 2x = \tfrac{1}{4},$$

waaruit gevonden wordt $x = 1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

De begeerde getallen zijn dus

$$x + y = 1\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \text{ en } x - y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

terwijl wij voor hunne som, hun product, en het verschil hunner kwadraten hebben:

$$2x = x^2 - y^2 = 4xy = 2 \pm \sqrt{5}.$$

CXLIV. Voórstel.

Door H. G. Witlage.

Van welke twee getallen zijn het verschil, het quotiënt en de som der kwadraten, gelijk aan elkander?

Digitized by Google

Opgelost *door* H. G. Witlage, J. S. Sprijer, W. van Haarst, Jr., J. A. Hansen, W. L. Ivangh, G. Koster *en* A. A. Moll.

Oplossing *van* H. G. Witlage.

Stel het kleinste getal gelijk x en het grootste gelijk y, dan is

$$y - x = \frac{x}{y}$$

en

$$y - x = x^2 + y^2.$$

Uit de eerste vergelijking volgt onmiddellijk

$$x = \frac{y^2}{y+1};$$

en deze waarde voor x in de tweede overbrengende, komt er na herleiding de cubische vergelijking

$$y^3 + y^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Hierin $y = z - \frac{1}{3}$ stellende, verkrijgt men

$$z^3 - \tfrac{1}{3}z = \frac{23}{54};$$

wordt nu hierop de formule van Cardanus toegepast, dan vindt men

$$z = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}},$$

of, de aangeduide berekeningen uitvoerende,

$$z = 0,898530;$$

weshalve de begeerde getallen zijn

$$y = z - \tfrac{1}{3} = 0,565197....$$

en

$$x = \frac{y^2}{y+1} = 0,204094....$$

Voor het verschil, het quotiënt en de som der kwadraten, heeft men dan verder

$$y - x = \frac{x}{y} = x^2 + y^2 = 0,36110....$$

Aanmerking *van* J. S. Sprijer. Men kan de voor x en y gevondene waarden ook negatief nemen, mits men dan door het quotiënt versta de uitkomst der deeling van het grootste getal door het kleinste.

CXLV. Voorstel.

Door A. A. Moll.

Men heeft op eene regte lijn AB (Fig. 102) ***een deel*** AE ***grooter dan de helft van*** AB ***genomen, en op*** AB ***en*** AE ***als middellijnen, aan denzelfden kant van de lijn*** AEB ***halve cirkels beschreven. Vervolgens heeft men op de lijn*** AB, ***uit haar midden, eene loodlijn opgerigt, de omtrekken der genoemde halve***

Digitized by Google

cirkels in C *en* D *snijdende. Indien nu* CD $= a$ *en* BE $= b$ *gegeven is, begeert men den inhoud te vinden der vlakke figuur, tusschen de beide halve omtrekken en de lijn* BE *begrepen.*

Opgelost *door* J. S. Speijer, W. van Haarst, Jr., J. A. Hansen, L. Verveen, Jz., W. L. Ivangh, G. Koster, A. A. Moll, J. A. Stankart, W. C. Verseput *en* J. B. Geel.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij F het middelpunt van den halven cirkel op AB, G dat van dien op AE beschreven, zoo is F tevens het voetpunt der loodlijn, waarvan CD een deel uitmaakt.

Men stelle dan AF $=$ BF $=$ CF $= r$, AG $=$ GE $= s$ en noeme den te vinden inhoud I, zoo is blijkbaar

$$I = \tfrac{1}{2}\pi (r^2 - s^2) = \tfrac{1}{2}\pi (r + s)(r - s).$$

Nu is ten eerste

$$b = \text{BE} = \text{AB} - \text{AE} = 2r - 2s = 2(r - s),$$

waaruit volgt $r - s = \tfrac{1}{2} b$

en $$I = \tfrac{1}{4}\pi b (r + s).$$

Verder is $\text{DF}^2 = \text{AF} \times \text{FE}$,

of, daar DF $=$ CF $-$ CD $= r - a$, AF $= r$ en FE $=$ BF $-$ BE $= r - b$ is,

$$(r - a)^2 = r(r - b),$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$r = \frac{a^2}{2a - b};$$

derhalve is $s = r - \tfrac{1}{2} b = \dfrac{a^2}{2a - b} - \tfrac{1}{2} b = \dfrac{a^2 - ab + \tfrac{1}{2} b^2}{2a - b}$

en $$r + s = \frac{2a^2 - ab + \tfrac{1}{2} b^2}{2a - b} = a + \frac{\tfrac{1}{2} b^2}{2a - b},$$

waaruit dan verder volgt

$$I = \tfrac{1}{4}\pi b \left\{ a + \frac{\tfrac{1}{2} b^2}{2a - b} \right\}$$

of $$I = \tfrac{1}{4}\pi ab + \tfrac{1}{8}\pi \frac{b^3}{2a - b}.$$

CXLVI. Voorstel.

Door L. Horfnagel.

Als de ware afstand van twee sterren A *en* B *was* 23°55′, *de ware hoogte van* A 80° *en die van* B 70°15′; *terwijl de ware grootte van het verlengde van den boog* AB, *uit* B *tot een derde ster* C, *was* 16°; *hoeveel was dan de ware hoogte van* C?

Opgelost *door* J. A. Stankart, J. S. Speijer, J. A. Hansen, W. van Haarst, Jr., G. Koster *en* W. C. Verseput.

Digitized by Google

Oplossing van J. A. Stamkart.

Laten A, B en C (Fig. 103) de drie sterren voorstellen; indien men dan, uit het toppunt T, loodregte bogen door de punten A, B en C op den horizon laat vallen, zullen de hoogten dezer sterren achtervolgens aangeduid worden door de bogen AD, BE en CF.

Nu heeft men in den bolvormigen driehoek ATB

$$Cos.\ BAT = \frac{Cos.\ BT - Cos.\ AB\ Cos.\ AT}{Sin.\ AB\ Sin.\ AT},$$

en in den bolvormigen driehoek ATC

$$Cos.\ CAT = \frac{Cos.\ CT - Cos.\ AC\ Cos.\ AT}{Sin.\ AC\ Sin.\ AT},$$

waaruit volgt de vergelijking

$$\frac{Cos.\ BT - Cos.\ AB\ Cos.\ AT}{Sin.\ AB\ Sin.\ AT} = \frac{Cos.\ CT - Cos.\ AC\ Cos.\ AT}{Sin.\ AC\ Sin.\ AT};$$

vermenigvuldigende aan weerszijden met $Sin.\ AB\ Sin.\ AC\ Sin.\ AT$, komt er

$$Sin.\ AC\ Cos.\ BT - Sin.\ AC\ Cos.\ AB\ Cos.\ AT = Sin.\ AB\ Cos.\ CT - Sin.\ AB\ Cos.\ AC\ Cos.\ AT,$$

of

$$Sin.\ AB\ Cos.\ CT = Sin.\ AC\ Cos.\ BT - (Sin.\ AC\ Cos.\ AB - Sin.\ AB\ Cos.\ AC)\ Cos.\ AT;$$

maar nu is:

$$Cos.\ CT = Cos.\ (90° - CF) = Sin.\ CF,$$
$$Cos.\ BT = Cos.\ (90° - BE) = Sin.\ BE,$$
$$Cos.\ AT = Cos.\ (90° - AD) = Sin.\ AD,$$
$$Sin.\ AC\ Cos.\ AB - Sin.\ AB\ Cos.\ AC = Sin.\ (AC - AB) = Sin.\ BC;$$

hierdoor gaat dan de vorige vergelijking over in

$$Sin.\ AB\ Sin.\ CF = Sin.\ AC\ Sin.\ BE - Sin.\ BC\ Sin.\ AD,$$

waaruit volgt

$$Sin.\ CF = \frac{Sin.\ AC\ Sin.\ BE - Sin.\ BC\ Sin.\ AD}{Sin.\ AB},$$

door welke formule nu de begeerde hoogte CF kan berekend worden, daar gegeven zijn

$$AB = 23°55',\ AD = 80°,\ BE = 70°15',\ BC = 16°$$

en

$$AC = AB + BC = 39°55'.$$

Deze berekening werkelijk verrigtende, vindt men dan

$$CF = 55°5'44.$$

Aanmerking van J. Badon Ghijsen. Wil men de gevondene formule voor de logarithmen geschikt maken, zoo kan men stellen

$$Tang.\ \phi = \frac{Sin.\ BC\ Sin.\ AD}{Sin.\ AC\ Sin.\ BE};$$

Digitized by Google

hierdoor wordt dan *Sin.* BC *Sin* AD = *Sin.* AC *Sin.* BE *Tang.* ϕ, zoodat de teller der voor *Sin.* CF gevondene waarde overgaat in *Sin.* AC *Sin.* BE (1 — *Tang.* ϕ) = *Sin.* AC *Sin.* BE $\times \frac{Sin.(45° - \phi)}{Cos.45° Cos.\phi}$

en men dus verder heeft

$$Sin.\ CF = \frac{Sin.\ AC\ Sin.\ BE\ Sin.\ (45° - \phi)}{Sin.\ AB\ Cos.\ 45°\ Cos.\ \phi}.$$

Hierdoor wordt echter de berekening niet gemakkelijker gemaakt. Immers volgens de laatste formulen heeft men:

Log. Sin. BC	= 9,4403381—10
Log. Sin. AD	= 9,9933515—10
Comp. Log. Sin. AC	= 0,1926864
Comp. Log. Sin. BE	= 0,0263291
Log. Tang. ϕ	= 9,6527051—10
ϕ	= 24°12'9",75
45° — ϕ	= 20°47'50"25
Log. Sin. AC	= 9,8073136—10
Log. Sin. BE	= 9,9736709—10
Log. Sin. (45° — ϕ)	= 9,5503052—10
Comp. Log. Sin. AB	= 0,3921082
Comp. Log. Cos. 45°	= 0,1505150
Comp. Log. Cos. ϕ	= 0,0399577
Log. Sin. CF	= 9,9138706—10
CF	= 55°5'43",9

terwijl men volgens de oorspronkelijke formule deze berekening zou hebben:

Log. Sin. AC	= 9,8073136—10
Log. Sin. BE	= 9,9736709—10
	9,7809845—10
Sin. AC *Sin.* BE	= 0,6039277
Log. Sin. BC	= 9,4403381—10
Log. Sin. AD	= 9,9933515—10
	9,4336896—10
Sin. BC *Sin.* AD	= 0,2714500
teller = 0,6039277—0,2714500	= 0,3324777
Log. teller	= 9,5217625—10
Log. Sin. AB	= 9,6078918—10
Log. Sin. CF	= 9,9138707—10
CF	= 55°5'44".

Digitized by Google

CXLVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Eene meetkunstige reeks van drie termen te vinden, zoodanig, dat men, hare termen respectievelijk met de getallen 4, 14 en 48 verminderende, eene rekenkunstige reeks verkrijgt; en dat er eene harmonische reeks komt, indien men de termen der meetkunstige reeks door de overeenkomstige termen der rekenkunstige deelt.

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., A. A. Moll, J. S. Spreijer, L. Verveen, Jz., W. L. Ivangh, G. Koster, J. A. Stankart, J. B. Gerl *en* J. A. Hansen.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel voor de gevraagde meetkunstige reeks

$$x,\ xy \text{ en } xy^2,$$

dan moeten vooreerst eene rekenkunstige reeks uitmaken

$$x - 4,\ xy - 14 \text{ en } xy^2 - 48;$$

hieruit volgt

$$(x - 4) + (xy^2 - 48) = 2\,(xy - 14),$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x = \frac{24}{(y-1)^2}.$$

Ten andere moeten eene harmonische reeks uitmaken

$$\frac{x}{x-4},\ \frac{xy}{xy-14} \text{ en } \frac{xy^2}{xy^2-48},$$

hetgeen volgens de eigenschappen der harmonische reeksen op hetzelfde neerkomt, alsof de omgekeerde termen

$$\frac{x-4}{x},\ \frac{xy-14}{xy} \text{ en } \frac{xy^2-48}{xy^2}$$

eene rekenkunstige reeks vormen; hieruit volgt dan

$$\frac{x-4}{x} + \frac{xy^2-48}{xy^2} = \frac{2\,(xy-14)}{xy},$$

dat is:

$$1 - \frac{4}{x} + 1 - \frac{48}{xy^2} = 2 - \frac{28}{xy},$$

$$\frac{4}{x} + \frac{48}{xy^2} = \frac{28}{xy},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{12}{xy^2} = \frac{7}{xy},$$

$$y^2 + 12 = 7y,$$

of

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Uit deze vierkantsvergelijking vindt men nu op de gewone wijze

$$y = 3 \text{ of } y = 4.$$

Digitized by Google

Neemt men $y = 3$, dan is $x = \frac{24}{(y-1)^2} = 6$, waardoor men voor de begeerde meetkunstige reeks vindt . 6, 18 en 54;
de rekenkunstige is dan. . . . . 2, 4 » 6;
en de harmonische. . . . . 3, $4\frac{1}{2}$ » 9.

Neemt men echter $y = 4$, dan is $x = \frac{24}{(y-1)^2} = 2\frac{2}{3}$, waardoor men heeft voor de meetkunstige reeks $2\frac{2}{3}$, $10\frac{2}{3}$ en $42\frac{2}{3}$;
voor de rekenkunstige . . . . . — $1\frac{1}{3}$,—$3\frac{1}{3}$ »—$5\frac{1}{3}$;
en voor de harmonische . . . . . — 2 ,—$3\frac{1}{5}$ »—8.

CXLVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Uit den top eens scherphoekigen driehoeks, is eene loodlijn op de basis nedergelaten, waardoor de driehoek in twee regthoekige verdeeld is. Indien nu gegeven zijn de zijden der drie vierkanten, welke zoo in den oorspronkelijken driehoek als in de beide regthoekige driehoeken kunnen beschreven worden, allen op de grondlijn des driehoeks staande, zoo begeert men den driehoek te bepalen.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. B. Geel, W. van Haarst, Jr., J. Bassan, J. A. Hansen, G. Koster, W. C. Verseput, W. L. Ivanoff *en* A. A. Moll.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij ABC (Fig. 104) de driehoek, CD de loodlijn, en laten EFGH, IKDL en MNOD de ingeschreven vierkanten zijn. Stellen wij dan AB $= x$, AC $= y$ en BC $= z$; voorts AD $= p$, BD $= q$ en CD $= h$; terwijl gegeven zijn FH $=$ EF $= a$, IK $=$ KD $= b$ en MN $=$ MD $= c$.

In de gelijkvormige driehoeken ABC en EFC, is nu

AB : EF $=$ CD : CP of $x : a = h : h - a$;

in de gelijkvormige driehoeken ADC en ALI, is

AD : AL $=$ CD : IL of $p : p - b = h : b$;

en in de gelijkvormige driehoeken BDC en BON, is

BD : BO $=$ CD : NO of $q : q - c = h : c$.

Uit elk der drie voorgaande evenredigheden h oplossende, vinden wij:

$$h = \frac{ax}{x-a}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$h = \frac{bp}{p-b}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$h = \frac{cq}{q-c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Digitized by Google

en deze waarden van h aan elkander gelijk stellende, komt er

$$\frac{ax}{x-a} = \frac{bp}{p-b} \text{ en } \frac{ax}{x-a} = \frac{cq}{q-c},$$

uit welke vergelijkingen onmiddellijk kan afgeleid worden

$$p = \frac{abx}{ab + (a-b)\,x}, \quad \ldots\ldots (4)$$

en

$$q = \frac{acx}{ac + (a-c)\,x}; \quad \ldots\ldots (5)$$

daar nu $p + q = x$ is, hebben wij

$$x = \frac{abx}{ab + (a-b)\,x} + \frac{acx}{ac + (a-c)\,x}.$$

Deelen wij de termen dezer vergelijking door x, dan verkrijgen wij, na de breuken verdreven te hebben,

$$a^2bc + ab(a-c)\,x + ac(a-b)\,x + (a-b)(a-c)\,x^2 = \\ = a^2bc + ab(a-c)\,x + a^2bc + ac(a-b)\,x,$$

of

$$(a-b)(a-c)\,x^2 = a^2bc,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x = a\sqrt{\frac{bc}{(a-b)(a-c)}}.$$

Substitueren wij deze waarde van x in (1), (4) en (5), zoo verkrijgen wij na herleiding:

$$h = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{bc} - \sqrt{(a-b)(a-c)}},$$

$$p = \frac{ab\sqrt{c}}{\left\{\sqrt{(a-b)\,c} + \sqrt{(a-c)\,b}\right\}\sqrt{(a-b)}},$$

en

$$q = \frac{ac\sqrt{b}}{\left\{\sqrt{(a-b)\,c} + \sqrt{(a-c)\,b}\right\}\sqrt{(a-c)}};$$

terwijl dan ook verder y en z gevonden zullen worden, door de formulen $y = \sqrt{(h^2 + p^2)}$ en $z = \sqrt{(h^2 + q^2)}$.

CXLIX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Wanneer men, uit het middelpunt van den ingeschreven cirkel eens driehoeks, loodlijnen op de zijden nedergelaten hebbende, de inhouden kent van de drie vierhoeken, waarin deze loodlijnen den driehoek verdeelen, begeert men daaruit den driehoek te bepalen.

OPGELOST *door* G. KOSTER, J. B. GEEL, W. VAN HAARST, JR., J. A. HANSEN, J. S. SPEIJER, J. A. STANKART, W. C. VERSLUYS, J. BASSAN, W. L. IVANGH en A. A. MOLL.

Digitized by Google

Oplossing van G. Koster.

Laat ABC (Fig. 105) de driehoek zijn, waarin een cirkel beschreven is, uit welks middelpunt M de loodlijnen MD, ME en MF op de zijden zijn nedergelaten; dan is gegeven

Inh. vierh. AEMF $= a$, *Inh. vierh.* BDMF $= b$,

en *Inh. vierh.* CDME $= c$.

Stellen wij voorts den straal des ingeschreven cirkels door r voor, en merken wij op dat de lijnen MA, MB en MC de genoemde vierhoeken middendoordeelen, dan hebben wij:

$$AB \times \tfrac{1}{2} r = \textit{Inh. drieh.}\ AMB = \tfrac{1}{2}(a + b),$$
$$AC \times \tfrac{1}{2} r = \textit{Inh. drieh.}\ AMC = \tfrac{1}{2}(a + c),$$
$$\text{en}\quad BC \times \tfrac{1}{2} r = \textit{Inh. drieh.}\ BMC = \tfrac{1}{2}(b + c),$$

waaruit volgt:

$$AB = \frac{a+b}{r},\ AC = \frac{a+c}{r};\ BC = \frac{b+c}{r}, \quad . \ (\alpha)$$

$$\tfrac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{a+b+c}{r},$$

$$\tfrac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{a}{r},$$

$$\tfrac{1}{2}(AB + BC - AC) = \frac{b}{r},$$

$$\tfrac{1}{2}(BC + AC - AB) = \frac{c}{r};$$

daar nu het product der vier laatste waarden, zoo als genoegzaam bekend is, de tweede magt is van den inhoud des driehoeks ABC, die gelijk aan $a + b + c$ is, zoo hebben wij dadelijk de vergelijking $\dfrac{(a+b+c)\,abc}{r^4} = (a+b+c)^2$,

waaruit gevonden wordt $r = \sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$.

Deze waarden van r in de formulen (α) substituerende, vinden wij dan:

$$AB = (a+b)\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}},$$

$$AC = (a+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}},$$

$$BC = (b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}};$$

waardoor de zijden des driehoeks berekend zijn, en dus het voorstel opgelost is.

Digitized by Google

CL. Voorstel.

Door J. Bassan.

Hetzelfde als in het voorgaande voorstel wordt gevraagd, indien de loodlijnen uit het middelpunt van den omgeschreven cirkel op de zijden nedergelaten zijn.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, W. van Haarst, Jr., J. S. Sprijer, *en* J. Bassan.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Zij ABC (Fig. 106) de driehoek, en M het middelpunt van den omgeschreven cirkel, waaruit de loodlijnen MD, ME en MF op de zijden zijn nedergelaten, dan is gegeven

Inh. vierh. AEMF $= a$, *Inh. vierh.* BDMF $= b$, *Inh. vierh.* CDME $= c$;

voorts is, zoo wij ter bekorting $a + b + c = d$ stellen, ook nog bekend *Inh. drieh.* ABC $= d$.

Stellen wij: $AM = BM = CM = r$,

$MD = m$, $ME = n$, $MF = p$,

$BD = CD = x$, $AE = CE = y$, $AF = BF = z$,

dus $BC = 2x$, $AC = 2y$, $AB = 2z$,

dan is, volgens bekende formulen:

$$r = \frac{2xyz}{d}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Sin.\ BAC = \frac{x}{r},\ Sin.\ ABC = \frac{y}{r} \text{ en } Sin.\ ACB = \frac{z}{r},$$

en dus ook $Sin.\ BAC = \frac{d}{2yz}$, $Sin.\ ABC = \frac{d}{2xz}$ en $Sin.\ ACB = \frac{d}{2xy}$; (2)

terwijl uit de figuur onmiddellijk volgt

$$r^2 = x^2 + m^2 = y^2 + n^2 = z^2 + p^2 \ldots (3)$$

Beschouwen wij nu vooreerst de vierhoeken AEMF, BDMF en CDME als de sommen der driehoeken, waarin zij door MA, MB en MC als diagonalen verdeeld worden, dan hebben wij:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}ny + \tfrac{1}{2}pz &= a, \\ \tfrac{1}{2}pz + \tfrac{1}{2}mx &= b, \\ \tfrac{1}{2}mx + \tfrac{1}{2}ny &= c, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

beschouwen wij echter diezelfde vierhoeken als de sommen der driehoeken, waarin zij door de diagonalen FE, DF en ED verdeeld worden, dan vinden wij, in het oog houdende dat de hoeken FME, DMF en EMD de supplementen van de hoeken des driehoeks ABC zijn,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(yz + np)\ Sin.\ BAC &= a, \\ \tfrac{1}{2}(xz + pm)\ Sin.\ ABC &= b, \\ \tfrac{1}{2}(xy + mn)\ Sin.\ ACB &= c. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Digitized by Google

Zoo wij van de vergelijkingen (4), de som van twee met de derde verminderen, komt er terstond:

$$mx = b + c - a = d - 2a,$$
$$ny = a + c - b = d - 2b,$$
$$pz = a + b - c = d - 2c,$$

en dus $m = \frac{d-2a}{x}$, $n = \frac{d-2b}{y}$, $p = \frac{d-2c}{z}$; . (6)

brengen wij vervolgens de waarden (2) en (6) in de vergelijkingen (5) over, dan vinden wij, uit de komende vergelijkingen, terstond:

$$\left.\begin{aligned} y^2z^2 &= \frac{d\,(d-2b)\,(d-2c)}{4a-d},\\ x^2z^2 &= \frac{d\,(d-2c)\,(d-2a)}{4b-d},\\ x^2y^2 &= \frac{d\,(d-2a)\,(d-2b)}{4c-d}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Brengen wij eindelijk de waarden (1) en (6) in de vergelijkingen (3) over, zoo vinden wij, uit de alsdan ontstaande vergelijkingen:

$$x^4 = \frac{d^2\,(d-2a)^2}{4y^2z^2 - d^2},$$
$$y^4 = \frac{d^2\,(d-2b)^2}{4z^2x^2 - d^2},$$
$$z^4 = \frac{d^2\,(d-2c)^2}{4x^2y^2 - d^2};$$

en hierin de waarden (7) overbrengende, komt er:

$$x = \sqrt[4]{\frac{d\,(4a-d)\,(d-2a)^2}{4\,(d-2b)\,(d-2c) - d\,(4a-d)}},$$
$$y = \sqrt[4]{\frac{d\,(4b-d)\,(d-2b)^2}{4\,(d-2c)\,(d-2a) - d\,(4b-d)}},$$
$$z = \sqrt[4]{\frac{d\,(4c-d)\,(d-2c)^2}{4\,(d-2a)\,(d-2b) - d\,(4c-d)}},$$

waardoor nu de zijden des driehoeks, BC $= 2x$, AC $= 2y$ en AB $= 2z$ bekend zijn, en dus het voorstel opgelost is.

Omdat $d = a + b + c$ is, kunnen de noemers, die in de laatste vormen voorkomen, nog vereenvoudigd worden; hierdoor wordt dan:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{\frac{d\,(4a-d)\,(d-2a)^2}{(4b-d)\,(4c-d)}},\\ y &= \sqrt[4]{\frac{d\,(4b-d)\,(d-2b)^2}{(4c-d)\,(4a-d)}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

en

$$z = \sqrt[4]{\frac{d\,(4c-d)\,(d-2c)^2}{(4a-d)\,(4b-d)}};$$

Digitized by Google

het gedurige product der waarden (8), geeft dan even als dat der waarden (7),

$$xyz = \sqrt{\frac{d^3\,(d-2a)^2\,(d-2b)^2\,(d-2c)^2}{(4a-d)\,(4b-d)\,(4c-d)}},$$

waaruit voor den straal des omgeschreven cirkels gevonden wordt

$$r = 2\sqrt{\frac{(d-2a)^2\,(d-2b)^2\,(d-2c)^2}{d\,(4a-d)\,(4b-d)\,(4c-d)}} \quad . \quad . \quad (9)$$

Indien $a = b = c$ gegeven was, zou de driehoek gelijkzijdig zijn; en men zou dan hebben

$$x = y = z = \sqrt{(a\sqrt{3})} \text{ en } r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(3a\sqrt{3})}.$$

CLI. Vooreteel.

Door J. Bassan.

Wanneer men, uit een punt binnen een cirkel, lijnen naar den omtrek trekt, en al deze lijnen in dezelfde reden deelt, begeert men de meetkunstige plaats der deelpunten te vinden.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Bassan, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat M (Fig. 107) het middelpunt van den gegeven cirkel APB zijn, en zij C het gegevene punt, uit hetwelk men lijnen CP naar den omtrek heeft getrokken, die men allen in dezelfde reden verdeeld heeft, zoodat, voor al de verkregene deelpunten Q, standvastig $CP : CQ = 1 : m$ zij; dan is de gevraagde meetkunstige plaats der punten Q ook een cirkel (zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* 3de druk § 319), welks middelpunt N op de middellijn AB ligt, die in den gegeven cirkel door het gegeven punt kan getrokken worden. Dit middelpunt N kan gemakkelijk bepaald worden, door namelijk CA en CB in D en E zoodanig te verdeelen, dat $CA : CD = CB : CE = 1 : m$ is, en vervolgens DE middendoor te deelen; zijnde DE de middellijn van de meetkunstige plaats der punten Q.

Om dit alles analytisch te betoogen, stellen wij, na PP′ en QQ′ loodregt op AB getrokken te hebben, $AP' = x'$, $PP' = y'$, $AQ' = x$, $QQ' = y$, $AM = r$ en $AC = a$; dan is vooreerst

$$y'^2 = x'\,(2r - x'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl uit de gelijkvormigheid der driehoeken CPP′ en CQQ′ volgt

$$PP' : QQ' = CP : CQ \text{ of } y' : y = 1 : m \quad . \quad . \quad (2)$$

en $CP' : CQ' = CP : CQ$ of $x' - a : x - a = 1 : m$; (3) uit (2) en (3) vinden wij terstond

Digitized by Google

$$y' = \frac{y}{m} \text{ en } x' = \frac{x - a}{m} + a,$$

en brengen wij deze waarden in (1) over, zoo komt er, na vermenigvuldiging met m^2,

$$y^2 = (x - a + am)(2mr - x + a - am);$$

of, zoo wij $x - a + am = x''$ stellen,

$$y^2 = x''(2mr - x'').$$

De meetkunstige plaats der punten Q is dus een cirkel, mr tot straal hebbende, en welks middelpunt op de lijn AB ligt.

Voor $y = 0$, hebben wij

$$x - a + am = 0 \text{ of } 2mr - x + a - am = 0;$$

de hieruit voor x voortvloeijende waarden, zijn de afstanden AD en AE, die de snijpunten van den gevonden cirkel met de lijn AB aanwijzen, en dus is

$$AD = a - am, \quad AE = 2mr + a - am,$$

waaruit verder volgt

$$AN = mr + a - am.$$

Aanmerking. In het voorstel is opgegeven, dat het punt C binnen den cirkel ligt; indien echter dit punt buiten den cirkel of in den omtrek gelegen is, blijft de bedoelde meetkunstige plaats evenzeer een cirkel. (Vergelijk J. de Gelder, *Meetk.* t. a. p.)

CLII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - x(x - y)\sqrt{(x^2 - y^2)}}{x(x^2 + y^2) + x(x + y)\sqrt{(x^2 - y^2)}}$$

te integreren.

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivanon, J. S. Spreijer *en* W. C. Versteput.

I. Oplossing *van* J. Bassan.

Uit de opgegevene vergelijking de breuken verdrijvende, heeft men

$$x\partial y(x^2 + y^2) + x(x + y)\partial y\sqrt{(x^2 - y^2)} =$$
$$= y\partial x(x^2 + y^2) - x(x - y)\partial x\sqrt{(x^2 - y^2)},$$

of na verplaatsing en vereeniging van termen

$$x\{(x + y)\partial y + (x - y)\partial x\}\sqrt{(x^2 - y^2)} =$$
$$= (y\partial x - x\partial y)(x^2 + y^2).$$

Hiervoor kan men schrijven

$$\frac{(x + y)\partial y + (x - y)\partial x}{x^2 + y^2} = \frac{y\partial x - x\partial y}{x\sqrt{(x^2 - y^2)}},$$

Digitized by Google

of ook $\frac{x\partial y - y\partial x}{x\sqrt{(x^2-y^2)}} + \frac{x\partial x + y\partial y}{x^2+y^2} = \frac{y\partial x - x\partial y}{x^2+y^2}$;

maar nu is $x\partial y - y\partial x = x^2\partial.\frac{y}{x}$ en $y\partial x - x\partial y = y^2\partial.\frac{x}{y}$,

derhalve wordt dan onze vergelijking:

$$\frac{x^2\partial.\frac{y}{x}}{x\sqrt{(x^2-y^2)}} + \frac{x\partial x + y\partial y}{x^2+y^2} = \frac{y^2\partial.\frac{x}{y}}{x^2+y^2}.$$

of $$\frac{\partial.\frac{y}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}} + \frac{\frac{1}{2}\partial.(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\partial.\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}},$$

waarvan nu de integraal onmiddellijk blijkt te zijn

$$Boog\ Sin.\frac{y}{x} + \tfrac{1}{2}\ Nep.\ Log.(x^2+y^2) = Boog\ Tang.\frac{x}{y}$$

of $$Boog\ Sin.\frac{y}{x} + Nep.\ Log.\sqrt{(x^2+y^2)} = Boog\ Tang.\frac{x}{y}.$$

II. Oplossing van W. van Haarst, Jr.

De gegevene vergelijking, of wel de vergelijking

$$\partial y = \frac{y\,(x^2+y^2) - (x^2-xy)\sqrt{(x^2-y^2)}}{x\,(x^2+y^2) + (x^2+xy)\sqrt{(x^2-y^2)}}\,\partial x$$

is gelijkslachtig. Zij kan alzoo geïntegreerd worden, door $y = xu$ en dus $\partial y = u\partial x + x\partial u$ te stellen, als wanneer zij, na teller en noemer de breuk door x^2 gedeeld te hebben, overgaat in

$$u\partial x + x\partial u = \frac{u\,(1+u^2) - (1-u)\sqrt{(1-u^2)}}{1+u^2+(1+u)\sqrt{(1-u^2)}}\,\partial x.$$

Den eersten term in het tweede lid overbrengende, komt er

$$x\partial u = \frac{-\,(1+u^2)\sqrt{(1-u^2)}}{1+u^2+(1+u)\sqrt{(1-u^2)}}\,\partial x,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{1+u^2+(1+u)\sqrt{(1-u^2)}}{-\,(1+u^2)\sqrt{(1-u^2)}}\,\partial u,$$

of wel $$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^2)}} - \frac{\partial u}{1+u^2} - \frac{u\partial u}{1+u^2};$$

als nu term voor term integrerende, komt er

$$Nep.Log.x = C - Boog\,Sin.u - Boog\,Tang.u - Nep.Log.\sqrt{(1+u^2)},$$

en hierin eindelijk weder $u = \frac{y}{x}$ substituerende, vindt men

Digitized by Google

$$Boog\ Sin.\frac{y}{x} + Boog\ Tang.\frac{y}{x} + Nep.\,Log.\sqrt{(x^2+y^2)} = C.$$

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Neemt men in de laatste uitkomst $C = \frac{1}{2}\pi$, en houdt men in het oog dat

$$\frac{1}{2}\pi - Boog\ Tang.\frac{y}{x} = Boog\ Cot.\frac{y}{x} = Boog\ Tang.\frac{x}{y}$$

is, dan gaat zij in de uitkomst der vorige oplossing over. De beide uitkomsten verschillen dus alleen door een bijgevoegden standvastigen term.

CLIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Welke is de integraal van

$$\partial y = \frac{(2x-1)\,\partial x}{8\sqrt{(x^2-x)} + 10\sqrt{(-x^4+2x^3-x)}}.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Bassan, J. S. Spreijer, W. L. Ivanon *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Omdat $-x^4+2x^3-x = (x^2-x)(1+x-x^2)$ is, kan, uit den noemer van den opgegevenen vorm, de factor $2\sqrt{(x^2-x)}$ buiten gebragt worden, terwijl voor den teller dadelijk kan geschreven worden $\partial.(x^2-x)$; hierdoor heeft men dan

$$\partial y = \frac{\partial.(x^2-x)}{2\{4+5\sqrt{(1+x-x^2)}\}\sqrt{(x^2-x)}};$$

Men stelle nu $x^2-x = Sin.^2\phi$,

dan wordt $1+x-x^2 = 1-Sin.^2\phi = Cos.^2\phi$

en $\partial.(x^2-x) = 2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi\partial\phi$,

zoodat de substitutie dezer waarden geeft

$$\partial y = \frac{Cos.\,\phi\partial\phi}{4+5\,Cos.\,\phi};$$

hiervoor kan men schrijven

$$\partial y = \tfrac{1}{5}\frac{(4+5\,Cos.\phi)\,\partial\phi - 4\partial\phi}{4+5\,Cos.\,\phi} = \tfrac{1}{5}\partial\phi - \tfrac{4}{5}\cdot\frac{\partial\phi}{4+5\,Cos.\,\phi},$$

en dus is vooreerst $y = \frac{1}{5}\phi - \frac{4}{5}\int\frac{\partial\phi}{4+5\,Cos.\,\phi}$.

Maar nu is (zie I. R. Schmidt, *Integr. Rek.* § 254), indien $a < b$ is,

$$\int\frac{\partial\phi}{a+b\,Cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,Nep.\,Log.\frac{a\,Cos.\phi+b+Sin.\phi.\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b\,Cos.\,\phi};$$

door hierin $a = 4$ en $b = 5$ te stellen, wordt dan

Digitized by Google

$$\int \frac{\partial\phi}{4+5\,Cos.\,\phi} = \tfrac{1}{9}\,Nep.\,Log.\,\frac{5+3\,Sin.\,\phi+4\,Cos.\,\phi}{4+5\,Cos.\,\phi}$$

en bijgevolg $y = \frac{1}{9}\phi - \frac{4}{117}\,Nep.\,Log.\,\frac{5+3\,Sin.\,\phi+4\,Cos.\,\phi}{4+5\,Cos.\,\phi}$;

hierin is nu $Sin.\,\phi = \sqrt{(x^2-x)}$, $Cos.\,\phi = \sqrt{(1+x-x^2)}$ en $\phi = Boog\,Sin.\,\sqrt{(x^2-x)}$, en derhalve heeft men dan ten laatste

$$y = \tfrac{1}{9}\,Boog\,Sin.\sqrt{(x^2-x)} - \tfrac{4}{117}\,Nep.Log.\,\frac{5+3\sqrt{(x^2-x)}+4\sqrt{(1+x-x^2)}}{4+5\sqrt{(1+x-x^2)}},$$

waarbij nu nog eene willekeurige standvastige grootheid kan gevoegd worden.

CLIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Men vraagt de hoeveelheid water te bepalen, welke in een gegeven tijd zal uitvloeijen, door eene driehoekige opening in den verticalen wand van eenig vat, waarin het water bestendig ter zelfder hoogte boven de opening wordt gehouden; in de onderstelling, dat de basis dezer opening horizontaal en haar top naar boven gekeerd is.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz. *en* J. S. Spruijer.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Laat AB (Fig. 108) de standvastige waterspiegel, en EFG de driehoekige opening voorstellen, dan kunnen wij als bekenden aannemen, de hoogten van den waterspiegel boven den top en boven de basis der opening, OE $= h$ en OH $= h'$, gelijk mede de basis zelve FG $= a$. Zij nu MNmn eene differentiaal der opening; begrepen tusschen de lijnen MN en mn, op de afstanden OP $= x$ en Op $= x + \partial x$ beneden den waterspiegel evenwijdig met denzelven getrokken, en stellen wij MN $= y$, dan is MNmn $= y\partial x$ de inhoud van deze differentiaal der opening, terwijl de theoretische snelheid, waarmede het water door die differentiaal vloeit, door $v = \sqrt{2gx}$ wordt uitgedrukt. Indien dus ∂Q de theoretische watermassa voorstelt, die in een gegeven tijd van t seconden door de differentiaal MNmn vloeit, hebben wij (zie J. P. Delprat, *Hydrodynamica*, § 26)

$$\partial Q = Inh.\ MNmn \times v \times t = t\,y\partial x\,\sqrt{2gx}$$

en de theoretische hoeveelheid water, in het vraagstuk bedoeld, wordt dus uitgedrukt door de formule

$$Q = t\,\sqrt{2g}\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}\,y\partial x \ldots\ldots\ldots (1)$$

Digitized by Google

Nu volgt uit de figuur, de evenredigheid

$$EH : FG = EP : MN$$

of $$h' - h : a = x - h : y;$$

dus is $$y = \frac{a}{h' - h}(x - h),$$

en deze waarde van y, in (1) overgebragt, geeft

$$Q = \frac{at\sqrt{2g}}{h' - h}\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}(x - h)\,\partial x. \ldots . \quad (2)$$

Door integratie verkrijgen wij

$\int x^{\frac{1}{2}}(x - h)\,\partial x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\partial x - h\int x^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}hx^{\frac{3}{2}} + C,$
en, door dan deze integraal van $x = h$ tot $x = h'$ te nemen,

$$\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}(x - h)\,\partial x = \tfrac{2}{5}(h'^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}) - \tfrac{2}{3}h(h'^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \tfrac{2}{5}h'^2\sqrt{h'} - \tfrac{2}{3}hh'\sqrt{h'} + \tfrac{4}{15}h^2\sqrt{h} = \tfrac{2}{15}(3h'^2\sqrt{h'} - 5hh'\sqrt{h'} + 2h^2\sqrt{h});$$

deze waarde in (2) overbrengende, hebben wij dan eindelijk

$$Q = \frac{2at\sqrt{2g}}{15} \cdot \frac{3h'^2\sqrt{h'} - 5hh'\sqrt{h'} + 2h^2\sqrt{h}}{h' - h} \cdot \quad (3)$$

De alsnu gevondene theoretische hoeveelheid Q, zal men met eenen uit proeven afgeleiden coëfficiënt behooren te vermenigvuldigen, om de wezenlijke hoeveelheid water te verkrijgen, die in den gegeven tijd t uitvloeit.

Aanmerking. Men is wel gewoon, de snelheid van uitvloeijing in het zwaartepunt Z der opening als eene middelbare snelheid voor de geheele opening in rekening te brengen. Dewijl dit zwaartepunt op den afstand $OE + \frac{2}{3}EH = h + \frac{2}{3}(h' - h) = \frac{1}{3}(h + 2h')$ beneden den waterspiegel ligt, wordt de genoemde middelbare snelheid door $\sqrt{\frac{2}{3}g}\,(h + 2h')$ uitgedrukt, terwijl de inhoud der opening is $\frac{1}{2}\,FG \times EH = \frac{1}{2}\,a\,(h' - h)$. Eene zoodanige berekening zou dan, voor de theoretische hoeveelheid water in t seconden uitvloeijende, geven

$$Q' = \tfrac{1}{2}\,a\,(h' - h) \times \sqrt{\tfrac{2}{3}g}\,(h + 2h') \times t$$

of $$Q' = \tfrac{1}{3}\,a\,(h' - h)\,t\sqrt{6g}\,(h + 2h'). \ldots . \quad (4)$$

Nemen wij nu tot een voorbeeld, in ellen $a = 1$, $h = 1$ en $h' = 4$; zij $t = 1$ en brengen wij voor g de waarde $g = 9{,}812$ in rekening, dan vinden wij door de formulen (3) en (4)

$$Q = 11{,}4195 \text{ cub. el en } Q' = 11{,}5087 \text{ cub. el},$$

waarvan het verschil is $Q' - Q = 0{,}0892$ cub. el.

De formule (4) geeft dus 0,0892 cub. el per seconde te veel; dit schijnbaar geringe verschil beloopt echter, in een uur, ruim 320 cub. el, of meer dan 10,000 cub. Rhijnl. voet.

Digitized by Google

CLV. Voorstel.

Door S. Dijk, Cornsz.

Men vraagt hetzelfde als in het voorgaande voorstel, in de onderstelling dat de top der driehoekige opening naar beneden gekeerd is.

Opgelost *door* S. Dijk, Cornsz. *en* J. S. Spruijt.

Oplossing *van* S. Dijk, Cornsz.

Nemen wij hier weder de hoogten OH $= h$ en OE $= h'$ (Fig. 109) van de bazis en van den top der driehoekige opening EFG beneden den standvastigen waterspiegel AB, gelijk mede die bazis FG $= a$, als bekenden aan. Zij wederom MNmn eene differentiaal der opening, en stellen wij nogmaals OP $= x$, Op $= x + \partial x$ en MN $= y$, dan hebben wij, even als in de voorgaande oplossing,

$$Q = t\sqrt{2g}\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}\, y\partial x \ldots\ldots\ldots (1)$$

Maar nu volgt uit de evenredigheid

$$\text{EH} : \text{FG} = \text{EP} : \text{MN},$$

dat $$h' - h : a = h' - x : y$$

of $$y = \frac{a}{h' - h}(h' - x)$$

is; en hierdoor gaat dan (1) over in

$$Q = \frac{at\sqrt{2g}}{h' - h}\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}(h' - x)\,\partial x. \ldots\ldots (2)$$

Door integratie verkrijgen wij derhalve

$$\int x^{\frac{1}{2}}(h' - x)\,\partial x = h'\int x^{\frac{1}{2}}\partial x - \int x^{\frac{3}{2}}\partial x = \tfrac{2}{3}h'x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C,$$

of van $x = h$ tot $x = h'$

$$\int_h^{h'} x^{\frac{1}{2}}(h' - x)\,\partial x = \tfrac{2}{3}h'(h'^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) - \tfrac{2}{5}(h'^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}) =$$

$$= \tfrac{4}{15}h'^2\sqrt{h'} - \tfrac{2}{3}hh'\sqrt{h} + \tfrac{2}{5}h^2\sqrt{h} = \tfrac{2}{15}(2h'^2\sqrt{h'} - 5hh'\sqrt{h} + 3h^2\sqrt{h}),$$

waardoor wij volgens (2) hebben

$$Q = \frac{2at\sqrt{2g}}{15}\cdot\frac{3h^2\sqrt{h} - 5hh'\sqrt{h} + 2h'^2\sqrt{h'}}{h' - h}. \ldots (3)$$

Aanmerkingen. 1°. Brengt men hier de snelheid van uitvloeijing, in het zwaartepunt Z der opening, als eene middelbare snelheid voor de geheele opening in rekening, dan heeft men, omdat nu de diepte van dit zwaartepunt beneden den waterspiegel door OH $+ \frac{1}{3}$ EH $= h + \frac{1}{3}(h' - h) = \frac{1}{3}(h' + 2h)$ uitgedrukt wordt,

$$Q' = \tfrac{1}{3}a(h' - h)\,t\sqrt{6g}\,(h' + 2h). \ldots (4)$$

Digitized by Google

Nemen wij weder $t = 1$, $g = 9{,}812$ en stellen wij, in ellen $a = 1$, $h = 1$ en $h' = 4$, dan vinden wij

$$Q = 9{,}2538 \text{ cub. el}, \qquad Q' = 9{,}3972 \text{ cub. el}$$

en

$$Q' - Q' = 0{,}1434 \text{ cub. el.}$$

De formule (4) geeft dus ook hier te veel; en dit verschil bedraagt, voor de gestelde getallenwaarden, ruim 515 cub. el of 16,500 cub. Rhijnl. voet in het uur.

2°. Zoo men de waarden van Q, in dit en in het voorgaande voorstel gevonden, van elkander aftrekt, komt er voor het verschil:

$$D = \frac{2at\sqrt{2g}}{15} \cdot \frac{h'^2\sqrt{h'} - h^2\sqrt{h} - 5hh'(\sqrt{h'} - \sqrt{h})}{h' - h} =$$

$$= \frac{2at\sqrt{2g}}{15}\left\{h'\sqrt{h'} + h\sqrt{h} - \frac{4hh'}{\sqrt{h'} + \sqrt{h}}\right\}.$$

Heeft men dus in den verticalen wand van eenig vat, waarin de waterspiegel bestendig op dezelfde hoogte wordt gehouden, twee driehoekige openingen van gelijke afmetingen en die zich met hunne toppen en horizontaal loopende bazis tusschen dezelfde horizontale lijnen bevinden, maar zoo, dat de top van de eene naar boven en die van de andere naar beneden gekeerd is, dan vindt men door de laatste formule hoeveel meer water er in een gegeven tijd door de eerste dan door de tweede opening zal uitstroomen.

Voor $t = 1$, $g = 9{,}812$, $h = 1$, $h' = 4$ en $a = 1$, komt er, in overeenstemming met de voor Q berekende waarden, $D = 2{,}1657$ cub. el.

CLVI. Voorstel.

Door L. Cohen Stuart.

Men vraagt, zonder behulp van differentiaalrekening, de vergelijking te vinden der kegelvlakte, die het punt (a_1, a_2, a_3) *tot middelpunt heeft, en de ellipsoïde* $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = 1$ *omhult.*

Opgelost *door* L. Cohen Stuart, J. S. Speijer, G. F. W. Baehr *en* W. van Haerst, Jr.

Oplossing *van* L. Cohen Stuart.

Nemen wij het punt (a_1, a_2, a_3) als oorsprong aan van een nieuw stelsel coördinaten-assen, die evenwijdig met de oude assen loopen; stellen wij te dien einde $x = x' + a_1$, $y = y' + a_2$ en $z = z' + a_3$, zoo gaat de gegevene vergelijking der ellipsoïde over in

$$A_1(x' + a_1)^2 + A_2(y' + a_2)^2 + A_3(z' + a_3)^2 = 1;$$

Digitized by Google

en stellen wij vervolgens

$x' = u\,Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi$, $y' = u\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\psi$ en $z' = u\,Sin.\,\psi$,

zoo verkrijgen wij, voor de polaire vergelijking van dit oppervlak,

$$A_1(u\,Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi + a_1)^2 + A_2(u\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\psi + a_2)^2 + A_3(u\,Sin.\,\psi + a_3)^2 = 1,$$

zijnde hierbij dan het punt (a_1, a_2, a_3) als pool aangenomen.

Aan deze polaire vergelijking kan men onmiddellijk den vorm eener vierkantsvergelijking in u geven, en zij wordt dan

$$\{A_1\,Cos.^2\phi\,Cos.^2\psi + A_2\,Sin.^2\phi\,Cos.^2\psi + A_3\,Sin.^2\psi\}u^2 + 2\{A_1a_1\,Cos.\phi\,Cos.\psi + A_2a_2\,Sin.\phi\,Cos.\psi + A_3a_3\,Sin.\psi\}u + \{A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1\} = 0.$$

De voerstralen der beide punten, waar de ellipsoïde gesneden wordt door eene regte lijn, uit de pool getrokken en door de hoeken ϕ en ψ bepaald, zijn de wortels dezer vierkantsvergelijking; zal dus de genoemde regte lijn de ellipsoïde raken, dan moeten deze wortels aan elkander gelijk zijn, en hiertoe wordt volgens de bekende eigenschap der vierkantsvergelijkingen gevorderd, dat men hebbe

$$\{A_1a_1\,Cos.\phi\,Cos.\psi + A_2a_2\,Sin.\phi\,Cos.\psi + A_3a_3\,Sin.\psi\}^2 = \{A_1\,Cos.^2\phi\,Cos.^2\psi + A_2\,Sin.^2\phi\,Cos.^2\psi + A_3\,Sin.^2\psi\} \times \{A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1\};$$

deze vergelijking is dus niet anders dan de polaire vergelijking der omhullende kegelvlakte.

Vermenigvuldigen wij de beide leden met u^2, en vervangen wij vervolgens $u\,Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi$, $u\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\psi$ en $u\,Sin.\,\psi$ respectievelijk door $x' = x - a_1$, $y' = y - a_2$ en $z' = z - a_3$, dan verkrijgen wij voor de gevraagde vergelijking, ten opzigte van de oude assen,

$$\{A_1a_1(x - a_1) + A_2a_2(y - a_2) + A_3a_3(z - a_3)\}^2 = \{A_1(x - a_1)^2 + A_2(y - a_2)^2 + A_3(z - a_3)^2\} \times \{A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1\},$$

of na eenige herleidingen

$$(A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z - 1)^2 = (A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 - 1)(A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1).$$

Aanmerking *uit de oplossing van* J. S. Spelier. De gevondene vergelijking van het omhullende kegelvlak, kan oog nog door eenvoudige herleiding gebragt worden tot den vorm

$$A_1(x - a_1)^2 + A_2(y - a_2)^2 + A_3(z - a_3)^2 = A_1A_2(a_2x - a_1y)^2 + A_2A_3(a_3y - a_2z)^2 + A_3A_1(a_1z - a_3x)^2.$$

Digitized by Google

CLVII. Voorstel.

Door L. Cohen Stuart.

Eene ellipsoïde en een buiten haar gelegen lichtend punt gegeven zijnde, vraagt men: 1°. naar de afscheiding van het verlichte en onverlichte gedeelte op het oppervlak van dit ligchaam; 2°. naar de intensiteit der verlichting in ieder punt van dit oppervlak, en 3°. naar de hoeveelheid licht door hetzelve opgevangen.

Opgelost *door* L. Cohen Stuart.

Oplossing *van* L. Cohen Stuart.

I. Nemen wij een regthoekige coördinaten-stelsel aan, zoodanig dat de vergelijking der ellipsoïde zij

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = 1; \quad \ldots\ldots (1)$$

en laten a_1, a_2, a_3 de coördinaten van het gegeven punt zijn, dan is (volgens het voorgaande voorstel) de vergelijking van het kegelvlak, dat dit punt tot middelpunt heeft en de ellipsoïde omhult,

$$(A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z - 1)^2 =$$
$$=(A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 - 1)(A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1) \ldots (2)$$

Uit de verbinding van de vergelijkingen (1) en (2) volgt onmiddellijk, dat de aanrakingskromme der beide oppervlakken, of wat hetzelfde is, de afscheiding van het verlichte en onverlichte gedeelte, de doorsnede is der ellipsoïde, met een plat vlak waarvan de vergelijking is

$$A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z = 1. \quad \ldots\ldots (3)$$

II. Zij u de lengte der lijn, die eenig punt (x, y, z) van het verlichte deel der ellipsoïde met het gegeven punt vereenigt; en zij μ de hoek dien deze lijn maakt met de normaal van het punt (x, y, z), zoo is de licht-intensiteit I, in het genoemde punt,

$$I = \frac{\rho\ Cos.\ \mu}{u^2},$$

waarin ρ een standvastige coëfficiënt is.

Stellen wij, voor de lijn die de punten (x, y, z) en (a_1, a_2, a_3) vereenigt, dat zij met de assen de hoeken α_1, α_2 en α_3 maakt; en voor de normaal, dat hare hoeken met de assen β_1, β_2 en β_3 zijn, dan is:

$$Cos.\ \alpha_1 = \frac{a_1 - x}{u}, \quad Cos.\ \beta_1 = \frac{A_1x}{\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}},$$

$$Cos.\ \alpha_2 = \frac{a_2 - y}{u}, \quad Cos.\ \beta_2 = \frac{A_2y}{\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}},$$

$$Cos.\ \alpha_3 = \frac{a_3 - z}{u}, \quad Cos.\ \beta_3 = \frac{A_3z}{\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}},$$

Digitized by Google

en $Cos.\,\mu = Cos.\,\alpha_1\,Cos.\,\beta_1 + Cos.\,\alpha_2\,Cos.\,\beta_2 + Cos.\,\alpha_3\,Cos.\,\beta_3$; door substitutie verkrijgen wij alzoo

$$Cos.\,\mu = \frac{A_1(a_1-x)x + A_2(a_2-y)y + A_3(a_3-z)z}{u\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}}$$

of door middel van (1)

$$Cos.\,\mu = \frac{A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z - 1}{u\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}};$$

en hierdoor wordt

$$I = \rho\,\frac{A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z - 1}{u^2\sqrt{(A_1^2x^2 + A_2^2y^2 + A_3^2z^2)}},$$

of, omdat $u = \sqrt{\{(a_1-x)^2 + (a_2-y)^2 + (a_3-z)^2\}}$ is,

$$I = \rho\,\frac{A_1a_1x + A_2a_2y + A_3a_3z - 1}{\sqrt{\{(a_1-x)^2+(a_2-y)^2+(a_3-z)^2\}^3}\times\sqrt{(A_1^2x^2+A_2^2y^2+A_3^2z^2)}} \quad (4)$$

Merken wij op:

1°. dat voor de punten, wier coördinaten aan de vergelijking (3) voldoen, de vergelijking (4) naar behooren $I = 0$ geeft;

2°. dat voor den voet der normaal, uit het lichtende punt op het oppervlak der ellipsoïde nedergelaten, $Cos.\,\mu$ een maximum, u een minimum, en dus $I = \frac{\rho\,Cos.\,\mu}{u^2}$ een maximum is;

3°. dat zoo men in de vergelijking (4) aan I zoowel als aan ρ eene standvastige waarde toekent, deze vergelijking, met die der ellipsoïde gecombineerd, de vergelijkingen zal leeren kennen van de projectiën der kromme lijnen van gelijke verlichting, of, ingeval van het punt (a_1, a_2, a_3) warmtestralen uitgaan, der isothermische lijnen.

III. De hoeveelheid licht, vallende op een zoodanig deel van een willekeurig oppervlak, als door den de ellipsoïde omhullenden kegel wordt ingesloten, is blijkbaar gelijk aan die, welke door de ellipsoïde zelve wordt opgevangen. Snijdt men derhalve dezen kegel door een plat vlak, loodregt op deszelfs as en op eene lengteeenheid afstands van den top verwijderd, zoo komt het er slechts op aan eene uitdrukking te vinden voor de hoeveelheid licht, opgevangen door de ellips, die de doorsnede is van het genoemde platte vlak met den kegel.

Ter bepaling van de assen dezer ellipse, kan men den kegel beschouwen als asymptotisch aan eene hyperboloïde, en verder gebruik maken van de bekende betrekking tusschen de hoofdassen en de coëfficiënten der middelpuntsvergelijking van dit oppervlak.

Digitized by Google

Nemen wij namelijk het gegeven punt (a_1, a_2, a_3) als oorsprong van een tweede coördinaten-stelsel aan, welke assen evenwijdig met die van het eerste stelsel zijn, zoo gaat, na behoorlijke herleiding, de vergelijking (2) der omhullende kegelvlakte over in:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(A_2a_2^2 + A_3a_3^2 - 1)x^2 - 2A_2A_3a_2a_3yz \\ + A_2(A_1a_1^2 + A_3a_3^2 - 1)y^2 - 2A_1A_3a_1a_3xz \\ + A_3(A_1a_1^2 + A_2a_2^2 - 1)z^2 - 2A_1A_2a_1a_2xy \end{array}\right\} = 0,$$

waarvoor wij kortheidshalve stellen

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0; \quad . \quad (5)$$

de hyperboloïde nu, waarvan (5) het asymptotisch kegelvlak voorstelt, heeft tot vergelijking

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H,$$

waarin H eene positieve waarde heeft; en verder heeft de vergelijking

$$\left.\begin{array}{l} s^3 - s^2(A + A' + A'') \\ - s(B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'') \\ - (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') \end{array}\right\} = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

drie bestaanbare wortels

$$s' = \frac{H}{e^2}, \; s'' = \frac{H}{f^2}, \; s''' = \frac{H}{g^2},$$

waarin e^2, f^2 en g^2 de vierkanten van de halve assen der hyperboloïde verbeelden. (Zie Lenoy, *Analyse appl. à la Géom. des trois dimensions* 2e ed. § 237).

Wat de teekens van de wortels der vergelijking (6) betreft, kunnen wij twee gevallen onderscheiden; twee van die wortels s' en s'' kunnen positief en de derde s''' negatief zijn, of wel kunnen er twee s' en s'' negatief zijn, terwijl de derde s''' positief is; maar in beide gevallen zijn

$$\frac{e}{g} = \sqrt{-\frac{s'''}{s'}} \text{ en } \frac{f}{g} = \sqrt{-\frac{s'''}{s''}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

de goniometrische tangenten van de helften der hoeken begrepen tusschen de twee beschrijvende lijnen, volgens welke het asymptotische kegelvlak gesneden wordt door elk der beide platte vlakken, die door eene bestaanbare en eene onbestaanbare as van de hyperboloïde kunnen gebragt worden. Voorts zijn de getalwaarden dezer tangenten juist gelijk aan die van de halve assen der te bepalen ellipse; deze halve assen $\frac{e}{g}$ en $\frac{f}{g}$ worden dus volgens de formulen (7) uit de wortels der vergelijking (6) gevonden, en kunnen alzoo verder als gegeven worden aangemerkt.

Gaan wij thans over tot bepaling van de hoevecelheid licht, door

Digitized by Google

deze ellips opgevangen; daartoe de groote as gelijk $2a$, en de kleine gelijk $2b$ stellende.

Zij ACB (Fig. 110) een vierde gedeelte van den omtrek, O het middelpunt, OA $= a$ de halve groote en OB $= b$ de halve kleine as; zij voorts Q het lichtend punt, dan is OQ $= 1$, terwijl deze lijn OQ loodregt op het vlak der ellips staat. In een willekeurig punt P, waarvan x en y de coördinaten zijn ten opzigte van OA en OB als assen, is nu de intensiteit der verlichting $\rho \frac{Sin.\,OPQ}{PQ^2}$, waarvoor dadelijk geschreven kan worden $\frac{\rho}{\sqrt{(1+y^2+x^2)^3}}$, omdat $Sin.OPQ = \frac{OQ}{QP} = \frac{1}{PQ}$ en $PQ = \sqrt{(OQ^2+OP^2)} = \sqrt{(1+y^2+x^2)}$ is. Voor de hoeveelheid licht, die door de differentiaal $PP' = \partial x \partial y$ wordt opgevangen, en die wij door $\partial^2 X$ zullen voorstellen, heeft men dus $\partial^2 X = \frac{\rho \partial x \partial y}{\sqrt{(1+y^2+x^2)^3}}$

en bijgevolg, zoo men kortheidshalve $a\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} = v$ stelt, voor de hoeveelheid licht door de geheele ellips opgevangen,

$$X = 4\rho \int_0^b \partial y \int_0^v \frac{\partial x}{\sqrt{(1+y^2+x^2)^3}}.$$

Door integratie vindt men nu vooreerst

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1+y^2+x^2)^3}} = \frac{x}{(1+y^2)\sqrt{(1+y^2+x^2)}} + Const.,$$

dus $\int_0^v \frac{\partial x}{\sqrt{(1+y^2+x^2)^3}} = \frac{v}{(1+y^2)\sqrt{(1+y^2+v^2)}} =$

$$= \frac{a\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}}{(1+y^2)\sqrt{\left(1+a^2-\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2\right)}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}}{(1+y^2)\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\right)}},$$

en hierdoor wordt dan

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^b \frac{\partial y \sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}}{(1+y^2)\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\right)}}.$$

Digitized by Google

Stellen wij vervolgens $y = b\ Sin.\ \phi$ en $\frac{a^2 - b^2}{1 + a^2} = c^2$,

zoo komt er

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{a}{b\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{b^2\ Cos.^2\phi\, d\phi}{(1 + b^2\ Sin.^2\phi)\sqrt{(1 - c^2\ Sin.^2\phi)}},$$

en voor den teller kunnen wij dan schrijven

$b^2 Cos.^2\phi d\phi = b^2(1 - Sin.^2\phi)d\phi = -(1 + b^2\ Sin.^2\phi)d\phi + (1 + b^2)d\phi$;

hierdoor vinden wij alzoo

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2\ Sin.^2\phi)}} +$$

$$+ \frac{a(1+b^2)}{b\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{(1 + b^2\ Sin.\phi)\sqrt{(1 - c^2\ Sin.\phi)}}$$

waarin $c < 1$ is; of de notatie volgende, in de theorie der elliptische functiën aangenomen,

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b\sqrt{(1+a^2)}} F'(c) + \frac{a(1+b^2)}{b\sqrt{(1+a^2)}} \Pi'(b^2, c).$$

Stellen wij nu nog $a = Tang.\ \varepsilon$ en $b = Cot.\ \theta$, dan wordt

$$\frac{X}{4\rho} = -\ Sin.\ \varepsilon\ Tang.\ \theta\ F'(c) + \frac{Sin.\ \varepsilon}{Sin.\ \theta\ Cos.\ \theta} \Pi'(Cot.^2\theta, c);$$

en schrijven wij deze uitdrukking in den vorm

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{Sin.\ \varepsilon}{\Delta(c', \theta)} \left\{ -Tang.\ \theta\ \Delta(c', \theta) F'(c) + \frac{\Delta(c', \theta)}{Sin.\ \theta\ Cos.\ \theta} \Pi'(Cot.^2\theta, c) \right\},$$

dan vinden wij, met behulp der formule (zie VERHULST, *Traité Elem. des Fonctions Elliptiques*, § 56)

$$\frac{\Delta(c', \theta)}{Sin.\ \theta\ Cos.\ \theta} \Pi'(Cot.^2\theta, c) = \tfrac{1}{2}\pi + Tang.\ \theta . \Delta(c', \theta) F'(c)$$

$$+ F'(c) F(c', \theta) - E'(c) F(c', \theta) - F'(c) E(c', \theta),$$

waarin $c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1 + b^2}{1 + a^2} = \frac{Cos.^2\varepsilon}{Sin.^2\theta}$ en $\Delta(c', \theta) = Sin.\ \varepsilon$ is, voor de hoeveelheid licht door de ellipsoïde opgevangen,

$$X = 4\rho \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + F'(c) F(c', \theta) - E'(c) F(c', \theta) - F'(c) E(c', \theta) \right\}.$$

Ten slotte merken wij nog op, dat het voorgaande ons onmiddellijk leidt tot de quadratuur der spherische ellips.

Beschrijft men namelijk, uit het middelpunt eener kegelvlakte van den tweeden graad, bepaald door de tangenten a en b, met eenen straal gelijk aan de eenheid, eenen bol, zoo wordt door het bolvormig oppervlak ω, binnen een der bladen van den kegel begrepen, eene hoeveelheid licht opgevangen uitgedrukt door $\omega\rho = X$.

Digitized by Google

Derhalve is $\omega = \frac{X}{\rho}$,

of voor het geval dat ρ in plaats van de eenheid, r de straal des bols is $\omega' = r^2 \frac{X}{\rho}$;

en door substitutie der voor X gevondene waarde is dan

$\omega' = 4r^2 \left\{ \frac{1}{2}\pi + F'(c) F(c', \theta) - E'(c) F(c', \theta) - F'(c) E(c', \theta) \right\}$.

Gaat de ellipsoïde over in een bol, dan is $a = b$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi - \theta$, $c = 0, c' = 1, F'(c) = \frac{1}{2}\pi, E'(c) = \frac{1}{2}\pi, F(c', \theta) = Nep.Log.\,Tang.\frac{1}{2}\theta$, $E(c', \theta) = Sin.\,\theta$, en dus naar behooren

$$\omega' = 2r^2\pi (1 - Sin.\,\theta) = 2r^2\pi (1 - Cos.\,\varepsilon).$$

Deze uitkomst stemt volkomen overeen met die, welke door CATALAN uit geheel andere beschouwingen is afgeleid. (Zie LIOUVILLE, *Journal des Mathem.* Tom. VI, p. 340 et 419).

CLVIII. VOORSTEL.

Door F. A. T. DELPRAT.

Eene gegevene lijn is, met haar midden in den top eens regten cirkelvormigen kegels, evenwijdig aan het grondvlak geplaatst. Langs deze lijn en langs den omtrek van het grondvlak, beweegt zich eene beschrijvende lijn zoodanig, dat hare projectie, op het vlak door de as des kegels en de gegevene lijn bepaald, deze laatste en de daarmede evenwijdige middellijn des grondvlaks met eenparige snelheid, en in gelijken tijd geheel, doorloopt. Men vraagt den inhoud en het zwaartepunt te vinden van het ligchaam, begrensd door het aldus ontstaande gebogen oppervlak, het cirkelvlak, en de gegevene regte lijn.

OPGELOST *door* F. A. T. DELPRAT *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* F. A. T. DELPRAT.

Zij OABCD (Fig. 111) een vierde gedeelte van het bedoelde ligchaam, OD de helft der gegevene lijn, O de top en OA de as des kegels zijnde, terwijl ABGC een kwadrant van het grondvlak verbeeldt, waarin de straal AC evenwijdig met OD loopt, dan is het uit de opgegevene wet van beweging gemakkelijk in te zien, dat de projecterende vlakken GHQ der beschrijvende lijnen GQ allen door de lijn MN zullen gaan, die in het vlak OAB, uit het snijpunt M der verlengde lijnen OA en CD, loodregt op het vlak ODM getrokken is.

Om de vergelijking van het gebogen vlak DBCO te vinden, stellen wij

$$OA = a,\ AB = AC = r \text{ en } OD = l;$$

Digitized by Google

voorts nemen wij den oorsprong der coördinaten in O, en OM, OD en OZ als onderling regthoekige assen aan, alzoo de coördinaten van eenig punt P des gebogen vlaks stellende

$$\text{LI} = x, \text{LE} = y \text{ en PL} = z.$$

Nu is vooreerst

$$\text{OM} : \text{AM} = \text{OD} : \text{AC}$$

of

$$\text{OM} : \text{OM} - a = l : r,$$

waaruit de waarde van OM, die wij gemakshalve gelijk b zullen stellen, dadelijk gevonden wordt, zoodat wij hebben

$$\text{OM} = b = \frac{al}{l - r}.$$

Voorts hebben wij

$$\text{EM} : \text{AM} = \text{EL} : \text{AH}$$

of

$$b - x : b - a = y : \text{AH},$$

waaruit volgt

$$\text{AH} = \frac{b - a}{b - x} y$$

en

$$\text{GH} = \sqrt{\left\{r^2 - \frac{(b-a)^2}{(b-x)^2} y^2\right\}};$$

maar ook is

$$\text{GH} : \text{PL} = \text{HQ} : \text{LQ} = \text{HK} : \text{LI}$$

of

$$\text{GH} : z = a : x,$$

en hieruit volgt dan, door substitutie der voorgaande waarde van GH,

$$z = \frac{x}{a(b-x)} \sqrt{\left\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\right\}},$$

hetgeen nu de vergelijking van het gebogen vlak is.

Substitueren wij de gevondene waarde van z, in de bekende formule

$$\text{I} = \int (\partial x \int z \partial y),$$

dan zullen wij, om voor I den inhoud van het vierde gedeelte OABCD des bedoelden ligchaams te vinden, eerst $\int z \partial y$ moeten nemen van $y = 0$ tot $y = \frac{b-x}{b-a} r$, welke laatste waarde van y verkregen wordt door in de vergelijking van het gebogen vlak $z = 0$ te stellen; terwijl dan verder $\int (\partial x \int z \partial y)$ van $x = 0$ tot $x = a$ moet genomen worden. Kortheidshalve $\frac{b-x}{b-a} r = v$ stellende, hebben wij derhalve voor dien inhoud

$$\text{I} = \frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \frac{x \partial x}{b-x} \int_0^v \partial y \sqrt{\left\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\right\}} \right\};$$

nu is, volgens eene genoegzaam bekende formule,

Digitized by Google

$$\int \partial y \sqrt{\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\}} =$$

$$= \tfrac{1}{2} y \sqrt{\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\}} + \tfrac{1}{2} \frac{(b-x)^2 r^2}{b-a} \text{Boog.Sin.} \frac{(b-a)y}{(b-x)r},$$

en door dan deze integraal van $y = 0$ tot $y = v = \frac{b-x}{b-a} r$ te nemen, komt er

$$\int_0^v \partial y \sqrt{\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\}} = \frac{\pi (b-x)^2 r^2}{4 (b-a)};$$

hierdoor wordt $I = \frac{\pi r^2}{4a (b-a)} \int_0^a (b-x) x \partial x$;

maar nu is $\int (b-x) x \partial x = \frac{1}{2} bx^2 - \frac{1}{3} x^3$,

dus $\int_0^a (b-x) x \partial x = \frac{1}{6} a^2 (3b - 2a)$,

en alzoo $I = \frac{\pi r^2 a (3b - 2a)}{24 (b-a)}$;

hierin eindelijk $b = \frac{al}{l-r}$ overbrengende, verkrijgen wij na herleiding

$$I = \tfrac{1}{24} \pi r a (l + 2r)$$

of $$4I = \tfrac{1}{6} \pi r a (l + 2r),$$

hetgeen dan de inhoud van het geheele ligchaam is.

Voor $l = r$ en voor $l = 0$, komt er respectievelijk $4I = \frac{1}{3} a . \pi r^2$ en $4I = \frac{1}{2} a . \pi r^2$, hetgeen de bekende inhouden van de kegelvormige wig van Wallis, en van den gewonen kegel zijn.

Indien $OD = 2AC$ was, zou ook $OM = 2AM = 2AO$ en $MN = 2AB$ zijn; voor dit geval heeft men, $l = 2r$ of $b = 2a$ en dus

$$I' = \tfrac{1}{6} a . \pi r^2;$$

of zoo bovendien $a = r$ is

$$I'' = \tfrac{1}{6} \pi r^3.$$

Om den inhoud der ligchamelijke figuur MABCN te vinden, behoeft men in de vorige bewerking slechts de grenzen der tweede integratie te veranderen, zoodat men, van $x = a$ tot $x = b$, voor dien inhoud heeft

$$I_1 = \frac{\pi r^2}{4a (b-a)} \int_a^b (b-x) x \partial x,$$

of, daar $\int_a^b (b-x) x \partial x = \frac{1}{2} b (b^2 - a^2) - \frac{1}{3} (b^3 - a^3) = \frac{1}{6} (b-a)^2 (b+2a)$ is,

$$I_1 = \frac{\pi r^2 (b-a)(b+2a)}{24a} = \frac{\pi r^2 (3l - 2r)}{24 (l-r)^2};$$

voor $l = 2r$ of $b = 2a$ wordt

$$I'_1 = \tfrac{1}{6} a . \pi r^2,$$

Digitized by Google

en dus is dan $I' = I'_1$,
zoo als ook ligtelijk uit de beschouwing der figuur vooruit op te maken was.

Wat het zwaartepunt van het geheele ligchaam betreft, merken wij op dat hetzelve blijkbaar in de lijn OA moet gelegen zijn, en dat wij dus alleen deszelfs afstand u van het punt O, of van het vlak YOZ, te berekenen hebben. Hiertoe hebben wij de algemeene formule

$$u = \frac{\int (x\partial x \int z\partial y)}{\int (\partial x \int z\partial y)},$$

waarin wij de integralen slechts over het beschouwde vierde gedeelte des ligchaams behoeven uit te strekken, omdat het zwaartepunt van dit vierde gedeelte blijkbaar even ver van het vlak YOZ verwijderd is, als dat van het geheele ligchaam. Door voor z hare waarde te stellen, en de grenzen der integralen aan te wijzen, hebben wij alzoo

$$u = \frac{\int_0^a \left\{\frac{x^2\partial x}{b-x}\int_0^v \partial y \sqrt{\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\}}\right\}}{\int_0^a \left\{\frac{x\partial x}{b-x}\int_0^v \partial y \sqrt{\{(b-x)^2 r^2 - (b-a)^2 y^2\}}\right\}},$$

of door de reeds vroeger gevondene waarde, der integraal ten opzigte van y, te substitueren,

$$u = \frac{\int_0^a (b-x)\, x^2\, \partial x}{\int_0^a (b-x)\, \partial x};$$

daar voorts

$$\int_0^a (b-x)\, x^2\, \partial x = \tfrac{1}{12}\, a^3\, (4b - 3a)$$

en

$$\int_0^a (b-x)\, x\partial x = \tfrac{1}{6}\, a^2\, (3b - 2a)$$

is, vinden wij dan

$$u = \frac{a\,(4b - 3a)}{2\,(3b - 2a)},$$

of omdat $b = \frac{al}{l-r}$ is,

$$u = \frac{a\,(l + 3r)}{2\,(l + 2r)}.$$

Voor $l = r$ en voor $l = 0$, vinden wij respectievelijk $u = \frac{5}{6}\, a$

Digitized by Google

en $u = \frac{3}{4}a$, hetgeen de bekende uitkomsten voor de wig van Wallis en voor den gewonen kegel zijn.

Voor $l = 2r$ of $b = 2a$, zou men hebben

$$u' = \tfrac{5}{8}a,$$

of zoo bovendien $a = r$ ware

$$u'' = \tfrac{5}{8}r.$$

Om den afstand van het zwaartepunt des ligchaams MABCN tot het vlak YOZ te vinden, zou men weder in de voorgaande bewerking, de integralen ten opzigte van x, van $x = a$ tot $x = b$ moeten nemen. Voor dien afstand heeft men dus

$$u_1 = \frac{\int_a^b (b - x)x^2\,\partial x}{\int_a^b (b - x)x\,\partial x},$$

en daar men vindt

$$\int_a^b (b - x)\,x^2\partial x = \tfrac{1}{12}\,(b - a)^2\,(b^2 + 2ba + 3a^2),$$

en $$\int_a^b (b - x)\,x\partial x = \tfrac{1}{6}\,(b - a)^2\,(b + 2a);$$

is dan $$u_1 = \frac{b^2 + 2ba + 3a^2}{2(b + 2a)};$$

voor $b = 2a$ heeft men hier

$$u_1' = 1\tfrac{3}{8}\,a,$$

en dus is in dit geval

$$b - u_1' = 2a - 1\tfrac{3}{8}\,a = \tfrac{5}{8}\,a = u',$$

zoodat, wanneer OA = AM is, de zwaartepunten der ligchamen OABCD en MABCN respectievelijk op gelijke afstanden liggen van de vlakken, door O en M loodregt op de lijn OM gebragt.

CLIX. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Men vraagt naar de poolvergelijking der kettinglijn, in het bijzondere geval, dat de kromtestraal van den top grooter is dan de afstand van den top tot aan het middelpunt van aantrekking. Er wordt ondersteld, dat het aantrekkend vermogen der middelpuntskracht omgekeerd evenredig is aan het vierkant van den afstand, en dat het touw, hetwelk de kettinglijn vormt, gelijkslachtig en volkomen buigbaar is, en eene zeer geringe, gelijkmatige dikte heeft.

Opgelost *door* H. van Blanken *en* J. S. Sprijer.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Digitized by Google

Wanneer de uiteinden van een volmaakt buigbaar touw in de punten A en B (Fig. 112) zijn vastgemaakt, dan zal blijkbaar, bij het evenwigt, de kromme lijn, welke door het touw gevormd wordt, gelegen zijn in het vlak, dat door het middelpunt van aantrekking M en door de vaste punten A en B gaat.

Men trekke, in dit vlak, uit het punt M eene regte lijn MY, en neme deze lijn, benevens eene daarop getrokkene loodlijn OX, tot assen van onderling regthoekige coördinaten aan. Verder trekke men uit M, naar eenig punt P der kettinglijn APB, den voerstraal MP, en uit P eene loodlijn PQ op OX; vervolgens stelle men $OQ = x$, $PQ = y$, $MP = z$, *hoek* $PMO = \phi$, *boog* $AP = s$, en noeme $k\partial s$ het vermogen, waarmede de middelpuntskracht in het punt P, in de rigting PM, op eene differentiaal van den boog werkt.

Ondergaat nu de vorm der kromme lijn APB eene kleine verandering, dan heeft men, volgens *het beginsel der virtuele snelheden*,

$$\int k\partial s(\partial x\, Sin.\,\phi + \partial y\, Cos.\,\phi) + ens. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daar het touw eene bepaalde lengte heeft, is $\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ tusschen gegevene grenzen standvastig, terwijl ook $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ als standvastig wordt aangenomen; men behoort daarom, w een onbepaalde factor zijnde, bij de vergelijking (1) nog te voegen den term

$$\int w\partial\partial s = \int w\frac{\partial x\partial.\partial x + \partial y\partial.\partial y}{\partial s}$$

$$= w\frac{\partial x\partial x + \partial y\partial y}{\partial s} - \int\frac{\partial x\partial\,(w\partial x) + \partial y\partial\,(w\partial y)}{\partial s};$$

en de vergelijking (1) wordt hierdoor

$$\int\left\{\left(k\partial s\ Sin.\,\phi - \frac{\partial\,(w\partial x)}{\partial s}\right)\partial x + \left(k\partial s\ Cos.\,\phi - \frac{\partial\,(w\partial y)}{\partial s}\right)\partial y\right\}$$
$$+ ens. = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wegens de onafhankelijkheid van ∂x en ∂y, volgt uit deze vergelijking:

$$\left.\begin{aligned} k\partial s\ Sin.\,\phi - \frac{\partial\,(w\partial x)}{\partial s} &= 0, \\ \text{en} \qquad k\partial s\ Cos.\,\phi - \frac{\partial\,(w\partial y)}{\partial s} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Om w tusschen deze vergelijkingen te elimineren, heeft men, door eerst nader te differentiëren,

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} k\partial s\ Sin.\ \phi - \frac{\partial x}{\partial s}\,\partial w - w\,\frac{\partial^2 x}{\partial s} = 0, \\ k\partial s\ Cos.\ \phi - \frac{\partial y}{\partial s}\,\partial w - w\,\frac{\partial^2 y}{\partial s} = 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en noemt men den kromtestraal r, dan is, daar $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$ als standvastig aangenomen is,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{r} \text{ en } \frac{\partial^2 y}{\partial s} = \frac{\partial x}{r},$$

waardoor de vergelijkingen (4) worden

$$\left.\begin{aligned} rk\ Sin.\ \phi - r\,\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial w}{\partial s} + w\,\frac{\partial y}{\partial s} = 0, \\ \text{en} \qquad rk\ Cos.\ \phi - r\,\frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial w}{\partial s} - w\,\frac{\partial x}{\partial s} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

In aanmerking nemende dat $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$ is, vindt men uit de vergelijkingen (5) ligtelijk

$$\left.\begin{aligned} w = rk\left(\frac{\partial x}{\partial s}\ Cos.\ \phi - \frac{\partial y}{\partial s}\ Sin.\ \phi\right), \\ \partial w = k\partial s\left(\frac{\partial y}{\partial s}\ Cos.\ \phi + \frac{\partial x}{\partial s}\ Sin.\ \phi\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en stelt men den hoek, dien de raaklijn met de as der y maakt, door α voor, dan is $\frac{\partial x}{\partial s} = Sin.\ \alpha$ en $\frac{\partial y}{\partial s} = Cos.\ \alpha$, waardoor de vergelijkingen (6) worden

$$\left.\begin{aligned} w = rk\ Sin.\ (\alpha - \phi), \\ \text{en} \qquad \partial w = k\partial s\ Cos\ (\alpha - \phi); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

of den hoek, dien de raaklijn met den voerstraal maakt, ψ noemende,

$$\left.\begin{aligned} w = rk\ Sin.\ \psi, \\ \text{en} \qquad \partial w = k\partial s\ Cos.\ \psi = k\partial x. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieruit volgt de algemeene differentiaalvergelijking

$$\partial\,(rk\ Sin.\ \psi) = k\partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Daar k omgekeerd evenredig is aan het vierkant van den afstand, kan men, m eene standvastige grootheid zijnde, stellen $k = \frac{m}{x^2}$; door substitutie van deze waarde, gaat de vergelijking (9) over in

$$\partial\left(\frac{r\ Sin.\ \psi}{x^2}\right) = \frac{\partial x}{x^2},$$

Digitized by Google

waaruit men door integrering vindt

$$\frac{r\ Sin.\ \psi}{s^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{s}; \quad \ldots\ldots\ (10)$$

zijnde de waarde der hier ingevoegde standvastige c, wanneer met $\psi = \beta$ overeenstemt $r = n$ en $s = a$, $c = \frac{a^2}{a + n\ Sin.\ \beta}$.

De kromtestraal is in het algemeen $r = -\frac{s\partial s}{\partial (s\ Sin.\ \psi)}$; deze waarde in (10) overbrengende, komt er

$$\frac{\partial (s\ Sin.\ \psi)}{s\ Sin.\ \psi} = \frac{c\partial s}{cs - s^2}$$

of

$$\frac{\partial (s\ Sin.\ \psi)}{s\ Sin.\ \psi} = \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial s}{c - s},$$

en integrerende

$$Log.\ (s\ Sin.\ \psi) = Log.\ \frac{c's}{c - s}$$

of

$$Sin.\ \psi = \frac{c'}{c - s};$$

de waarde der hier ingevoerde standvastige c' is, omdat met $\psi = \beta$ overeenstemt $s = a$, $c' = (c - a)\ Sin.\ \beta$; dus is

$$Sin.\ \psi = \frac{(c - a)\ Sin.\ \beta}{c - s}$$

of, voor c de reeds opgegevene waarde inbrengende,

$$Sin.\ \psi = \frac{an\ Sin.^2\ \beta}{(a + n\ Sin.\ \beta)\ s - a^2} \quad \ldots\ (11)$$

Neemt men $\beta = 90°$, als wanneer a den voerstraal en n den kromtestraal van den top voorstelt, dan wordt $c = \frac{a^2}{a + n}$ en

$$Sin.\ \psi = \frac{an}{(a + n)\ s - a^2}; \quad \ldots\ldots\ (12)$$

en brengt men deze waarden in de vergelijking (10) over, dan vindt men voor den kromtestraal

$$r = \frac{((a + n)\ s - a^2)^2\ s}{a^2 n} = \frac{ns}{a\ Sin.^2\ \psi} \quad \ldots\ (13)$$

Door de vergelijking (12) met s te vermenigvuldigen, en vervolgens $s = \infty$ te nemen, vindt men voor de loodlijn, welke uit het middelpunt van aantrekking op de asymptoten valt,

$$l = \frac{an}{a + n} \quad \ldots\ldots\ (14)$$

Digitized by Google

Door de vergelijking (12) te differentiëren, vindt men ligtelijk

$$\partial s = \frac{\partial x}{Cos.\ \psi} = -\frac{an}{a+n} \cdot \frac{\partial \psi}{Sin.^2\ \psi}$$

en

$$s = \frac{an}{a+n}\ Cot.\ \psi = l\ Cot.\ \psi, \ldots . \quad (15)$$

wordende door deze vergelijking de lengte van den boog bepaald, van den top der kromme af gerekend.

Daar men in het algemeen heeft $Sin.\ \psi = \frac{z\partial\phi}{\sqrt{(\partial z^2 + z^2\partial\phi^2)}}$, zoo vindt men ligtelijk uit de vergelijking (12)

$$\partial\phi = \frac{an\partial z}{z\sqrt{\{((a+n)\ z - a^2)^2 - a^2n^2\}}}; \ldots (16)$$

en door verder z en ∂z tusschen de vergelijkingen (12) en (16) te elimineren, vindt men

$$\partial\phi = -\frac{n\partial\psi}{n + a\ Sin.\ \psi}. \ldots . \quad (17)$$

Wanneer I den vlakken inhoud voorstelt, begrepen tusschen twee voerstralen en eenen boog der kromme, vindt men, door de vergelijking (17) met $\frac{1}{2}z^2$ te vermenigvuldigen, en voor z hare waarde uit (12) te substitueren

$$\partial I = \tfrac{1}{2}z^2\partial\phi = -\frac{a^2n}{2(a+n)^2} \cdot \frac{(n + a\ Sin.\ \psi)\ \partial\psi}{Sin.^2\ \psi};$$

integrerende, vindt men dus

$$I = \frac{a^2n}{2(a+n)^2}\left\{n\ Cot.\ \psi + a\ Nep.\ Log.\ Cot.\tfrac{1}{2}\psi\right\}, \ldots (18)$$

welke vergelijking den inhoud aanwijst, begrepen tusschen den voerstraal van den top en eenigen voerstraal MP.

Bij het integreren der vergelijking (17) heeft men drie gevallen te onderscheiden, namelijk: $a > n$ en $a = n$ en $a < n$ (*).

Eerste geval; $a > n$.

Men vindt in dit geval, door het integreren der vergelijking (17),

$$\phi = \frac{n}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}\ Nep.\ Log.\ \frac{a + n\ Sin.\ \psi + Cos.\ \psi\sqrt{(a^2 - n^2)}}{n + a\ Sin.\ \psi}; \ldots (19)$$

zonder dat hier eene standvastige bijgevoegd wordt, verdwijnt ϕ voor $\psi = 90°$, en bij deze vergelijking is dus de oorsprong der

(*) Tot dit integreren, kan men hier onmiddellijk gebruik maken van het voorbeeld, in § 254 der *Diff.* en *Int. Rek.* van I. R. SCHMIDT behandeld.

Digitized by Google

hoeken of de as MY zoodanig genomen, dat zij door den top der kettinglijn gaat.

Stelt men in de vergelijking (19) eerst $\psi = 0$ en vervolgens $\psi = 180°$, en noemt men de waarden, welke ϕ alsdan verkrijgt, ϕ' en ϕ'', zoo vindt men voor de hoeken, onder welke de asymptoten de as MY doorsnijden,

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \frac{n}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}\, Nep.\, Log.\, \frac{a + \sqrt{(a^2 - n^2)}}{n}, \\ \text{en}\quad \phi'' &= -\frac{n}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}\, Nep.\, Log.\, \frac{a + \sqrt{(a^2 - n^2)}}{n}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (20)$$

Substitueert men in de vergelijking (19), voor *Sin.* ψ en *Cos.* ψ de waarden, die zij volgens de vergelijking (12) hebben, dan vindt men voor de poolvergelijking

$$\phi = \frac{n}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}\, Nep.\, Log.\, \frac{a(z - a + n) + \sqrt{(a - n)(z - a)}\{a(z - a + n) + nz\}}{nz}. \quad (21)$$

Deze poolvergelijking komt geheel overeen met die, welke in de *Nieuwe Wis- en Natuurk. Verh.* I Deel 2e Stuk, bl. 185, op eene geheel andere wijze is verkregen; behoevende men aldaar slechts te stellen $k = np$.

Tweede Geval; $a = n$.

Men vindt in dit geval, door het integreren der vergelijking (17),

$$\phi = Tang.\,(45° - \tfrac{1}{2}\psi) = \sqrt{\frac{1 - Sin.\,\psi}{1 + Sin.\,\psi}}, \quad . \quad . \quad (22)$$

waarbij weder geen standvastige behoeft gevoegd te worden, zoo de as MY door den top gaat.

Substitueert men hierin de waarde, die *Sin.* ψ uit de vergelijking (12) voor $a = n$ verkrijgt, dan vindt men voor de poolvergelijking

$$\phi = \sqrt{\frac{z - a}{z}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Voor de hoeken, welke de asymptoten met de as MY maken, vindt men nu

$$\phi' = 1 \text{ en } \phi'' = -1,$$

of in graden $\phi' = \frac{180°}{\pi}$ en $\phi'' = -\frac{180°}{\pi}$.

Stelt men in dit geval, in de vergelijking (15), voor *Cot.* ψ de waarde volgens de vergelijking (12), dan vindt men voor de lengte van den boog

$$s = \sqrt{(z^2 - az)} = z\phi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

De boog CP is dus hier gelijk aan den cirkelboog, die, uit M als middelpunt, tusschen het punt P en de as MY wordt getrokken.

Digitized by Google

Derde Geval; a < n.

Men vindt in dit geval, door het integreren der vergelijking (17),

$$\phi = \frac{n}{\sqrt{(n^2 - a^2)}} \textit{Boog Cos.} \frac{a + n \textit{ Sin.} \psi}{n + a \textit{ Sin.} \psi}, \quad . \quad . \quad (25)$$

waarin wederom, voor $\psi = 90°$, $\phi = 0$ wordt; zoodat weder de as MY door den top gaat.

Substitueert men hierin voor *Sin.* ψ de waarde volgens de vergelijking (12), dan vindt men voor de in het voorstel bedoelde poolvergelijking

$$\phi = \frac{n}{\sqrt{(n^2 - a^2)}} \textit{Boog Cos.} \frac{a(s - a + n)}{ns}. \quad . \quad (26)$$

Voor de hoeken, welke de asymptoten met de as MY maken, vinden wij nu $\phi' = \frac{n}{\sqrt{(n^2 - a^2)}} \textit{Boog Cos.} \frac{a}{n}$,

en $\phi'' = -\frac{n}{\sqrt{(n^2 - a^2)}} \textit{Boog Cos.} \frac{a}{n}$. $\Big\}$ . . (27)

Stelt men $n = \infty$ en $\frac{a}{n} = 0$, dan wordt de vergelijking (26)

$$\textit{Cos.} \phi = \frac{a}{s}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

de kettinglijn is dus bij deze onderstelling eene regte lijn, welke op den aftand a van het punt M is getrokken. De vergelijkingen (27) worden alsdan $\phi' = \frac{1}{2}\pi$ en $\phi'' = -\frac{1}{2}\pi$, terwijl de vergelijkingen (25), (14), (15) en (18) overgaan in *Cos.* $\phi =$ *Sin.* ψ, $l = a$, $s = a$ *Tang.* ϕ, en $I = \frac{1}{2}as$.

Aanmerkingen. 1°. Wij hebben het teeken van den kromtestraal altijd zoo genomen, dat de bolle zijde naar den oorsprong gekeerd was. Neemt men den kromtestraal in eenen anderen zin, dan werkt de middelpuntskracht afstootend.

Voor eene afstootende middelpuntskracht, waarvan het vermogen omgekeerd evenredig is aan het vierkant van den afstand, vindt men dus, door in de vergelijking (11) n negatief te nemen

$$\textit{Sin.} \psi = \frac{an \textit{ Sin.}^2 \beta}{a^2 - (a - n \textit{ Sin.} \beta)s}. \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Stelt men in deze vergelijking $a = n$ *Sin.* β, dan wordt *Sin.* $\psi =$ *Sin.* β, en bij gevolg is alsdan de kettinglijn de bekende *Logarithmische spiraal*, welke voor $\beta = 90°$ in eenen cirkel overgaat.

2°. Stelt men in de vergelijking (12) eerst $s = a - n + y$,

Digitized by Google

en neemt men vervolgens $a = \infty$, $\frac{n}{a} = 0$ en $\frac{y}{a} = 0$, dan vindt men, voor de gewone kettinglijn,

$$Sin.\ \psi = \frac{n}{y}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

zijnde hier de oorsprong der onderling regthoekige coördinaten, op den afstand n beneden den top genomen.

3°. Stelt men in de vergelijking (13) $a = \infty$ en $\frac{s}{a} = 1$, dan vindt men, voor de gewone kettinglijn,

$$r = \frac{n}{Sin.^2 \psi}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

4°. Stelt men in de vergelijking (15) $a = \infty$ en $\frac{n}{a} = 0$, dan vindt men, almede voor de gewone kettinglijn,

$$s = n\ Cot.\ \psi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

5°. Wanneer men de vergelijking (19) met $\frac{1}{2}a^2$ vermenigvuldigt, dan vindt men in het algemeen den inhoud van den cirkelsector S, die a tot straal en ϕ tot middelpuntshoek heeft. Is nu a zoo groot, dat $\frac{n}{a}$ verwaarloosd kan worden, dan wordt

$$S = \tfrac{1}{2}an\ Nep.\ Log.\ \frac{1 + Cos.\ \psi}{Sin.\ \psi} = \tfrac{1}{2}an\ Nep.\ Log.\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi.$$

Verder wordt, voor zulk eene groote waarde van a, volgens de vergelijking (18),

$$I = \tfrac{1}{2}n^2\ Cot.\ \psi + \tfrac{1}{2}an\ Nep.\ Log.\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi$$

en dus $$I - S = \tfrac{1}{2}n^2\ Cot.\ \psi.$$

Voor eene onsindig groote waarde van a, vindt men dus bij de gewone kettinglijn, voor den inhoud i der vlakke figuur, begrepen tusschen den boog CP, de raaklijn aan den top C, en de loodlijn uit P op die raaklijn nedergelaten,

$$i = \tfrac{1}{2}n^2\ Cot.\ \psi = \tfrac{1}{2}ns. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

6°. Stelt men in de vergelijking (19), na de beide leden met a vermenigvuldigd te hebben, $a\phi = x$; en neemt men vervolgens $a = \infty$ en $\frac{n}{a} = 0$, dan wordt voor de gewone kettinglijn

$$x = n\ Nep.\ Log.\ \frac{1 + Cos.\ \psi}{Sin.\ \psi} = n\ Nep.\ Log.\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi,$$

waaruit men verder vindt

$$Cot.\ \tfrac{1}{2}\psi = e^{\frac{x}{n}} \text{ en } Cot.\ \psi = \tfrac{1}{2}\left\{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}\right\},$$

Digitized by Google

terwijl uit de vergelijking (30) volgt

$$Cot.\ \psi = \frac{\sqrt{(y^2 - n^2)}}{n}.$$

Door deze waarden van *Cot.* ψ aan elkander gelijk te stellen, vindt men voor de vergelijking der gewone kettinglijn, bij regthoekige coördinaten, de oorsprong op den afstand n beneden den top zijnde,

$$y = \tfrac{1}{2}\, n \left\{e^{\frac{x}{n}} + e^{-\frac{x}{n}}\right\} \ldots\ldots (34)$$

7°. Stelt men in de vergelijking (21) $s = a - n + y$ en, na beide leden met a vermenigvuldigd te hebben, $a\phi = x$; en neemt men vervolgens $a = \infty$, $\frac{n}{a} = 0$ en $\frac{y}{a} = 0$, dan verkrijgt men ook nog voor de vergelijking der gewone kettinglijn, bij regthoekige coördinaten,

$$x = n\ Nep.\ Log.\ \frac{y + \sqrt{(y^2 - n^2)}}{n} \ldots (35)$$

CLX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Alle mogelijke assen te vinden, om welke men een gegeven ligchaam door de werking der zwaartekracht kan laten slingeren, zoodanig, dat de slingeringen in den kortstmogelijken tijd volbragt worden.

Opgelost *door* G. F. W. Barth *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* G. F. W. Barth.

Als men de massa van het ligchaam door M, en zijn moment van traagheid, ten opzigte van eenige lijn door het zwaartepunt getrokken, door Mk^2 voorstelt, worden de kleine schommelingen om eenige as, die evenwijdig aan de genoemde lijn en op den afstand l van het zwaartepunt verwijderd is, in denzelfden tijd volbragt als die van eenen eenvoudigen slinger, waarvan de lengte is $l + \frac{k^2}{l}$. Indien dus k standvastig is, dan zal voor het minimum dezer slingertijden $l = k$ moeten wezen, omdat voor deze waarde van l de uitdrukking $l + \frac{k^2}{l}$ een minimum is. Het volstrekte minimum heeft dus plaats, indien tevens k de kleinstmogelijke waarde heeft; en dit zal het geval zijn, indien Mk^2 het kleinste is der drie momenten van traagheid ten opzigte

Digitized by Google

van de hoofdassen, die door het zwaartepunt kunnen getrokken worden. En verder worden dan de slingeringen in denzelfden tijd volbragt, als die van den enkelvoudigen slinger, waarvan 2k de lengte is.

Bepaalt men dus de rigting der hoofdas, gaande door het zwaartepunt en waarvoor het moment van traagheid het kleinste is, en construeert men een gewoon cirkelvormig cilindervlak, dat deze hoofdas tot as heeft, en waarvan $k = \sqrt{\frac{MA^2}{M}}$, dat is de vierkantswortel van de verhouding der massa op dat moment, de straal is, dan zullen alle beschrijvende lijnen van dit cilindervlak assen zijn, om welke de slingeringen des ligchaams in gelijke tijden, en in kortere tijden dan om eenige andere as volbragt worden.

CLXI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën der gemeene doorsnede van twee onderling regthoekige vlakken, benevens de horizontale en verticale projectiën van één punt van het eene vlak; begeert men de horizontale en verticale doorgangen van het andere vlak te construeren.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, W. van Haarst, Jr. *en* W. L. Ivanon.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij OX (Fig. 113 of 114) de as van projectie, A'B' de horizontale en A"B" de verticale projectie van de gemeene doorsnede der bedoelde vlakken, P' de horizontale en P" de verticale projectie van een punt van het eene vlak; indien wij dan vooreerst de punten C' en D" construeren, waar de lijn (A'B', A"B") de vlakken van projectie ontmoet, is C' een punt van de horizontale doorgangen en, D" een punt van de verticale doorgangen der bedoelde vlakken, zoodat wij, om het begeerde vlak te vinden, nog slechts één punt van zijn horizontalen of verticalen doorgang behoeven te construeren. Trekken wij door de punten (D', D") en (P', P"), eene lijn (D'P', D"P"), dan ligt deze lijn in het eerste vlak; want niet alleen het punt (P', P"), maar ook het punt (D', D") als een punt der gemeene doorsnede (A'B', A"B") ligt in dat vlak. Construeren wij dus het punt E', waar de lijn

Digitized by Google

(D'P", D"P") het horizontale vlak ontmoet, dan is dit punt E' een punt van den horizontalen doorgang van het eerste vlak; weshalve de doorgangen M'MM" van dat vlak verkregen worden, zoo wij eerst door C' en E' de lijn M'M, en vervolgens, uit het ontmoetingspunt M van deze lijn met de as, door D" de lijn MM" trekken.

Kiezen wij nu in de gemeene doorsnede (A'B', A"B") een willekeurig punt (Q', Q"), en trekken wij door dat punt eene lijn (Q'R', Q"R") loodregt op het vlak M'MM", waartoe wij slechts de projectiën Q'R' en Q"R" loodregt op de doorgangen MM' en MM" behoeven te trekken, dan ligt deze lijn (Q'R', Q"R") in het tweede of begeerde vlak. Construeren wij dus het punt, waar de lijn (Q'R', Q"R") het horizontale of verticale vlak ontmoet, dan zal dit punt een punt van den horizontalen of verticalen doorgang van het begeerde vlak zijn. Dit punt, benevens de punten C' en D", bepalen dan de begeerde doorgangen volkomen.

In Fig. 113 hebben wij het punt F' geconstrueerd, waar de lijn (Q'R', Q"R") het horizontale vlak ontmoet; in Fig. 114 daarentegen het punt G", waar die lijn het verticale vlak snijdt. In Fig. 113 hebben wij dus eerst N'N door C' en F', en daarna NN" door D" getrokken; in Fig. 114 hebben wij echter eerst N"N door D" en G", en daarna NN' door C' getrokken. Deze lijnen NN' en NN" zijn nu de begeerde doorgangen.

CLXII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van een punt, begeert men de horizontale en verticale projectiën te construeren van eene lijn, die door het gegeven punt gaat en met de beide vlakken van projectie gegevene hoeken maakt.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. S. SPEIJER, W. VAN HAARST, JR. *en* W. L. IVANGH.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De begeerde projectiën zouden onmiddelijk kunnen getrokken worden, indien men aanvankelijk, door een willekeurig punt van de as van projectie, eene lijn gebragt had, die met de beide vlakken van projectie de gegevene hoeken maakte. Wij zullen dus beginnen, met de constructie der laatstgenoemde lijn aan te wijzen.

Trekken wij, uit het willekeurig gekozen punt O (Fig. 115) van

Digitized by Google

de as van projectie OX, loodregt op die as, eene lijn OY in het horizontale en eene lijn OZ in het verticale vlak; maken wij vervolgens *hoek* XOA gelijk aan den hoek, dien de lijn met het horizontale vlak, *hoek* XOB gelijk aan den hoek, dien zij met het verticale vlak moet maken. Indien wij dan den hoek ZOA om OZ, en den hoek YOB om OY laten omwentelen, waardoor de lijnen OA en OB gewone kegelvlakken beschrijven, blijft OA steeds den gegeven hoek met het horizontale vlak, en OB steeds den gegeven hoek met het verticale vlak maken. De doorsnede dezer kegelvlakken, die beide den top in O hebben, en wier assen OZ en OY in O regthoekig op elkander staan, is dan eene lijn, die gelijktijdig met het horizontale en verticale vlak de gegevene hoeken maakt.

Om de genoemde doorsnede te construeren nemen wij OA = OB, dan zullen deze lijnen in hunne omwenteling langs elkander vallen en dus de bedoelde gemeene doorsnede worden, indien de punten A en B op elkander vallen. Het punt A beschrijft bij de omwenteling om OZ eenen cirkel, die de lijn AA″ loodregt op OZ tot verticale, en een cirkel A′C, uit O met OA′ = A″A′ beschreven, tot horizontale projectie heeft; het punt B beschrijft bij de omwenteling om OY almede eenen cirkel, die BB′ loodregt op OY tot horizontale projectie heeft. Het snijpunt M′ van BB′ met den cirkel A′C, is dus de horizontale projectie van het punt, waar zoowel A als B gedurende hunne beweging komen; wordende van dit punt de verticale projectie M″ gevonden, door uit M′ de lijn M′M″ loodregt door OX te trekken, tot dat zij AA″ in M″ ontmoet. Trekken wij dus OM′ en OM″, dan zijn dit de projectiën van de doorsnede der beide kegelvlakken, en bijgevolg maakt de lijn (OM′, OM″) de gegevene hoeken met de vlakken van projectie.

Zij nu (P′, P″) het gegevene punt, dan worden de projectiën Q′R′ en Q″R″ der gevraagde lijn onmiddellijk gevonden, als men haar respectivelijk evenwijdig met OM′ en OM″ door de punten P′ en P″ trekt.

Alzoo de lijn BB′ den cirkel A′C in nog een tweede punt snijdt, zal men ook nog eene tweede lijn kunnen vinden, die aan de vraag voldoet; maar deze is dan slechts bij tegenoverstand met de andere geplaatst.

Digitized by Google

Wij hebben bij deze constructie ondersteld, dat de begeerde lijn in zulk eenen stand verlangd werd, dat de lijn, die uit O, *boven* het horizontale vlak, met haar evenwijdig loopt, *vóór* het verticale vlak kwam. Begeerde men, dat deze lijn *achter* het verticale vlak kwam te liggen, dan zou men, zoo als in Fig. 116 is aangewezen, *hoek* XOB even als *hoek* XOA boven de as uitzetten, terwijl overigens de constructie onveranderd zou blijven.

Aanmerkingen. 1°. Mogt de lijn BB′ den cirkel A′C niet snijden, dan zou het onmogelijk zijn eene lijn te trekken, die de gegevene hoeken met de projectievlakken maakte.

2°. Mogt de lijn BB′ den cirkel A′C raken, dan zou het aangewezene dubbele antwoord in een enkel overgaan. In dit geval zou het raakpunt op OY vallen, en de begeerde lijn derhalve in een vlak gelegen zijn, dat loodregt op de as van projectie stond, hetgeen slechts mogelijk is, indien de som der gegevene hoeken juist een regte hoek mogt zijn.

3°. Opdat de lijn BB′ den cirkel AC werkelijk snijde, moet men hebben OA′ > OB′ en dus, omdat OA = OB is, ook

$$\frac{OA'}{OA} > \frac{OB'}{OB},$$

dat is $Sin.\ (90° - XOA) > Sin.\ XOB$;

en, omdat de hoeken XOA en XOB scherp geacht worden,

$$90° - XOA > XOB,$$

of $$XOA + XOB < 90°.$$

Zal dus het voorstel eene eigenlijke oplossing toelaten, zoo moet de som der gegevene hoeken kleiner dan een regte hoek wezen.

CLXIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Uit hoeveel cijfers zal het product bestaan van de eerste duizend ***pronikgetallen, en welke zullen de*** vijf eerste ***cijfers van dat product zijn?***

Opgelost *door* H. G. Witlage, J. S. Spelier, J. A. Stamkart *en* W. L. Ivanoff.

Oplossing van H. G. Witlage.

Daar men door een pronikgetal het product verstaat, van een getal met een ander, dat eene eenheid grooter is, zoo zijn de eerste duizend pronikgetallen:

$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \ldots\ldots 999 \times 1000, 1000 \times 1001.$

Digitized by Google

Stellen wij nu

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots\text{tot} \times 1000 = P,$$

zoo is

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots\ldots\text{tot} \times 1001 = 1001P,$$

waaruit volgt, dat dan $1001P^2$ het product van de eerste duizend pronikgetallen zal voorstellen.

Dit product X noemende, hebben wij dus

$$X = 1001P^2$$

en $$Log.\ X = 2\ Log.\ P + Log.\ 1001.$$

Maar omdat P het product der natuurlijke getallen van 1 tot 1000 voorstelt, is *Log.* P de som van de logarithmen dier natuurlijke getallen; en voor die som hebben wij (zie *Verz. van Wisk. Voorst.*, Deel I, Voorstel CXXVI.)

$$Log.\ P = 2567{,}604645;$$

dus is $$2\ Log.\ P = 5135{,}20929,$$

voorts is $$Log.\ 1001 = \quad 3{,}00043,$$

dus $$Log.\ X = 5138{,}20972.$$

Daar nu $0{,}20972 = Log.\ 1{,}6207$ is, blijkt hieruit, dat X, of het bedoelde product, uit 5139 cijfers bestaan zal, waarvan de vijf eerste zullen zijn 16207.

Aanmerking *uit de overige oplossingen.* De waarde *Log.* P $= 2567{,}60464\ldots\ldots$, wordt ook gevonden bij Lacroix, *Traité élémentaire de Calcul Diff. et de Calcul Integral*, N°. 383; zij kan almede berekend worden volgens eene formule, door Callet opgegeven in de *Voorrede* tot zijne *Logarithmentafels*, bladz. 45.

CLXIV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Welk getal heeft de eigenschap, dat, wanneer men bij deszelfs zesde magt de eenheid telt, deze som met 24 vermenigvuldigt, en bij dit product 867 maal de som van de vierde en tweede magt van het getal optelt, er evenveel komt, als of men het getal bij deszelfs vijfde magt had opgeteld, deze som met 242 vermenigvuldigd, en bij dit product 1334 maal de derde magt van het getal opgeteld?

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., J. S. Spreijer, J. A. Stankart, W. C. Verseput, H. G. Witlage, W. L. Ivangh en A. A. Moll.

Digitized by Google

Oplossing van W. van Haaret, Jr.

Het te vinden getal x noemende, geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$24\,(x^6+1)+867\,(x^4+x^2)=242\,(x^5+x)+1334x^3,$$

waarvoor men, na deeling door x^3 en verplaatsing der termen, schrijven kan

$$24\left(q^3+\frac{1}{x^3}\right)-242\left(x^2+\frac{1}{x}\right)+867\left(x+\frac{1}{x}\right)-1334=0.$$

Stelt men nu $$x+\frac{1}{x}=y,$$

dan is $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

en $$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,$$

waardoor men verkrijgt

$$24\,(y^3-3y)-242\,(y^2-2)+867y-1334=0,$$

of wel $$24y^3-242y^2+795y-850=0.$$

Stelt men verder $$y=\tfrac{1}{12}z,$$

dan komt er $$z^3-121z^2+4770z-6120=0,$$

welke vergelijking drie meetbare wortels $z=30$, $z=40$ en $z=51$ heeft; hieruit volgen alzoo voor y de drie waarden

$$y=2\tfrac{1}{2},\ y=3\tfrac{1}{3}\text{ en }y=4\tfrac{1}{4}.$$

Dewijl verder uit $x+\frac{1}{x}=y$ gevonden wordt $x=\frac{y\pm\sqrt{(y^2-4)}}{2}$, heeft men eindelijk, door hierin de voor y gevondene waarden over te brengen,

$$x=2,\ x=\tfrac{1}{2},\ x=3,\ x=\tfrac{1}{3},\ x=4\text{ en }x=\tfrac{1}{4}.$$

CLXV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Welke waarden kan men aan x, y en z geven, opdat de uitdrukking

$$z\,(4yz+2)+2x\,(x-1)\,(y^2+z^2)-x^2\,(4yz+1)$$

een volkomen vierkant worde?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Bassan, W. L. Ivanch, H. G. Witlage, W. C. Verseput *en* A. A. Moll.

Oplossing van J. S. Speijer.

De opgegevene uitdrukking wordt, zoo wij haar naar de magten van z rangschikken,

Digitized by Google

$x^2(2y^2 + 2z^2 - 4yz - 1) - 2x(y^2 + z^2 - 2yz - 1)$
of wel $x^2\{2(y-z)^2 - 1\} - 2x\{(y-z)^2 - 1\}$, . . (A)
waaruit blijkt, dat de waarde dier uitdrukking wel van het verschil $y - z$, maar overigens niet van de bijzondere waarden van y en z afhangt. Stellen wij derhalve $y - z = p$, en vervolgens de geheele uitdrukking (A) gelijk aan q^2x^2, dan komt er

$$x^2(2p^2 - 1) - 2x(p^2 - 1) = q^2x^2,$$

zoodat wij na deeling door x vinden

$$x = \frac{2(p^2 - 1)}{2p^2 - 1 - q^2}, \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

waarin nu p, dus ook y en z, alsmede q, naar welgevallen kunnen genomen worden.

Voor $q = 1$, wordt $x = 1$, onafhankelijk van p. De uitdrukking (A) gaat dan ook voor $x = 1$ over in 1, hetgeen onafhankelijk van de waarden van y en z een vierkant is.

Voor $q = p$, wordt $x = 2$, wederom onafhankelijk van p. De uitdrukking (A) gaat dan ook voor $x = 2$ over in $4(y-z)^2$, hetgeen almede onafhankelijk van de waarden van y en z een vierkant is.

Voor $q = 1$ en $p = 1$, geeft de formule (B) voor x den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$. De uitdrukking (A) gaat dan ook voor $y - z = 1$ over in x^2, hetgeen onafhankelijk van de waarde van x een vierkant is. Om dus die uitdrukking tot een vierkant te maken, kan men x, y en z geheel willekeurig nemen, mits slechts zoodanig, dat $y - z = 1$ zij.

Neemt men $y - z = p = 4$ en $q = 5$, dan wordt volgens (B) $x = 5$; voor deze waarden wordt de opgegevene uitdrukking 625.

CLXVI. Voorstel.

Door L. Vervren, Jz.

Welke meetkunstige reeks, bestaande uit drie geheele getallen, heeft de eigenschap, dat de som der eerste en derde termen 102 is?

Opgelost *door* J. S. Sprijer, J. Bassan, W. van Haaret, Jr., W. L. Ivangh, A. A. Moll, J. A. Stamkart, W. C. Verseput en L. Vervren, Jz.

Oplossing *van* J. S. Sprijer.

Stellen wij, dat x de eerste term der reeks zij, dan is de

derde $102 - x$ en dus de middelste term $\sqrt{x}\,(102 - x)$. Omdat nu al de termen geheele getallen zijn, moet voor x een zoodanig geheel getal gevonden worden, dat de uitdrukking $\sqrt{x}\,(102 - x)$ rationaal zij. Stellen wij te dien einde

$$\sqrt{x}\,(102 - x) = \frac{p}{q}\,x,$$

dan is

$$x\,(102 - x) = \frac{p^2}{q^2}\,x^2,$$

of

$$102 - x = \frac{p^2}{q^2}\,x,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{102q^2}{p^2 + q^2}.$$

Daar wij mogen aannemen, dat p en q onderling ondeelbaar zijn, zullen ook q^2 en $p^2 + q^2$ onderling ondeelbaar wezen; zal dus x een geheel getal zijn, dan moet 102 door $p^2 + q^2$ kunnen gedeeld worden. Onderzoeken wij alle mogelijke deelers van 102, dan blijkt het spoedig, dat onder dezen alleen de deelers 2, 17 en 34 sommen van twee kwadraten zijn.

De deeler 2, als wanneer p en q beide gelijk 1 zijn, geeft $x = 51$, waardoor alle drie de termen der reeks 51 worden, en men dus geene eigenlijke reeks verkrijgt.

Voor den deeler 17, als wanneer p en q de waarden 1 en 4 hebben, verkrijgt men $x = 6$, of $x = 96$, en men vindt dan voor de reeks 6, 24 en 96.

Nemen wij den deeler 34, dan hebben p en q de waarden 3 en 5, waardoor men vindt $x = 27$ of $x = 75$, zoodat men dan voor de reeks verkrijgt 27, 45 en 75.

In geheele getallen voldoen dus alleen de reeksen 6, 24 en 96, of 27, 45 en 75 aan het voorstel.

CLXVII. Voorstel.

Door A. A. Moll.

Men vraagt te bewijzen, dat elk oneven vierkant getal één meer is dan eenig achtvoud.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, A. A. Moll, J. S. Spruijer, J. A. Stamkart, W. van Haarst, Jr. *en* W. C. Verseput.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Daar elk oneven vierkant getal ook een oneven getal tot wortel

Digitized by Google

heeft, en alle onevene getallen in den vorm $2n + 1$ begrepen zijn, moet men bewijzen, dat $(2n + 1)^2$ eene eenheid grooter dan eenig achtvoud, of met andere woorden, dat $(2n + 1)^2 - 1$ door 8 deelbaar is; stellende n eenig geheel getal naar welgevallen voor.

Door herleiding heeft men onmiddellijk

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4 (n^2 + n);$$

maar $n^2 + n$ is een geheel pronikgetal, en al deze getallen zijn even; derhalve is $n^2 + n$ door 2, en bijgevolg $4 (n^2 + n)$ door 4×2 of door 8 deelbaar, zoodat hierdoor het gestelde bewezen is.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

Twee liefhebbers van de busschieterij stelden hunne stukken in A *en* B *op een horizontaal vlak, op eenen afstand van* 30 *roeden, en in koers noord-west en suid-oost van elkander. De eene schoot uit* B *onder eene elevatie van* 20°, *en trof in het horizontale vlak een punt* C, *juist oostwaarts van hem gelegen. De andere schoot uit* A, *onder eene elevatie van* 30°, *doch met gelijke aanvangssnelheid, en trof hetzelfde punt* C. *Men vraagt naar de worpsverheden* AC *en* BC, *zoomede naar den koers van* AC. (*)

OPGELOST *door* G. KOSTER, J. S. SPELJER *en* W. L. IVARGH.

OPLOSSING *van* G. KOSTER.

Laten de hoekpunten des driehoeks ABC (Fig. 117) den betrekkelijken stand der in de opgaaf genoemde punten A, B en C aanwijzen, dan is AB = 30 roeden en *hoek* ABC = 135°. Daar voorts uit B onder eene elevatie van 20°, en uit A onder eene elevatie van 30° geschoten is, en bij gelijke aanvankelijke snelheden de horizontale worpsverheden tot elkander staan als de sinussen der dubbele elevatiehoeken, zoo is ook nog

$$AC : BC = \textit{Sin.}\ 60° : \textit{Sin.}\ 40°.$$

Nu is vooreerst $AC : BC = \textit{Sin.}\ ABC : \textit{Sin.}\ BAC$,

dus $\textit{Sin.}\ 60° : \textit{Sin.}\ 40° = \textit{Sin.}\ 135° : \textit{Sin.}\ BAC$,

waaruit gevonden wordt

$$\textit{Sin.}\ BAC = \frac{\textit{Sin.}\ 40° \times \textit{Sin.}\ 135°}{\textit{Sin.}\ 60°}$$

(*) P. STELLINGWERF, *Busschieterij*, N°. 22 van de beluitvoorstellen.

Digitized by Google

en *hoek* BAC = 31°39′27″;

maar AD evenwijdig met BC getrokken zijnde, is *hoek* BAD = 45°; en dus

hoek BCA = *hoek* DAC = *hoek* BAD — *hoek* BAC = 13°20′33″, zoodat de koers van A naar C ruim 13°20′30″ bezuiden het oosten is.

Voorts is *Sin.* BCA : *Sin.* BAC = AB : BC

of *Sin.* 13°20′33″ : *Sin.* 31°39′27″ = 30 : BC,

en *Sin.* BCA : *Sin.* ABC = AB : AC

of *Sin.* 13°20′33″ : *Sin.* 135° = 30 : AC,

waaruit gevonden wordt

$$BC = \frac{30 \times \textit{Sin.}\ 31°39'27''}{\textit{Sin.}\ 13°20'33''} = 68{,}23 \text{ roeden}$$

en

$$AC = \frac{30 \times \textit{Sin.}\ 135°}{\textit{Sin.}\ 13°20'33''} = 91{,}92 \text{ roeden.}$$

CLXIX. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Van een trapezium gegeven zijnde de beide niet evenwijdige zijden en de beide diagonalen, vraagt men de evenwijdige zijden te berekenen.

Opgelost *door* A. A. Moll, J. Bassan, W. van Haarst, Jr., J. A. Hansen, W. L. Ivangh, J. S. Speijer, J. A. Stamkart en W. C. Verseput.

Oplossing van A. A. Moll.

Laat van het scheefhoekige trapezium ABCD (Fig. 118) gegeven zijn, de niet evenwijdige zijden AD = a, BC = b en de diagonalen AC = c, BD = d; indien wij dan de onbekende evenwijdige zijden AB = x en CD = y stellen, hebben wij, volgens eene bekende formule:

Inh. drieh. ABC $= \frac{1}{4}\sqrt{(x+b+c)(x+b-c)(x-b+c)(-x+b+c)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(-x^4-b^4-c^4+2b^2x^2+2c^2x^2+2b^2c^2)}$,

Inh. drieh. ABD $= \frac{1}{4}\sqrt{(x+a+d)(x+a-d)(x-a+d)(-x+a+d)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(-x^4-a^4-d^4+2a^2x^2+2d^2x^2+2a^2d^2)}$,

Inh. drieh. ACD $= \frac{1}{4}\sqrt{(y+a+c)(y+a-c)(y-a+c)(-y+a+c)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(-y^4-a^4-c^4+2a^2y^2+2c^2y^2+2a^2c^2)}$,

Inh. drieh. BCD $= \frac{1}{4}\sqrt{(y+b+d)(y+b-d)(y-b+d)(-y+b+d)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(-y^4-b^4-d^4+2b^2y^2+2d^2y^2+2b^2d^2)}$.

Digitized by Google

Maar de driehoeken ABC en ABD hebben gelijken inhoud; omdat zij op dezelfde bazis tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staan; en de driehoeken ACD en BCD verkeeren in hetzelfde geval; uit de bovenstaande waarden volgt dus, dat wij hebben $-b^4-c^4+2b^2x^2+2c^2x^2+2b^2c^2=-a^4-d^4+2a^2x^2+2d^2x^2+2a^2d^2$ en

$-a^4-c^4+2a^2y^2+2c^2y^2+2a^2c^2=-b^4-d^4+2b^2y^2+2d^2y^2+2b^2d^2$, dat is

$$\left\{2(b^2+c^2)-2(a^2+d^2)\right\}x^2=(b^2-c^2)^2-(a^2-d^2)^2$$

en

$$\left\{2(a^2+c^2)-2(b^2+d^2)\right\}y^2=(a^2-c^2)^2-(b^2-d^2)^2,$$

waaruit nu onmiddelijk volgt

$$x=\sqrt{\frac{(b^2-c^2)^2-(a^2-d^2)^2}{2(b^2+c^2)-2(a^2+d^2)}}$$

en

$$y=\sqrt{\frac{(a^2-c^2)^2-(b^2-d^2)^2}{2(a^2+c^2)-2(b^2+d^2)}}.$$

CLXX. VOORSTEL.

Door J. A. HANSEN.

Men wenscht eenen regthoekigen driehoek zoodanig te bepalen, dat niet alleen de zijden, maar ook de beide lijnen, die de scherpe hoeken in twee gelijke deelen verdeelen, door geheele getallen worden uitgedrukt.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, J. A. HANSEN, J. A. STAMKART, W. L. IVANOW en A. A. MOLL.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Wij zullen beginnen met aan te toonen, dat het niet mogelijk is, dat de *beide* deellijnen gelijktijdig rationaal zijn, indien de zijden des driehoeks door rationale getallen uitgedrukt worden.

Laten (Fig. 119) AC $=x$ en BC $=y$ de regthoekszijden, AB $=z$ de hypothenusa van een regthoekigen driehoek wezen, welks scherpe hoeken A en B door de deellijnen AD $=p$ en BE $=q$ middendoorgedeeld zijn; dan volgt uit de regthoekige driehoeken ACD en BCE onmiddellijk

$$p=\frac{x}{Cos.\frac{1}{2}A} \quad \text{en} \quad q=\frac{y}{Cos.\frac{1}{2}B};$$

maar omdat $Cos.\ A=\frac{x}{z}$ en $Cos.\ B=\frac{y}{z}$ is, hebben wij volgens

Digitized by Google

eene bekende goniometrische formule,

$$Cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + Cos.\,A}{2}} = \sqrt{\frac{s + x}{2s}},$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{1 + Cos.\,B}{2}} = \sqrt{\frac{s + y}{2s}},$$

en door substitutie dezer waarden komt er dan

$$p = x\sqrt{\frac{2s}{s + x}} \text{ en } q = y\sqrt{\frac{2s}{s + y}}, \ldots (1)$$

of ook $p = x\sqrt{\frac{2s\,(s - x)}{s^2 - x^2}} = \frac{x}{y}\sqrt{2s\,(s - x)},$

en $q = y\sqrt{\frac{2s\,(s - y)}{s^2 - y^2}} = \frac{y}{x}\sqrt{2s\,(s - y)}.$ $\Big\}$ . . (2)

Vermenigvuldigen wij de beide waarden (2) met elkander, dan vinden wij $pq = 2s\sqrt{(s - x)\,(s - y)}$,

maar nu is $(s - x)\,(s - y) = s^2 - s\,(x + y) + xy$

$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}s^2 - s\,(x + y) + xy$

$= \frac{1}{2}(x + y)^2 - s\,(x + y) + \frac{1}{2}s^2$

$= \frac{1}{2}(x + y - s)^2,$

en dus $\sqrt{(s - x)\,(s - y)} = (x + y - s)\sqrt{\frac{1}{2}}$,

waardoor wij verkrijgen

$$pq = s\,(x + y - s)\sqrt{2} \ldots\ldots (3)$$

Uit deze vergelijking blijkt dan, dat, zoo de zijden des driehoeks rationaal zijn, het product pq niet rationaal zijn kan, en dus ook niet gelijktijdig elk der factoren p en q van dit product.

Zoo wij uit de vergelijkingen (1) de waarde van s afzonderen, vinden wij $s = \frac{p^2x}{2x^2 - p^2}$ en $s = \frac{q^2y}{2y^2 - q^2}$,

waaruit verder volgt

$$\frac{x}{s} = \frac{2x^2 - p^2}{p^2} \text{ en } \frac{y}{s} = \frac{2y^2 - q^2}{q^2};$$

nemen wij nu de som van de vierkanten der beide laatste vergelijkingen, dan komt er

$$1 = \frac{(2x^2 - p^2)^2}{p^4} + \frac{(2y^2 - q^2)^2}{q^4}$$

of $p^4q^4 = (2x^2 - p^2)^2q^4 + (2y^2 - q^2)^2p^4$;

deze vergelijking gaat door ontwikkeling over in

$$4x^4q^4 + 4y^4p^4 - 4x^2p^2q^4 - 4y^2q^2p^4 + p^4q^4 = 0,$$

Digitized by Google

en zoo wij dan aan weerszijden $8x^2y^2p^2q^2$ optellen, wordt het voorste lid een volkomen vierkant, zoodat wij hebben

$$(2x^2q^2 + 2y^2p^2 - p^2q^2)^2 = 8x^2y^2p^2q^2$$

of $$2x^2q^2 + 2y^2p^2 - p^2q^2 = 2xypq\sqrt{2} \ldots (4).$$

Uit deze vergelijking blijkt dan verder, dat x, y, p en q niet allen door rationale getallen kunnen uitgedrukt worden, en dat dus zelfs, indien men slechts voor de regthoekszijden rationale getallen begeert en de hypothenusa irrationaal wil laten blijven, de *beide* deellijnen niet gelijktijdig rationaal kunnen wezen.

Stellen wij voor de zijden des driehoeks de bekende vormen

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn \quad \text{en} \quad z = m^2 + n^2, \ldots (5)$$

dan wordt volgens (1)

$$p = \frac{m^2 - n^2}{m}\sqrt{(m^2 + n^2)} \text{ en } q = \frac{2mn}{m+n}\sqrt{2}(m^2 + n^2);$$

wil men nu p rationaal maken, dan kan men stellen $m = 2rs$ en $n = r^2 - s^2$. Zoo wordt b. v. voor $r = 2$ en $s = 1$, $m = 4$ en $n = 3$; dus volgens (5) $x = 7$, $y = 24$, $z = 25$, en verder volgens (1) $p = \frac{35}{4}$ en $q = \frac{120}{7}\sqrt{2}$, door deze waarden met 4 te vermenigvuldigen, heeft men

$AC = 28$, $BC = 96$, $AB = 100$, $AD = 35$ en $BE = \frac{480}{7}\sqrt{2}$,

zijnde dus, behalve de zijden des driehoeks, ook de deellijn AD een geheel rationaal getal.

Wil men q rationaal maken, dan kan men stellen $m = t^2 - 2$ en $n = t^2 - 4t + 2$. Zoo heeft men b. v. voor $t = 4$, $m = 14$ en $n = 2$; dus volgens (5) $x = 192$, $y = 56$, $z = 200$, en verder volgens (1) $p = \frac{960}{7}\sqrt{2}$ en $q = 70$; men heeft dan

$AC = 192$, $BC = 56$, $AB = 200$, $AD = \frac{960}{7}\sqrt{2}$ en $BE = 70$,

welke waarden, met omwisseling der regthoekszijden, juist het dubbel van de voorgaanden zijn.

Neemt men $t = 5$, zoo wordt $m = 23$, $n = 7$, $x = 480$, $y = 322$, $z = 578$, $p = \frac{2160}{23}\sqrt{2}$ en $q = \frac{6474}{17}$; deze waarden met 15 vermenigvuldigende en door 2 deelende, vindt men

$AC = 3600$, $BC = 2415$, $AB = 4335$, $AD = \frac{61200}{23}\sqrt{2}$ en $BE = 2737$,

zoodat nu de zijden des driehoeks, benevens de deellijn BE door geheele getallen uitgedrukt worden.

Digitized by Google

CLXXI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de opstaande zijden eens driehoeks te berekenen, wanneer, behalve de basis van dien driehoek, bekend zijn: de inhouden der deelen waarin hij verdeeld wordt door de lijn, die den tophoek middendoordeelt.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. S. Speijer, W. van Haarst, Jr., W. C. Verseput, J. Bassan, A. A. Moll *en* J. A. Stamkart.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Zij ABC (Fig. 120) de bedoelde driehoek, waarin de tophoek ACB door de lijn CD is middendoorgedeeld. Laat dan gegeven zijn *Inh. Drieh.* ACD $= a$, *Inh. Drieh.* BCD $= b$, AB $= c$, en stellen wij AC $= x$, BC $= y$ en *hoek* ACB $= \phi$, zoo hebben wij, volgens bekende formulen,

$$\tfrac{1}{2}xy \; Sin.\; \phi = Inh.\; Drieh.\; ABC = a + b$$

en

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \; Cos.\; \phi,$$

waaruit volgt

$$Sin.\; \phi = \frac{2(a+b)}{xy}$$

en

$$Cos.\; \phi = \frac{x^2+y^2-c^2}{2xy};$$

. . . . . (1)

nemen wij nu de som van de vierkanten dezer waarden, dan komt er

$$1 = \frac{4\,(a+b)^2}{x^2y^2} + \frac{(x^2+y^2-c^2)^2}{4x^2y^2},$$

dat is $4x^2y^2 = 16\,(a+b)^2 + (x^2+y^2-c^2)^2$,

of na ontwikkeling

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2(x^2+y^2) + 16(a+b)^2 + c^4 = 0 \quad . \quad (2)$$

Daar de driehoeken ACD en BCD eenen gelijken hoek $\frac{1}{2}\phi$ hebben, staan hunne inhouden tot elkander als de producten van de zijden om dien gelijken hoek; alzoo is

$$a : b = AC \times CD : BC \times CD = AC : BC = x : y,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{b}{a}\,x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

brengen wij nu deze waarde voor y in (2) over, zoo verkrijgen wij, na vermenigvuldiging met a^4,

$$a^4x^4 - 2a^2b^2x^4 + b^4x^4 - 2c^2(a^4x^2 + a^2b^2x^2) + 16a^4(a+b)^2 + a^4c^4 = 0,$$

d. i. $(a^2-b^2)^2\,x^4 - 2a^2c^2\,(a^2+b^2)x^2 + 16a^4\,(a+b)^2 + a^4c^4 = 0,$

Digitized by Google

of $x^4 - 2\frac{a^2c^2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}x^2 + \frac{16a^4(a+b)^2+a^4c^4}{(a^2-b^2)^2} = 0.$

Uit de laatste vergelijking wordt nu op de gewone wijze gevonden

$$x^2 = \frac{a^2(a^2+b^2)c^2 \pm 2a^2\sqrt{\{a^2b^2c^4 - 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2\}}}{(a^2-b^2)^2};$$

dus is

$$x = \frac{a}{a^2-b^2}\sqrt{\{(a^2+b^2)c^2 \pm 2\sqrt{[a^2b^2c^4 \cdot 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2]}\}},$$

en volgens (3)

$$y = \frac{b}{a^2-b^2}\sqrt{\{(a^2+b^2)c^2 \pm 2\sqrt{[a^2b^2c^4 \cdot 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2]}\}}. \quad \ldots(4)$$

De beide laatste waarden kan men herleiden tot

$$x = a\sqrt{\frac{16(a+b)^2+c^4}{(a^2+b^2)c^2 \mp 2\sqrt{\{a^2b^2c^4 - 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2\}}}},$$

en

$$y = b\sqrt{\frac{16(a+b)^2+c^4}{(a^2+b^2)c^2 \mp 2\sqrt{\{a^2b^2c^4 - 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2\}}}}; \quad \ldots(5)$$

door dezelve in de eerste der vergelijkingen (1) over te brengen, vindt men dan nog

$$Sin.\phi = \frac{2(a+b)}{ab} \times \frac{(a^2+b^2)c^2 \mp 2\sqrt{\{a^2b^2c^4 - 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2\}}}{16(a+b)^2+c^4} \quad (6)$$

Stelt men $b = a$, dan vindt men door (5) en (6), de onderste teekens gebruikende,

$$x = y = \frac{1}{2c}\sqrt{(64a^2 + c^4)}$$

en

$$Sin.\phi = \frac{16ac^2}{64a^4 + c^4},$$

zoo als voor dit geval ook onmiddellijk zou gevonden worden.

Blijkens de vierkantsvergelijking, waaruit de waarden van x^2 gevonden zijn, hebben die beide waarden eene positieve som en een positief product. Zijn dus die waarden bestaanbaar, dan zijn zij ook zeker positief. Tot de bestaanbaarheid des voorstels wordt dus alleen gevorderd, dat $\sqrt{\{a^2b^2c^4 - 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2\}}$ bestaanbaar zij, en hiertoe moet men in het algemeen hebben

$$a^2b^2c^4 > 4(a+b)^2(a^2-b^2)^2;$$

Digitized by Google

stellende dat $a > b$ is, volgt hieruit

$$abc^2 > 2(a+b)(a^2-b^2)$$

en $$c > \sqrt{\frac{2(a+b)(a^2-b^2)}{ab}},$$

of wel $$c > (a+b)\sqrt{\frac{2(a-b)}{ab}}.$$

Is deze voorwaarde vervuld, dan blijkt uit de dubbele waarden, voor x en y gevonden, dat er in het algemeen twee driehoeken zijn, die aan het voorstel beantwoorden. Is echter $c = (a+b)\sqrt{\frac{2(a-b)}{ab}}$ gegeven, dan wordt de wortelgrootheid, die in de waarde van x^2 voorkomt, nul; alsdan is er slechts één driehoek die aan het gevraagde voldoet, en voor dezen is dan

$$x = \frac{ac\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2-b^2} \quad \text{en} \quad y = \frac{bc\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Aanmerking *van* J. S. Speijer. De beschouwing der meetkunstige plaatsen geeft een geschikt middel aan de hand, om den driehoek uit de gegevens te construeren. Immers a en b gegeven zijnde, zal men gemakkelijk op AB (Fig. 121) en haar verlengde de punten D en D′ zoodanig kunnen bepalen, dat AD : BD $=$ AD′ : BD′ $= a : b$ zij. Omdat nu de opstaande zijden des driehoeks in dezelfde verhouding tot elkander moeten staan, zoo is de omtrek van den cirkel, op DD′ als middellijn beschreven, eene meetkunstige plaats, waarop de top van den driehoek moet liggen. Trekken wij verder loodregt op AB eene lijn AE, van zoodanige lengte dat $AE = \frac{2a}{AD}$ zij, dan is eene lijn EF, door E evenwijdig met AB getrokken, de meetkunstige plaats van de toppen aller driehoeken, die op AD staan en den inhoud a hebben. De snijpunten C en C′ van de lijn EF met den cirkel, bepalen dan de beide driehoeken, die aan het voorstel beantwoorden.

Indien EF den cirkel raakt, is er slechts één driehoek; en dit zal plaats hebben wanneer $c = (a+b)\sqrt{\frac{2(a-b)}{ab}}$ is. Heeft c eene kleinere waarde, dan snijdt of raakt de lijn EF den cirkel niet, en de gevraagde driehoek is onbestaanbaar.

Is $a = b$, dan gaat de cirkel over in eene loodlijn, uit het

Digitized by Google

midden van AB, op AB opgerigt; en de top wordt dan bepaald, door de snijding dezer loodlijn met de lijn EF. Deze snijding moet blijkbaar voor elke waarde van a plaats hebben, en zal altijd slechts één punt als den top des driehoeks kunnen aanwijzen.

CLXXII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert eenen driehoek te berekenen en te construeren, indien, behalve den tophoek, gegeven zijn: de inhouden der beide vierkanten, die in den driehoek zoodanig kunnen beschreven worden, dat eene zijde van elk vierkant langs eene opstaande zijde des driehoeks valt.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh, J. S. Speijer, W. C. Verseput, J. Bassan, *en* A. A. Moll.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laat *hoek* XCY $=\alpha$ (Fig. 122) de gegeven tophoek zijn; zij a^2 de gegeven inhoud van het in den gevraagden driehoek beschrevene vierkant welks zijde langs CX, b^2 die van het vierkant welks zijde langs CY moet vallen. Stel dan uit C eene loodlijn CM $= a$ op CX, en mede uit C eene loodlijn CN $= b$ op CY; trek uit M eene lijn evenwijdig met CX, en CY in D snijdende, neem daarop DE $=$ CM $= a$; trek evenzoo uit N eene lijn evenwijdig met CY, en CX in F snijdende, neem daarop FG $=$ CN $= b$; trek eindelijk door de punten G en E eene lijn AB, CX in A en CY in B ontmoetende, dan zal ABC de begeerde driehoek zijn. Want DD′ en EE′ loodregt op CX, zoomede FF′ en GG′ loodregt op CY getrokken hebbende, zijn blijkbaar D′DEE′ en F′FGG′ de gegevene vierkanten, op de voorgestelde wijze beschreven in den driehoek ABC, die den gegeven tophoek heeft.

Stellen wij AC $= x$ en BC $= y$, dan hebben wij, uit de gelijkvormige driehoeken ABC en EBD,

$$x : y = \text{DE} : \text{DB} = a : y - \text{CD};$$

of, omdat uit den driehoek CDD′ volgt $\text{CD} = \frac{\text{DD}'}{\text{Sin. DCD}'} = \frac{a}{\text{Sin. } \alpha}$,

$$x : y = a : y - \frac{a}{\text{Sin. } \alpha}.$$

Uit de gelijkvormige driehoeken ABC en AGF, volgt evenzoo

$$x : y = \text{AF} : \text{FG} = x - \text{CF} : b,$$

Digitized by Google

of, omdat $CF = \frac{FF'}{Sin.\ FCF'} = \frac{b}{Sin.\ \alpha}$ is,

$$x : y = x - \frac{b}{Sin.\ \alpha} : b.$$

De eerste evenredigheid geeft

$$y = \frac{ax}{(x - a)\ Sin.\ \alpha},$$

en volgens de tweede is

$$y = \frac{bx\ Sin.\ \alpha}{x\ Sin.\ \alpha - b};$$

deze waarden aan elkander gelijkstellende, verkrijgen wij de vergelijking $\frac{a}{(x - a)\ Sin.\ \alpha} = \frac{b\ Sin.\ \alpha}{x\ Sin.\ \alpha - b}$,

waaruit nu onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \frac{ab\ Cos.^2\ \alpha}{(a - b\ Sin.\ \alpha)\ Sin.\ \alpha} = \frac{ab\ Cos.\ \alpha\ Cot.\ \alpha}{a - b\ Sin.\ \alpha};$$

en deze waarde van x in eene der reeds voor y gevondene uitdrukkingen overbrengende, komt er

$$y = \frac{ab\ Cos.^2\ \alpha}{(b - a\ Sin.\ \alpha)\ Sin.\ \alpha} = \frac{ab\ Cos.\ \alpha\ Cot.\ \alpha}{b - a\ Sin.\ \alpha}.$$

De beide opstaande zijden des driehoeks hierdoor bekend wordende, kan men de bazis en de hoeken aan de bazis door de gewone regels der driehoeksmeting berekenen.

Aanmerkingen van J. Badon Ghijben. 1°. Is $\alpha = 90°$, zonder dat $a = b$ is, dan komt er $x = 0$ en $y = 0$. Plaatst men dus in eenen regten hoek XCY (Fig. 123) twee verschillende vierkanten CE en CG, waarvan het eene met de zijde CE' langs CX en het andere met de zijde CG' langs CY valt, zoo zal de lijn door E en G getrokken door het punt C gaan, en dus geenen driehoek van den hoek XCY afsnijden.

2°. Is $\alpha = 90°$ en $a = b$, dan komt er $x = \frac{0}{0}$ en $y = \frac{0}{0}$. Plaatst men dus in eenen regten hoek XCY (Fig. 124) twee gelijke vierkanten CE, waarvan het eene met de zijde CE' langs CX, het andere met de zijde CG' langs CY valt, zoo zal eene willekeurige lijn door E getrokken, van den hoek XCY den begeerden driehoek ABC afsnijden.

3°. Is $a = b$, zonder dat $\alpha = 90°$ is, dan komt er

Digitized by Google

$$x = y = \frac{a\,Cos.^2 \alpha}{(1 - Sin.\alpha)Sin.\alpha} = \frac{a(1 - Sin.^2 \alpha)}{(1 - Sin.\alpha)Sin.\alpha} = \frac{a(1 + Sin.\alpha)}{Sin.\alpha} = a + \frac{a}{Sin.\alpha},$$

zoodat in dit geval de driehoek gelijkbeenig is. Stelt men nu nog $\alpha = 90°$, dan heeft de deeling van teller en noemer, door $1 - Sin.\,\alpha$, de voorgaande onbepaaldheid doen verdwijnen en men vindt $x = y = 2a$, zoodat men dan, onder de onbepaalde driehoeken van Fig. 124, juist dien vindt, waarbij AC en BC gelijk aan de dubbele zijde des vierkants zijn.

4°. Zullen de vierkanten in den bedoelden zin in den driehoek beschreven kunnen worden, zoodat elk vierkant slechts één zijde langs eene zijde van den driehoek heeft, dan moet niet alleen α scherp gegeven zijn, maar bovendien moeten ook de hoeken A en B (Fig. 122) des driehoeks scherp wezen. Stellen wij dat $a > b$ is, dan is $(a - b)(1 + Sin.\,\alpha)$ positief; hieruit volgt

$$a + a\,Sin.\,\alpha > b + b\,Sin.\,\alpha,$$

dus

$$a - b\,Sin.\,\alpha > b - a\,Sin.\,\alpha,$$

en

$$\frac{ab\,Cos.\,\alpha\,Cot.\,\alpha}{a - b\,Sin.\,\alpha} < \frac{ab\,Cos.\,\alpha\,Cot.\,\alpha}{b - a\,Sin.\,\alpha},$$

of

$$x < y;$$

waaruit blijkt dat de hoek ABC over de zijde AC $= x$ zeker scherp is. Zal nu ook de hoek BAC scherp zijn, dan moet de loodlijn, uit B op CX neergelaten, haar voetpunt tusschen A en C hebben, dat is; men moet hebben

$$x > y\,Cos.\,\alpha;$$

hierin de waarden van x en y overbrengende, komt er

$$\frac{1}{a - b\,Sin.\,\alpha} > \frac{Cos.\,\alpha}{b - a\,Sin.\,\alpha},$$

waaruit volgt

$$a < \frac{1 + Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha}{Sin.\,\alpha + Cos.\,\alpha}\,b.$$

Om dus een eigenlijk antwoord op de vraag te bekomen, moeten de gegevens voldoen aan de voorwaarde, dat, zoo $a > b$ is, tevens $a < \frac{1 + Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha}{Sin.\,\alpha + Cos.\,\alpha}\,b$ zij.

CLXXIII. VOORSTEL.

Door J. BAESAN.

In een driehoek ABC (Fig. 125) *is een cirkel beschreven, en uit het middelpunt* M *van dezen zijn lijnen* MA, MB *en* MC

Digitized by Google

naar de hoekpunten getrokken, den omtrek des cirkels in de punten D, E *en* F *snijdende. Zoo nu de stukken* AD, BE *en* CF *der laatstgenoemde lijnen gegeven zijn, begeert men den driehoek te berekenen.*

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Spelijer, W. L. Ivanez, A. A. Moll *en* J. A. Stankart.

Oplossing van J. Bassan.

Zij gegeven AD $= a$, BE $= b$, CF $= c$; stellen wij den straal des cirkels gelijk x, *hoek* BAM $=$ *hoek* CAM $= \phi$ en *hoek* ABM $=$ *hoek* CBM $= \psi$, dan is *hoek* ACM $=$ *hoek* BCM $= 90° - (\phi + \psi)$. Trekken wij nu de straalen MG, MH en MI naar de raakpunten, dan volgt, uit de driehoeken AMI of AMH,

$$Sin.\,\phi = \frac{x}{x+a}, \text{ dus } Cos.\,\phi = \sqrt{(1 - Sin.^2\phi)} = \frac{\sqrt{(2ax + a^2)}}{x+a};$$

uit de driehoeken BMI of BMG, is evenzoo

$$Sin.\,\psi = \frac{x}{x+b}, \text{ dus } Cos.\,\psi = \sqrt{(1 - Sin.^2\psi)} = \frac{\sqrt{(2bx + b^2)}}{x+b};$$

en uit de driehoeken CMG of CMH hebben wij

$$Sin.\{90° - (\phi + \psi)\} = \frac{x}{x+c} \text{ of } Cos.\,(\phi + \psi) = \frac{x}{x+c}.$$

De laatste vergelijking ontwikkelende, verkrijgen wij

$$Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi - Sin.\,\phi\ Sin.\,\psi = \frac{x}{x+c},$$

en hierin de bovenstaande waarden der sinussen en cosinussen van ϕ en ψ overbrengende, komt er

$$\frac{\sqrt{(2ax + a^2)}\,\sqrt{(2bx + b^2)}}{(x+a)\,(x+b)} - \frac{x^2}{(x+a)\,(x+b)} = \frac{x}{x+c};$$

zoodat wij dan verder door achtervolgende herleidingen hebben:

$$(x+c)\sqrt{(2ax+a^2)}\,\sqrt{(2bx+b^2)} - x^2(x+c) = x(x+a)(x+b),$$

$$(x+c)\sqrt{(2ax+a^2)}\,\sqrt{(2bx+b^2)} = x(x+a)(x+b) + x^2(x+c),$$

$$(x+c)\sqrt{(2ax+a^2)}\,\sqrt{(2bx+b^2)} = 2x^3 + (a+b+c)x^2 + abx,$$

$$(x+c)^2(2ax+a^2)(2bx+b^2) = \{2x^2 + (a+b+c)x + abx\}^2,$$

en $4x^4 + 4(a+b+c)x^3 + (a+b+c)^2x^2 - 8abcx^2$

$$- 4abc(a+b+c)x - 2abc(ab+ac+bc)x - a^2b^2c^2 = 0.$$

Uit deze zesdemagtsvergelijking, wordt nu x gevonden, zoodra a, b en c in getallen gegeven zijn, waarna men voor de zijden des driehoeks heeft:

Digitized by Google

$$AB = AI + IB = \sqrt{(2ax + a^2)} + \sqrt{(2bx + b^2)};$$
$$AC = AH + CH = \sqrt{(2ax + a^2)} + \sqrt{(2cx + c^2)},$$
en $BC = BG + CG = \sqrt{(2bx + b^2)} + \sqrt{(2cx + c^2)}$.

Aanmerking. De gevondene zesdemagtsvergelijking kan niet meer dan éénen positieven wortel hebben, en zij heeft dien ook zeker. Is $a = b = c$, dan hebben wij

$$4x^6 + 12ax^5 + 9ax^4 - 6a^3x^3 - 12a^2x^2 - 6a^5x - a^6 = 0$$

of $(x-a)(4x^5 + 16ax^4 + 25a^2x^3 + 19a^3x^2 + 7a^4x + a^5) = 0$; dus is dan $x = a$; $AB = AC = BC = 2a\sqrt{3}$, en de driehoek is gelijkzijdig.

CLXXIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

Uit eenig punt P (Fig. 126) *van de zijde* AB *eens regelmatigen vijfhoeks* ABCDE, *zijn twee lijnen getrokken naar de beide opvolgende hoekpunten* C *en* D. *Indien nu deze lijnen gegeven zijn, begeert men de zijde des vijfhoeks te berekenen.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Bassan, J. S. Speijer, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh *en* J. A. Stankart.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij $PD = a$, $PC = b$, $BC = CD = x$, *hoek* $BPC = \phi$ en zij gemakshalve $36^\circ = \alpha$; indien wij dan den diagonaal CE trekken, is *hoek* $PCE = \phi$, *hoek* $ECD = \alpha$ en dus *hoek* $PCD = \phi + \alpha$. Voorts is *hoek* $PBC = 3\alpha$, terwijl $3\alpha = 180^\circ - 2\alpha$, en dus $Sin.\ PBC = Sin.\ 2\alpha$ is.

Uit den driehoek PBC volgt vooreerst

$$BC : PC = Sin.\ BPC : Sin.\ PBC,$$

of $$x : b = Sin.\ \phi : Sin.\ 2\alpha; \quad \ldots \ldots (1)$$

en uit den driehoek PCD volgt verder

$$PD^2 = PC^2 + CD^2 - 2PC \times CD\ Cos.\ PCD,$$

of $$a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\ Cos.\ (\phi + \alpha) \quad \ldots \ldots (2)$$

Zonderen wij uit (1) de waarde van x af, namelijk

$$x = \frac{b\ Sin.\ \phi}{2\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \alpha}, \quad \ldots \ldots (3)$$

en brengen wij die waarde in (2) over, dan komt er na eenige herleiding

$$\frac{4\ (a^2 - b^2)\ Sin.^2\ \alpha\ Cos.^2\ \alpha}{b^2}$$
$$= Sin.^2\ \phi - 4\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \alpha\ Sin.\ \phi\ Cos.\ (\phi + \alpha) \quad \ldots (4)$$

Digitized by Google

Om uit deze vergelijking de waarde van ϕ te vinden, ontwikkelen wij $Cos.(\phi + \alpha)$; hierdoor gaat haar tweede lid over in $(1 + 4\ Sin.^2\alpha\ Cos.\alpha)\ Sin.^2\phi - 4\ Sin.\alpha\ Cos.^2\alpha\ Sin.\phi\ Cos.\phi$; maar omdat wij hebben

$Sin.\alpha = Sin.36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ en $Cos.\alpha = Cos.36° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$,

is $1+4\ Sin.^2\alpha Cos.\alpha = 1+\frac{1}{16}(10-2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1+\frac{1}{4}\sqrt{5}$

en $Cos.^2\alpha = \frac{1}{64}(1+\sqrt{5})^2 = \frac{1}{64}(16+8\sqrt{5}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{5}$,

dus $1 + 4\ Sin.^2\alpha\ Cos.\alpha = 4\ Cos.^2\alpha$;

hierdoor gaat dan het tweede lid der vergelijking (4) over in

$4\ Cos.^2\alpha\ Sin.^2\phi - 4\ Sin.\alpha\ Cos.^2\alpha\ Sin.\phi\ Cos.\phi$,

zoodat die vergelijking zelve, na deeling door $2\ Cos.^2\alpha$, wordt

$$\frac{2(a^2-b^2)\ Sin.^2\alpha}{b^2} = 2\ Cos.\alpha\ Sin.^2\phi - 2\ Sin.\alpha\ Sin.\phi\ Cos.\phi.$$

Nu is $2\ Sin.^2\phi = 1 - Cos.2\phi$ en $2\ Sin.\phi\ Cos.\phi = Sin.2\phi$; hierdoor verandert onze vergelijking in

$$\frac{2(a^2-b^2)\ Sin.^2\alpha}{b^2} = Cos.\alpha - Cos.2\phi\ Cos.\alpha - Sin.2\phi\ Sin.\alpha,$$

dat is $$\frac{2(a^2-b^2)\ Sin.^2\alpha}{b^2} = Cos.\alpha - Cos.(2\phi+\alpha),$$

en hieruit volgt dan

$$Cos.(2\phi+\alpha) = Cos.\alpha - \frac{2(a^2-b^2)\ Sin.^2\alpha}{b^2}, \quad . \quad . \quad (5)$$

waardoor nu dadelijk de hoek ϕ kan berekend worden; wordende dan verder de waarde van x door de vergelijking (3) bekend.

Substitueert men in (5) voor $Cos.\alpha$ en $Sin.\alpha$ hunne waarden $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ en $\frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, zoo verkrijgt men na herleiding

$$Cos.(2\phi - 36°) = \frac{1}{4}\left\{6 - \frac{a^2}{b^2}(5-\sqrt{5})\right\}. \quad . \quad . \quad (6)$$

Is $a = b$, dan komt er volgens (5) $Cos.(2\phi+\alpha) = Cos.\alpha$, dus $2\phi + \alpha = \alpha$ en $\phi = \alpha = 36°$; in dit geval ligt het punt P, in het hoekpunt A van den vijfhoek; terwijl dan de vergelijking (3) geeft $x = \frac{1}{4}\ a\ (-1+\sqrt{5})$.

Door het punt P over de zijde AB te verplaatsen, kan ϕ van 36° tot 72° veranderen; dus $2\phi + 36°$ van 36° tot 108°, en $Cos.(2\phi + 36°)$ van $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ tot $\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$. Om eene bestaanbare oplossing te verkrijgen, moet dus de waarde (6) tusschen de laatstgenoemde grenzen vallen; dat is wij moeten hebben

Digitized by Google

$1+\sqrt{5} > 6-\frac{a^2}{b^2}(5-\sqrt{5})$ en $1-\sqrt{5} < \beta-\frac{a^2}{b^2}(5-\sqrt{5})$;

deze voorwaarden kunnen wij achtervolgens herleiden tot

$$\frac{a^2}{b^2}(5-\sqrt{5}) > 5-\sqrt{5} \text{ en } \frac{a^2}{b^2}(5-\sqrt{5}) < 5+\sqrt{5},$$

$$\frac{a^2}{b^2} > 1 \text{ en } \frac{a^2}{b^2} < \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})^2}{20},$$

$$a > b \text{ en } a < \tfrac{1}{2}b(1+\sqrt{5});$$

voldoen de gegevene lijnen a en b aan deze voorwaarden niet, dan laat het vraagstuk geene eigenlijke oplossing toe.

CLXXV. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal te vinden van $\frac{\partial . Nep.\ Log.\ x}{\sqrt{(2-x^2)}}$.

Oplossr *door* J. Bassan, W. L. Ivanch, J. S. Spelijer, en W. C. Verschuut:

Oplossing *van* J. Bassan.

De te vinden integraal y noemende, hebben wij, omdat $\partial . Nep.\ Log.\ x = \frac{\partial x}{x}$ is,

$$y = \int \frac{\partial x}{x\sqrt{(2-x^2)}}.$$

Stellen wij nu $x = Sin.\ \phi . \sqrt{2}$,

dus $\partial x = Cos.\ \phi \partial \phi . \sqrt{2}$,

dan wordt $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial \phi}{Sin.\ \phi}$,

dat is (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.*, § 244)

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ Nep.\ Log.\ Tang.\ \tfrac{1}{2}\phi + C.$$

Maar dewijl $Sin.\ \phi = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$ en dus $Cos.\ \phi = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2x^2)}$ is, hebben wij, volgens eene bekende goniometrische formule,

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}\phi = \frac{1 - Cos.\ \phi}{Sin.\ \phi} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{(4-2x^2)}}{\frac{1}{2}x\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2 - \sqrt{(4-2x^2)}}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(2-x^2)}}{x},$$

Digitized by Google

en hierdoor vinden wij dan ten laatste

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Nep.\, Log.\, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(2 - x^2)}}{x} + C.$$

CLXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De integraal te vinden van $\partial\phi\, \sqrt{(Tang.\, \phi + Sec.\, \phi)}$;

OPGELOST *door* W. C. VERSLUYS, J. BASSAN, W. L. IVANGH, W. VAN HAARST, Jr. *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* W. C. VERSLUYS.

In de goniometrie wordt bewezen dat $Tang.\, \phi + Sec.\, \phi = Tang.\, (45° + \frac{1}{2}\phi)$ is. Stellen wij nu

$$Tang.\, (45° + \tfrac{1}{2}\phi) = x^2,$$

dan is $45 + \frac{1}{2}\phi = Boog\, Tang.\, x^2$,

waaruit door differentiatie volgt

$$\tfrac{1}{2}\partial\phi = \frac{\partial . x^2}{1 + (x^2)^2}$$

of

$$\partial\phi = \frac{4x\partial x}{1 + x^4}.$$

en hierdoor wordt dan

$$\int \partial\phi\, \sqrt{(Tang.\, \phi + Sec.\, \phi)} = \frac{4x^2\partial x}{1 + x^4}.$$

Door de bekende leerwijze voor het verdeelen van gebrokens, vinden wij $\frac{4x^2}{1 + x^4} = \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$, en derhalve is

$$\int \partial\phi\, \sqrt{(Tang.\, \phi + Sec.\, \phi)} = (\sqrt{2})\left\{\int \frac{x\partial x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \int \frac{x\partial x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right\}.$$

In de *Diff. en Int. Rek.* van I. R. SCHMIDT, § 181, vinden wij de waarde van $\int \frac{Bx\partial x}{a + bx + cx^2}$; hierin $B = 1$, $a = 1$, $c = 1$ en $b = \pm\sqrt{2}$ stellende, komt er

$$\int \frac{x\partial x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} = Nep.Log.\sqrt{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} + Boog\, Tang.\frac{x\sqrt{2}}{2 - x\sqrt{2}}$$

en

$$\int \frac{x\partial x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} = Nep.Log.\sqrt{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} - Boog\, Tang.\frac{x\sqrt{2}}{2 + x\sqrt{2}},$$

Digitized by Google

waarvan het verschil is

$$Nep.\,Log.\sqrt{\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}}+Boog\,Tang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

of $$Nep.\,Log.\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{\sqrt{(x^4+1)}}+Boog\,Tang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Alzoo hebben wij

$$\int\partial\phi\,\sqrt{(Tang.\,\phi+Sec.\,\phi)}=$$

$$(\sqrt{2})\left\{Nep.\,Log.\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{\sqrt{(x^4+1)}}+Boog\,Tang.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right\},$$

of, zoo wij voor x wederom hare waarde stellen,

$$\int\partial\phi\,\sqrt{(Tang.\,\phi+Sec.\,\phi)}=$$

$$(\sqrt{2})\,Nep.\,Log.\frac{Tang.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)-\sqrt{2}\,Tang.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)+1}{Sec.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)}$$

$$+(\sqrt{2})\,Boog\,Tang.\frac{\sqrt{2}\,Tang.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)}{1-Tang.\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\phi)}+C.$$

CLXXVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornez.

De integraal te vinden van $\dfrac{(2-Sin.\,2\,\phi)\,\partial\phi}{2\,Cos.^2\,\phi+Sin.\,2\,\phi}$.

Opgelost *door* S. Dik, Cornez., J. Bassan, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh en J. S. Spruijer.

I. Oplossing van S. Dik, Cornez.

De te vinden integraal y noemende, hebben wij

$$\partial y=\frac{(2-Sin.\,2\phi)\,\partial\phi}{2\,Cos.^2\,\phi+Sin.2\,\phi}=\frac{(2-2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi)\,\partial\phi}{2\,Cos.^2\,\phi+2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi}$$

$$=\frac{(1-Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi)\,\partial\phi}{Cos.^2\,\phi+Sin.\,\phi\,Cos.\phi}=\frac{Sec.^2\,\phi-Tang.\,\phi}{1+Tang.\,\phi}\,\partial\phi$$

$$=\frac{Tang.^2\,\phi-Tang.\,\phi+1}{Tang.\,\phi+1}\,\partial\phi;$$

stellen wij nu $Tang.\,\phi=x$,

dus $\phi=Boog\,Tang.\,x$,

en $\partial\phi=\dfrac{\partial x}{x^2+1}$;

dan wordt $\partial y=\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)\,(x^2+1)}\,\partial x.$

Door splitsing van het hier voorkomende gebroken, vinden wij

Digitized by Google

$$\frac{x^3 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+1},$$

dus $\partial y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial x}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x\partial x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial x}{x^2+1}$,

waarvan elke term onmiddellijk kan geïntegreerd worden. Alzoo is

$y = \frac{1}{2}\,Nep.Log.(x+1) - \frac{1}{4}\,Nep.Log.(x^2+1) - \frac{1}{2}\,Boog\,Tang.x + C$

$= Nep.Log.\sqrt{(x+1)^2} - Nep.Log.\sqrt[4]{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\,Boog\,Tang.x + C$

$$= Nep.Log.\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \tfrac{1}{2}\,Boog\,Tang.x + C,$$

of, voor x wederom hare waarde $Tang.\,\phi$ substituerende,

$$y = Nep.\,Log.\sqrt{\frac{(1+Tang.\phi)^2}{Sec.\,\phi}} - \tfrac{1}{2}\,\phi + C.$$

II. Oplossing van J. Bassan.

Wij hebben door achtervolgende herleidingen:

$$\partial y = \frac{(2 - Sin.2\phi)\partial\phi}{2Cos.^2\phi + Sin.2\phi} = \frac{(1 - Sin.\phi Cos.\phi)\partial\phi}{Cos.^2\phi + Sin.\phi Cos.\phi} = \frac{(1 - Sin.\phi Cos.\phi)\partial\phi}{Cos.\phi(Cos.\phi + Sin.\phi)}$$

$$= \frac{(Sin.^2\phi + Cos.^2\phi + Sin.\phi\,Cos.\phi - 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi)\partial\phi}{Cos.\,\phi\,(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi)}$$

$$= \frac{(Sin.^2\phi + Sin.\phi\,Cos.\phi)\partial\phi}{Cos.\,\phi\,(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi)} + \frac{(Cos.^2\phi - 2\,Sin.\phi\,Cos.\phi)\partial\phi}{Cos.\,\phi\,(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi)}$$

$$= \frac{Sin.\phi\partial\phi}{Cos.\,\phi} + \frac{(Cos.\phi - 2Sin.\phi)\partial\phi}{Cos.\,\phi + Sin.\,\phi} = \frac{Sin.\phi\partial\phi}{Cos.\,\phi} + \frac{(2Cos.\phi - 4Sin.\phi)\partial\phi}{2(Cos.\phi + Sin.\phi)}$$

$$= \frac{Sin.\,\phi\partial\phi}{Cos\,\phi} + \frac{(3\,Cos.\phi - 3\,Sin.\phi)\partial\phi - (Cos.\phi + Sin.\phi)\partial\phi}{2(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi)}$$

$$= \frac{Sin.\,\phi\partial\phi}{Cos.\,\phi} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{(Cos.\phi - Sin.\phi)\partial\phi}{Cos.\phi + Sin.\,\phi} - \tfrac{1}{2}\partial\phi$$

$$= -\frac{\partial\,.\,Cos.\,\phi}{Cos.\,\phi} + \tfrac{3}{2}\frac{\partial\,.(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi)}{Cos.\,\phi + Sin.\,\phi} - \tfrac{1}{2}\partial\phi;$$

en alsnu term voor term integrerende, komt er terstond

$$y = -Nep.\,Log.\,Cos.\,\phi + \tfrac{3}{2}\,Nep.\,Log.(Cos.\,\phi + Sin.\,\phi) - \tfrac{1}{2}\phi + C.$$

Deze uitkomst verschilt van die der voorgaande oplossing slechts in gedaante.

CLXXVIII. Vraagstuk.

Door J. Radon Gheijsen.

Men vraagt eene tamelijk eenvoudige constructie, tot het beschrijven van een cirkel, die door een gegeven punt gaat en bovendien eenen gegeven cirkel en eene gegevene regte lijn raakt.

Digitized by Google

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Spruyt en W. L. Ivanoff.

I. Oplossing van J. Badon Ghijben.

Zij (Fig. 127) P het gegeven punt, AB de gegevene lijn en CDE de gegeven cirkel; trek dan door het middelpunt M van dezen eene middellijn CD, wier verlengde de lijn AB ergens in F regthoekig snijdt. Trek CP, en breng door de punten P, D en F eenen cirkel, die CP ergens in Q snijdt. Beschrijf verder, volgens de daarvoor bekende constructie, eenen cirkel, die door de punten P en Q gaande de lijn AB ergens in S raakt, dan zal deze cirkel ook den cirkel CDE ergens in R raken en dus de begeerde zijn.

Om de juistheid dezer constructie te bewijzen, stellen wij, dat N het middelpunt is van den gezochten cirkel, die door P gaande de lijn AB in S, en den cirkel CDE in R raakt, dan liggen vooreerst de punten C, R en S in eene regte lijn; omdat *hoek* CMR = *hoek* RNS; CM = MR en RN = NS *is*, terwijl MR en NR eene regte lijn uitmaken. Trekken wij dus de lijnen CRS en RD, dan zijn de regthoekige driehoeken CRD en CFS gelijkvormig; derhalve CD : CR = CS : CF of CD × CF = CR × CS. Zij voorts Q het snijpunt van den gezochten cirkel met de lijn CP, zoo is, volgens de bekende eigenschappen des cirkels, CR × CS = CP × CQ; en deze vergelijking, met de voorgaande verbonden, geeft dan CD × CF = CP × CQ. Uit de laatste vergelijking volgt nu, dat de punten P, D en F op een zelfden cirkelomtrek liggen met het snijpunt van den gezochten cirkel en de lijn CP; het laatstgenoemde punt is dus daar, waar de lijn CP door den cirkel PDF gesneden wordt. Dit punt Q gevonden zijnde, is alzoo de begeerde cirkel door de punten P en Q van zijnen omtrek, benevens door de voorwaarde dat hij de lijn AB moet raken, volkomen bepaald.

Door de twee punten P en Q kan men, zoo als bekend is, twee cirkels brengen, die de lijn AB raken; deze zullen beide den cirkel CDE raken en dus aan de vraag voldoen.

Eene lijn van D naar P getrokken, en een cirkel door P, C en F gebragt, zullen almede een snijpunt Q′ opleveren, zoodanig dat de beide cirkels die men door P en Q′ rakende aan de lijn AB brengt, almede den cirkel CDE zullen raken. Er kunnen alzoo vier cirkels gevonden worden, die aan de vraag voldoen; immers indien geene bijzondere omstandigheden sommige dezer cirkels mogten uitsluiten.

Digitized by Google

H. Oplossing van J. Badon Ghijsen.

Even als in de vorige oplossing de lijn CDF (Fig. 128) door M loodregt op AB getrokken hebbende, trekken wij nog CP en DP; uit het punt P stellen wij eene loodlijn op DP, terwijl wij CP verlengen. Laten deze loodlijn en dat verlengde de lijn AB respectievelijk in G en H ontmoeten. Construeeren wij nu eene middenevenredige tusschen HF en HG, maken wij HS gelijk aan die middenevenredige, en beschrijven wij, volgens de daarvoor bekende constructie, eenen cirkel, die door het punt P gaande de lijn AB in S raakt, dan zal deze cirkel ook den cirkel CDE ergens in R raken, en dus de begeerde zijn.

Om de juistheid dezer constructie te bewijzen, onderstellen wij dat PRS de begeerde cirkel is, die den gegeven cirkel in R, en de lijn AB in S raakt, dan ligt het snijpunt Q van CP en den gezochten cirkel, zoo als in de voorgaande oplossing is bewezen, op den omtrek van eenen cirkel die door P, D en F gaat. Maar op dezen omtrek ligt ook het punt G, omdat twee over elkander staande hoeken van den vierhoek PDFG regt zijn, zoodat de vijf punten P, Q, D, F en G op eenen cirkelomtrek liggen. Zoo wij ons dan dien cirkel in de figuur voorstellen, volgt daaruit $HQ \times HP = HF \times HG$; maar ook is $HQ \times HP = HS^2$, derhalve $HF \times HG = HS^2$, waaruit blijkt dat HS middenevenredig tusschen HF en HG moet genomen worden.

De lijn HS aan de andere zijde van H op AB uitzettende, vindt men een ander punt S' op de lijn AB, zoodanig dat een cirkel, die door P gaat, en AB in S' raakt, ook den cirkel CDE zal raken. Hierdoor zijn voorcerst twee antwoorden op de vraag gevonden.

In plaats van uit P eene loodlijn op DP te stellen en CP te verlengen, konden wij ook eene loodlijn op CP stellen en DP verlengen; verder als boven te werk gaande, zouden wij dan nog twee cirkels vinden, die aan de vraag voldeden.

De constructie die wij hier opgaven, kan op de volgende wijze analytisch gevonden worden.

Nemen wij AB (Fig. 128) tot as der x, CF tot as der y aan, dan kunnen wij voor de vergelijking van den begeerden cirkel stellen $(x - A)^2 + (y - B)^2 = B^2$, ... (1) waardoor de voorwaarde dat hij de lijn AB moet raken vervuld is; stellende B zijnen straal, en A niet alleen de abscis van het

Digitized by Google

middelpunt, maar ook den afstand van het raakpunt tot den oorsprong voor.

Stellen wij MF $= n$ en MC $=$ MD $= r$, dan is de vergelijking van den gegeven cirkel

$$x^2 + (y - n)^2 = r^2; \quad \ldots\ldots (2)$$

de voorwaarde dat deze cirkel door den begeerden geraakt wordt, is deze, dat de afstand der middelpunten gelijk moet zijn aan de som of het verschil der stralen naar gelang de raking uit- of inwendig is; dit geeft dus

$$A^2 + (B - n)^2 = (B \pm r)^2; \quad \ldots\ldots (3)$$

het bovenste teeken voor de uitwendige, het onderste voor de inwendige raking geldende.

Laten voorts p en q de coördinaten van het gegeven punt P zijn, dan hebben wij, omdat de begeerde cirkel door het punt P moet gaan, volgens (1)

$$(p - A)^2 + (q - B)^2 = B^2; \quad \ldots\ldots (4)$$

de gevraagde cirkel zal dus bepaald zijn, zoodra wij A en B uit de vergelijkingen (3) en (4) opgelost hebben.

Uit (3) is

$$A^2 + B^2 - 2Bn + n^2 = B^2 \pm 2Br + r^2,$$

of
$$2B = \frac{A^2 + n^2 - r^2}{n \pm r};$$

en uit (4) is

$$p^2 - 2Ap + A^2 + q^2 - 2Bq = 0,$$

of
$$2B = \frac{A^2 - 2Ap + p^2 + q^2}{q};$$

deze waarden van $2B$ aan elkander gelijkstellende, komt er

$$q\,(A^2 + n^2 - r^2) = (n \pm r)\,(A^2 - 2Ap + p^2 + q^2),$$

dat is

$$A^2\{(n \pm r) - q\} - 2Ap(n \pm r) + (n \pm r)\{p^2 + q^2 - q(n \mp r)\} = 0,$$

of
$$A^2 - 2A\frac{p(n \pm r)}{(n \pm r) - q} + \frac{n \pm r}{(n \pm r) - q}\{p^2 + q^2 - q(n \mp r)\} = 0; \quad (5)$$

alvorens deze vergelijking op te lossen, zullen wij haar door het invoeren van andere gegevens vereenvoudigen.

De vergelijkingen der lijnen uit C en D door P getrokken, zijn

$$y - q = -\frac{(n \pm r) - q}{p}(x - p). \quad \ldots\ldots (6)$$

Digitized by Google

en dus die van de lijnen, door P loodregt op deze getrokken;

$$y - q = \frac{p}{(n \pm r) - q}(x - p); \ldots . \quad (7)$$

door in deze vergelijkingen $y = 0$ te stellen, vinden wij voor de afstanden, waarop de snijpunten dezer lijnen met de lijn AB zich van den oorsprong bevinden, ten aanzien der lijnen (6)

$$k = \frac{p(n \pm r)}{(n \pm r) - q} \ldots \ldots \quad (8)$$

en ten aanzien der lijnen (7)

$$l = \frac{p^2 + q^2 - q(n \pm r)}{p} \ldots \ldots \quad (9)$$

Gebruiken wij nu in (9) het tegengestelde teeken van hetgeen wij in (8) gebruiken, dan gaat de vergelijking (5) over in

$$A^2 - 2Ak + kl = 0,$$

waaruit wij dan vinden

$$A = k \pm \sqrt{k(k - l)} \ldots \ldots \quad (10)$$

Voor deze vergelijking kunnen wij schrijven

$$(A - k)^2 = k(k - l);$$

in dezelve beteekent k den afstand van het punt, waar AB door de verlengde lijn CP of DP gesneden wordt, tot aan den oorsprong; $k - l$ den afstand van hetzelfde punt tot aan het punt, waar de lijn AB door de loodlijn, uit P op DP of CP gesteld, gesneden wordt; en $A - k$ of $k - A$ den afstand van het eerstgenoemde punt tot het raakpunt op de lijn AB. Van deze drie afstanden is dan, blijkens de gevondene vergelijking, de laatstgenoemde middenevenredig tusschen de beide eerstgenoemden, en het is deze eigenschap, die wij tot onze constructie hebben gebezigd.

CLXXIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Men vraagt almede eene tamelijk eenvoudige constructie, tot het beschrijven van een cirkel, die door een gegeven punt gaat, en bovendien twee gegevene cirkels raakt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Spelijer en W. L. Ivanon.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten CDE en AFB (Fig. 129) de gegeven cirkels zijn, respectievelijk M en L tot middelpunten hebbende, en zij P het gegeven punt. Trek dan aan de beide cirkels eene gemeenschap-

Digitized by Google

pelijke raaklijn AE, en door het middelpunt M van den eenen cirkel eene middellijn CD, wier verlengde door het middelpunt L van den anderen cirkel gaande diens omtrek ergens in F, en de gemeenschappelijke raaklijn AE ergens in G snijdt. Trek GP, en breng door de punten P, D en F eenen cirkel, GP ergens in Q snijdende. Verleng de koorde die de laatste cirkel met den cirkel CDE gemeen heeft, tot zij GP in H ontmoet, en trek uit H eene lijn die den cirkel CDE ergens in R raakt. Dan zal een cirkel door de punten P, Q en R gebragt de begeerde zijn.

Om de juistheid dezer constructie te bewijzen, zullen wij onderstellen, dat N het middelpunt is van den begeerden cirkel, die door het punt P gaat, den cirkel CDE in R en den cirkel AFB in S rakende.

Nu liggen vooreerst de punten R en S met het punt G op eene zelfde regte lijn; want de lijnen NM en NL trekkende, die respectievelijk door R en S gaan, zoo is LM de bazis van eenen driehoek LMN, waarin op de opstaande zijden gelijke stukken NR en NS zijn genomen, en de lijn die door de alzoo verkregene punten R en S wordt getrokken, snijdt de verlengde bazis in een punt, welks afstanden tot de uiteinden der bazis evenredig zijn met de overgeblevene deelen MR en LS der opstaande zijden. Dit blijkt b. v. uit Fig. 130, waar wij blijkbaar hebben XM : XL = MM' : LL' = MR × *Sin.* MRM' : LS × *Sin.* LSL' = MR : LS. Maar ook GM en GL zijn evenredig met ME en LA, dat is met MR en LS; bijgevolg zal de lijn door R en S getrokken, LM juist in G snijden.

Voorts zijn de driehoeken GDR en GSF gelijkvormig, omdat zij in G eenen hoek gemeen hebben, en bovendien *hoek* GDR = *hoek* GSF is. Zij namelijk S' het punt waar de lijn GRS den cirkelomtrek AFB ten tweedemale snijdt, dan is LS' evenwijdig met MR, omdat GM : GL = ME : LA = MR : LS' is, terwijl bovendien de hoeken GRM en GS'L van dezelfde soort zijn; derhalve is *hoek* GMR = *hoek* GLS'; maar de hoek GDR in den cirkel CDE door de helft van den boog CR gemeten wordende, zoo is *hoek* GDR = ½ *hoek* GMR, en de hoek GSF in den cirkel AFB door de helft van den boog FSS' gemeten wordende, is *hoek* GSF = ½ *hoek* GLS'; derhalve *hoek* GDR = *hoek* GSF.

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken GDR en GSF volgt nu

Digitized by Google

GD : GR = GS : GF, of GD × GF = GR × GS; maar in den cirkel PQRS is GR × GS = GP × GQ; dus ook GD × GF = GP × GQ, en bij gevolg liggen de vier punten D, F, P en Q op den omtrek van een cirkel. Het snijpunt van de lijn GP met den cirkel door D, F en P gebragt, leert dus een punt Q van den begeerden cirkel kennen.

Zij verder H het punt, waar de lijn GP ontmoet wordt door de gemeenschappelijke raaklijn, in R aan de beide cirkels PQR en CDE getrokken; en zij I het punt, waar de cirkel CDE gesneden wordt door eene lijn van H naar D loopende, dan is zoowel $HR^2 = HP \times HQ$ als $HR^2 = HD \times HI$, en dus $HP \times HQ = HD \times HI$; hieruit volgt, dat de punten P, Q, D en I op den omtrek van een cirkel liggen, en dat dus de reede door P, Q en D gaande cirkel, den cirkel CDE in het punt I zoodanig zal snijden, dat het verlengde van DI door zijne snijding met GP het punt H zal doen kennen, van de gemeenschappelijke raaklijn der cirkels CDE en PQR. Derhalve zal de raaklijn uit H aan den cirkel CDE getrokken, het raakpunt R doen vinden, zoodat men dan van den begeerden cirkel behalve de punten P en Q ook nog het punt R kent.

Uit H kan men eene tweede raaklijn aan den cirkel CDE trekken; zoo men door het dan verkregene raakpunt R' en de punten P en Q eenen cirkel brengt, zal deze almede aan de vraag beantwoorden.

Trekt men aan de gegevene cirkels eene gemeenschappelijke raaklijn, die tusschen de beide cirkels ligt, dan zal deze de lijn LM in een punt G' snijden, dat men met P vereenigen kan; en zoo men dan verder eenen cirkel door de punten P, C en F brengt, zal deze de lijn G'P in een punt Q' snijden, en met den cirkel CDE eene koorde CI' gemeen hebben, wier verlengde de lijn G'P ergens in H' ontmoet. Van deze punten G', Q', I' en H' hetzelfde gebruik makende, dat wij boven van de punten G, Q, I en H maakten, zal men nog twee cirkels verkrijgen, die aan de vraag voldoen; zoodat er in het algemeen vier antwoorden kunnen gevonden worden.

Om de figuur niet te ingewikkeld te maken, hebben wij daarin echter slechts één antwoord geconstrueerd.

CLXXX. Vraagstuk.

Door G. F. W. Baehr.

Indien twee regte cirkelvormige kegels, die beide op het

Digitized by Google

horizontale vlak staan, gelijke hoogten hebben, is de horizontale projectie hunner gemeene doorsnede een cirkel. Men vraagt het bewijs daarvan.

Opgelost *door* G. F. W. Baehr, W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Speijer.

I. Oplossing *van* G. F. W. Baehr.

Wanneer men de beide kegelvlakken door horizontale vlakken snijdt, zullen de stralen der twee cirkelvormige doorsneden, met een zelfde horizontaal vlak, steeds tot elkander in reden staan als de stralen der grondvlakken. Beschrijft men met die stralen, uit de horizontale projectiën van de toppen der kegels als middelpunten, cirkelbogen, dan geven de doorsnijdingspunten dezer cirkelbogen twee punten van de horizontale projectie der gemeene doorsnede van de kegels. Ieder punt van deze kromme lijn heeft dus de eigenschap, dat zijne afstanden tot aan twee vaste punten (namelijk de horizontale projectiën der toppen) eene standvastige verhouding hebben, waaruit naar eene bekende meetkunstige waarheid volgt, dat die kromme een cirkel is, gaande door de snijpunten van de omtrekken der grondvlakken; terwijl een derde punt van dien cirkel gevonden wordt in het snijpunt van de lijn, die de middelpunten der grondvlakken vereenigt, met de lijn, die den hoek middendoordeelt, gevormd door de beide stralen, die in de grondvlakken naar een der snijpunten van hunne omtrekken getrokken worden.

II. Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laten a, b en c de coördinaten zijn van den top eens kegels, welks in 't horizontale vlak gelegene rigtlijn tot vergelijking heeft

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2, \quad \ldots \quad (1)$$

dan kunnen wij de vergelijkingen eener beschrijvende lijn diens kegels, omdat zij door het punt (a, b, c) gaat, voorstellen door

$$x - a = A(z - c) \text{ en } y - b = A'(z - c) \ldots (2)$$

Laten voorts p en q de coördinaten van eenig punt der rigtlijn zijn, dan moet de substitutie van $x = p$, $y = q$ en $z = 0$ aan de vergelijkingen (1) en (2) voldoen, waardoor wij hebben

$$(p - m)^2 + (q - n)^2 = r^2,$$

$$p - a = -Ac \quad \text{en} \quad q - b = -A'c;$$

en elimineren wij nu p en q uit deze drie vergelijkingen, zoo komt er

$$(a - m - Ac)^2 + (b - n - A'c)^2 = r^2, \quad \ldots \quad (3)$$

welke vergelijking dan de betrekking aanwijst, die er tusschen A en A′ moet bestaan, opdat de beschrijvende lijn (2) op de rigtlijn (1) ruste.

Digitized by Google

Elimineren wij voorts A en A′ tusschen de vergelijkingen (2) en (3), dan vinden wij onmiddellijk, voor de vergelijking van het oppervlak des kegels,

$$\left\{a - m - \frac{c(x-a)}{z-c}\right\}^2 + \left\{b - n - \frac{c(y-b)}{z-c}\right\}^2 = r^2; \quad (4)$$

dewijl echter de in het voorstel bedoelde kegel regt is, is $a = m$, en $b = n$, waardoor de vergelijking van zijn oppervlak wordt

$$c^2(x-a)^2 + c^2(y-b)^2 = r^2(z-c)^2. \quad (5)$$

Voor eenen tweeden dergelijken kegel, wiens hoogte gelijk aan den eersten, en dus mede c is, hebben wij de vergelijking

$$c^2(x-a_1)^2 + c^2(y-b_1)^2 = r_1^2(z-c)^2; \quad (6)$$

en elimineren wij nu z tusschen de vergelijkingen (5) en (6), hetgeen dadelijk geschieden kan door die vergelijkingen in elkander te deelen, dan verkrijgen wij, voor de vergelijking van de horizontale projectie der gemeene doorsnede onzer beide kegelvlakken;

$$\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} = \frac{r^2}{r_1^2},$$

of na herleiding

$$(r^2 - r_1^2)x^2 + (r^2 - r_1^2)y^2 - 2(r^2a_1 - r_1^2a)x - 2(r^2b_1 - r_1^2b) + r^2(a_1^2 + b_1^2) - r_1^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Daar nu in deze vergelijking, die van den tweeden graad is, x^2 en y^2 gelijke coëfficiënten hebben, terwijl zij geenen term met het product xy bevat, is de genoemde horizontale projectie een *cirkel*.

CLXXXI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

De horizontale en verticale doorgangen van een hellend vlak gegeven zijnde, begeert men de horizontale en verticale projectiën te construeren van een punt, dat in het hellende vlak ligt, en op onderling gelijke gegevene afstanden van de genoemde doorgangen verwijderd is.

Oplossingen *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jz. *en* J. S. Spruijt.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Zij OX (Fig. 131) de as van projectie en laten AA′ en AA″ de gegevene horizontale en verticale doorgangen van het hellende vlak zijn. Nemen wij dan op die doorgangen, van het punt A af, onderling gelijke stukken $AB' = AC''$; laten wij uit B′ en C″ loodlijnen B′B″ en C″C′ op de as OX neder, en trekken wij B′C′ en B″C″, dan zijn dit de projectiën van de basis eens gelijkbeenigen driehoeks, die AB′ en AC″ tot opstaande zijden heeft.

Digitized by Google

Deelen wij B'C' en B''C'' middendoor in D' en D'', dan zijn D' en D'' de projectiën van het midden der genoemde basis; en bijgevolg zijn, zoo wij verder uit A lijnen door D' en D'' trekken, deze lijnen AD' en AD'' de projectiën van de lijn, die den hoek der beide doorgangen AA' en AA'' middendoordeelt. Het gevraagde punt, dat in het hellende vlak op onderling gelijke afstanden van die beide doorgangen moet liggen, ligt dus blijkbaar in de lijn (AD', AD'').

Construeren wij verder den driehoek C'EC, waarvan C'E loodregt op AA', en C'C = C'C'' loodregt op C'E is; nemen wij, op de zijde EC van dien driehoek, EG gelijk aan den gegeven afstand, en trekken wij door G eene lijn H'I' evenwijdig met AA', dan bevat deze lijn de horizontale projectiën van al de in het hellende vlak gelegene punten, die op den gegeven afstand EG van den horizontalen doorgang verwijderd zijn. Want zoo wij ons verbeelden dat de driehoek C'EC om de lijn C'E draaijende opgehaagen wordt, tot dat hij loodregt op het horizontale vlak komt te staan, zal het punt G zich in het snijpunt G' van C'E en H'I' gaan projecteren, en werkelijk in het hellende vlak op den afstand EG van den doorgang AA' gekomen zijn.

Hieruit volgt, dat het snijpunt P', van AD' en H'I', de horizontale projectie van het gevraagde punt is, en dat deszelfs verticale projectie P'' gevonden wordt, zoo men uit P' eene lijn regthoekig door OX trekt, tot dat zij AD'' in P'' ontmoet.

Wij hadden EG ook op het verlengde van EC aan den anderen kant van E kunnen uitzetten; ook hadden wij, in plaats van den hoek A'AA'', den hoek kunnen middendoordeelen, dien AA' met met het verlengde van AA'' maakt. Hierdoor zouden wij in het geheel vier punten bekomen, die aan de vraag voldeden, en alleen van elkander verschilden, door dat zij aan verschillende zijden van eene of van beide de doorgangen gelegen waren.

CLXXXII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijsen.

Wanneer een punt in de as van projectie, en eenig ander punt in het verticale vlak, aangenomen zijn als hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek, waarvan het derde hoekpunt ergens in het horizontale vlak moet liggen, vraagt men de plaats van dat derde hoekpunt te construeren.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Spijker.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Zij (A', A'') het gegevene punt in de as van projectie OX

Digitized by Google

(Fig. 132), en (B′, B″) het gegevene punt in het verticale vlak; indien wij dan, uit A′ met A″B″ als straal, en uit B′ met B′A′ als straal, cirkelbogen beschrijven, zal het snijpunt C′ dezer cirkelbogen het begeerde punt zijn, dat in het horizontale vlak ligt en waarvan dus de verticale projectie C″ in de as OX valt.

Trekken wij namelijk B′C′ en B″C″, dan is de lijn (B′C′, B″C″) de hypothenusa eens regthoekigen driehoeks, waarvan B′C′ en B′B″ de regthoekszijden zijn; maar A″B″ is de schuine zijde van zulk een driehoek, die A′B′ en B′B″ tot regthoekszijden heeft, en daar nu door de constructie B′C′ = A′B′ is, is dan ook de lijn (B′C′, B″B″) van gelijke lengte als A″B″, terwijl mede A′C′ = A″B″ is. De punten (A′, A″), (B′, B″) en (C′, C″) zijn bijgevolg de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek.

Daar de cirkelbogen, uit A′ en B′ beschreven, elkander in twee punten snijden, zal er nog een tweede punt zijn, dat aan de vraag voldoet.

Indien de gegevene punten zoo gekozen waren, dat A′B′ $<$ $\frac{1}{2}$A″B″ en dus *hoek* B″A″X $>$ 60° was, zouden de cirkelbogen elkander niet snijden, en ook het begeerde punt onbestaanbaar zijn.

CLXXXIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Een icosaëdraal en een dodecaëdraal getal van denzelfden wortel te vinden, zoodanig, dat hun verschil gelijk is aan de derde magt van hunnen wortel.

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* H. G. Witlage.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien wij den wortel der begeerde getallen door x voorstellen, dan is (*)

het *dodecaëdraalgetal* $= \frac{1}{2}x(9x^2 - 9x + 2)$

en het *icosaëdraalgetal* $= \frac{1}{2}x(5x^2 - 5x + 2)$;

het verschil dier getallen is dus $\frac{1}{2}x(4x^2 - 4x)$ of $2x^3 - 2x^2$, zoodat wij volgens de opgaaf moeten hebben

$$2x^3 - 2x^2 = x^3;$$

en hieruit volgt $x^3 = 2x^2$,

of $x = 2$.

Alzoo zijn de begeerde getallen 20 en 12; namelijk 20 het dodecaëdraal- en 12 het icosaëdraalgetal.

(*) Zie Simon Panser, *Mathem. Rariteitkamer*, blz. 373.

Digitized by Google

CLXXXIV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Welke waarden moet men aan x en y geven, opdat de uitdrukking $x(2x+1)+y(2y+1)$ een vierkant, en te gelijker tijd de uitdrukking $2(x^2-y^2)+(x-y)$ eene derde magt worde?

Opgelost *door* J. S. Speijer, H. G. Witlage, W. van Haarst, Jr. *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij m de wortel van het vierkant, en n die van de derde magt, dan moeten wij hebben

$$x(2x+1)+y(2y+1)=m^2$$

en $$2(x^2-y^2)+(x-y)=n^3;$$

of wel $$2x^2+2y^2+x+y=m^2$$

en $$2x^2-2y^2+x-y=n^3.$$

De som en het verschil dezer beide vergelijkingen geeft

$4x^2+2x=m^2+n^3$ en $4y^2+2y=m^2-n^3$,

dat is

$(2x+\frac{1}{2})^2=m^2+n^3+\frac{1}{4}$ en $(2y+\frac{1}{2})^2=m^2-n^3+\frac{1}{4}$,

waaruit blijkt, dat $m^2+n^3+\frac{1}{4}$ en $m^2-n^3+\frac{1}{4}$ gelijktijdig vierkanten moeten wezen. Hiertoe stellen wij $n^3=m$, dan komt er

$$2x+\tfrac{1}{2}=m+\tfrac{1}{2} \text{ en } 2y+\tfrac{1}{2}=m-\tfrac{1}{2},$$

dus $x=\frac{1}{2}m$ en $y=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}$,

of $x=\frac{1}{2}n^3$ en $y=\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}$,

waarin men voor n een willekeurig getal kan nemen.

CLXXXV. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Wanneer één hoek van een bolvormigen driehoek gelijk aan de som der beide overige hoeken is, zal de boog, uit het hoekpunt van den eerstgenoemden hoek naar het midden van de overstaande zijde getrokken, gelijk aan de helft van die zijde zijn. Men vraagt naar het bewijs.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer en H. G. Witlage.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laat van den bolvormigen driehoek ABC (Fig. 133) gegeven zijn, dat *hoek* BAC = *hoek* ABC + *hoek* ACB is, dan zal men uit het punt A eenen boog AD eens grooten cirkels kunnen trekken, zoodanig dat

hoek BAD = *hoek* ABD en *hoek* CAD = *hoek* ACD

is. Maar uit deze gelijkheid van hoeken, volgt dan ook

Digitized by Google

$$BD = AD \text{ en } CD = AD,$$

en derhalve is $BD = CD = \frac{1}{2}BC,$

als ook $AD = \frac{1}{2}BC.$

Hieruit blijkt dat de getrokkene boog AD juist de boog is, die uit het hoekpunt A naar het midden der overstaande zijde BC loopt, en dat deze boog gelijk aan de helft van de zijde BC is.

Aanmerking. Bij de regtlijnige driehoeken heeft dezelfde eigenschap plaats, want dan is de driehoek regthoekig, terwijl de deellijn de straal des omgeschreven cirkels is.

CLXXXVI. Voorstel.

Door J. H. van Koten.

Drie geheele getallen te vinden, die de eigenschap hebben dat de som der beide kleinste, die van het kleinste en grootste, en die der beide grootste, eene harmonische reeks vormen.

Opgelost *door* J. S. Speijer, W. van Haaren, Jr., J. H. van Koten, H. Middelburg *en* J. B. Gebl.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat eene harmonische reeks van drie termen ook verkregen wordt, door de termen eener rekenkunstige reeks van drie termen twee aan twee met elkander te vermenigvuldigen, zoo stellen wij voor de harmonische reeks

$$p(p-q),\ (p-q)(p+q) \text{ en } p(p+q),$$

of $p^2 - pq,\ p^2 - q^2$ en $p^2 + pq.$

Stellen wij verder de drie getallen, zoo als zij naar orde van grootte op elkander volgen, door x; y en z voor, dan hebben wij de vergelijkingen:

$$x + y = p^2 - pq,$$
$$x + z = p^2 - q^2,$$

en

$$y + z = p^2 + pq;$$

de halve som dezer vergelijkingen geeft

$$x + y + z = \tfrac{1}{2}(3p^2 - q^2),$$

en hiervan elke vergelijking in het bijzonder aftrekkende, komt er:

$$x = \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2 - 2pq),$$
$$y = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2),$$
$$z = \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2 + 2pq).$$

Dewijl x, y en z geheele getallen moeten zijn, zal men p en q beide even of beide oneven moeten nemen; terwijl men, positieve getallen begeerende, bovendien zal moeten voldoen aan de voorwaarde $p^2 > q^2 + 2pq$, die achtervolgens kan herleid worden tot $2p^2 > (p+q)^2$, $p\sqrt{2} > p+q$, $p(-1+\sqrt{2}) > q$ en $p > q(1+\sqrt{2})$.

Digitized by Google

Neemt men $p = 3$ en $q = 1$, zoo vindt men voor de begeerde getallen 1, 5 en 7.

Neemt men $p = 8$ en $q = 2$, zoo verkrijgt men 14, 34 en 46. Enz.

CLXXXVII. Voorstel.

Door L. Horfnagel.

Van twee vergelijkingen $x^4 - ax^2 - b = 0$ en $y^2 - cy - d = 0$, *vormen* a, b, c en d *eene opklimmende rekenkunstige reeks, welker som* 18 *is. Indien men nu weet dat* $x + y = 8$ *is, begeert men daaruit deze vergelijkingen te vinden.*

Opgelost *door* H. Middelburg, J. S. Speijer, L. Horfnagel *en* J. B. Geel.

Oplossing *van* H. Middelburg.

De rekenkunstige reeks zij

$a = a$, $b = a + v$, $c = a + 2v$ en $d = a + 3v$,

dan is $4a + 6v = 18$,

en dus $v = 3 - \frac{2}{3}a$,

zoodat de reeks wordt

$a = a$, $b = 3 + \frac{1}{3}a$, $c = 6 - \frac{1}{3}a$ en $d = 9 - a$.

Deze waarden in de opgegevene vergelijkingen overbrengende, verkrijgt men

$$x^4 - ax^2 - \tfrac{1}{3}a - 3 = 0, \quad \ldots\ldots (1)$$

en $$y^2 + \tfrac{1}{3}ay - 6y + a - 9 = 0, \quad \ldots\ldots (2)$$

benevens $$x + y = 8 \quad \ldots\ldots (3)$$

Uit (1) volgt $$a = \frac{3x^4 - 9}{3x^2 + 1}, \quad \ldots\ldots (4)$$

en uit (3) $$y = 8 - x; \quad \ldots\ldots (5)$$

deze waarden in (2) substituerende, bekomt men, na behoorlijke herleiding,

$$x^5 - 14x^4 + 30x^3 - 22x^2 + 7x + 26 = 0,$$

uit welke vijfdemagtsvergelijking gevonden wordt

$$x = 2;$$

dus is volgens (5) $y = 6$,

volgens (4) $a = 3$,

en de reeks is:

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5 \quad \text{en} \quad d = 6;$$

zoodat de vergelijkingen zijn

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{en} \quad y^2 - 5y - 6 = 0,$$

waaraan door $x = 2$ en $y = 6$ voldaan wordt.

Digitized by Google

CLXXXVIII. Voorstel.

Door A. A. Moll.

Twee gelijke cirkels hebben hunne middelpunten buiten eenen grooteren cirkel, dien zij snijden. Zoo nu gegeven zijn de koorden, die de eerstgenoemde cirkels met den laatstgenoemden gemeen hebben, zoo mede de verschillen van de getallen graden der beide bogen, door de kleinste cirkels uit den grooten, en door den grooten uit de twee kleine cirkels gesneden, vraagt men hieruit de stralen der drie cirkels te berekenen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, A. A. Moll, W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij M (Fig. 134) het middelpunt van den grootsten cirkel, die gesneden wordt door twee onderling gelijke kleinere cirkels, hunne middelpunten in N en N′ hebbende. Laten AB en A′B′ de koorden zijn, die de kleine cirkels met den grooten gemeen hebben; vereenigen wij de uiteinden dezer koorden met de middelpunten, en stellen wij

$MA = MB = MA' = MB' = R$, $NA = NB = N'A' = N'B' = r$,

dan zijn R en r de te berekenen onbekenden, waartoe vooreerst gegeven zijn de koorden

$$AB = 2a \quad \text{en} \quad A'B' = 2b.$$

Stellen wij verder in graden:

boog ACB = *hoek* AMB = 2ϕ, *boog* ADB = *hoek* ANB = 2ψ,
boog A′C′B′ = *hoek* A′MB′ = $2\phi'$, *boog* A′D′B′ = *hoek* A′N′B′ = $2\psi'$;

dan hebben wij, uit de gelijkbeenige driehoeken AMB, ANB, A′MB′ en A′N′B′,

$$\left.\begin{aligned} Sin.\,\phi &= \frac{a}{R}, \quad Cos.\,\phi = \frac{\sqrt{(R^2 - a^2)}}{R}, \\ Sin.\,\psi &= \frac{a}{r}, \quad Cos.\,\psi = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{r}, \\ Sin.\,\phi' &= \frac{b}{R}, \quad Cos.\,\phi' = \frac{\sqrt{(R^2 - b^2)}}{R}, \\ Sin.\,\psi' &= \frac{b}{r}, \quad Cos.\,\psi' = \frac{\sqrt{(r^2 - b^2)}}{r}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Om nu door middel van deze waarden, de onbekenden R en r te berekenen, zullen wij, ten aanzien van de gegevene verschillen der bogen, twee verschillende gevallen onderstellen, waarvan het eerste het meest met de bewoordingen der opgave schijnt overeen te komen.

Digitized by Google

Eerste Geval.

Laat in graden gegeven zijn:

boog ACB — *boog* A'C'B' $= 2\alpha$, dus $\phi - \phi' = \alpha$,

en *boog* ADB — *boog* A'D'B' $= 2\beta$, dus $\psi - \psi' = \beta$,

zoo hebben wij onmiddellijk

$$Cos.\phi\ Cos.\phi' + Sin.\phi\ Sin.\phi' = Cos.\alpha,$$

en $$Cos.\psi\ Cos.\psi' + Sin.\psi\ Sin.\psi' = Cos.\beta.$$

Hierin de waarden (1) overbrengende, verkrijgen wij, na vermenigvuldiging met R^2 en r^2,

$$\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} + ab = R^2\ Cos.\alpha, \ldots (2)$$

en $$\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)} + ab = r^2\ Cos.\beta, \ldots (3)$$

zoodat nu de waarde van R uit (2), en die van r uit (3) kan gevonden worden.

Uit de vergelijking (2) kunnen wij achtervolgens afleiden:

$$\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} = R^2\ Cos.\alpha - ab,$$

$$(R^2 - a^2)(R^2 - b^2) = (R^2\ Cos.\alpha - ab)^2,$$

$$R^4 - (a^2 + b^2)R^2 = R^4\ Cos.^2\alpha - 2abR^2\ Cos.\alpha,$$

$$R^2 - (a^2 + b^2) = R^2\ Cos.^2\alpha - 2ab\ Cos.\alpha,$$

$$R^2\ Sin.^2\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\alpha,$$

en $$R = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\alpha)}}{Sin.\alpha}; \ldots . (4)$$

terwijl uit (3) even zoo afgeleid wordt

$$r = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\beta)}}{Sin.\beta}; \ldots . (5)$$

waardoor in dit geval de onbekende stralen in de gegevens uitgedrukt zijn.

Tweede Geval.

Laat in graden gegeven zijn:

boog ADB — *boog* ACB $= 2\alpha$, dus $\psi - \phi = \alpha$,

en *boog* A'D'B' — *boog* A'C'B' $= 2\beta$, dus $\psi' - \phi' = \beta$,

zoo hebben wij in dit geval

$$Cos.\psi\ Cos.\phi + Sin.\psi\ Sin.\phi = Cos.\alpha,$$

en $$Cos.\psi'\ Cos.\phi' + Sin.\psi'\ Sin.\phi' = Cos.\beta;$$

hierin weder de waarden (1) overbrengende, komt er, na vermenigvuldiging met Rr,

$$\sqrt{(R^2 - a^2)(r^2 - a^2)} + a^2 = Rr\ Cos.\alpha, \ldots (6)$$

en $$\sqrt{(R^2 - b^2)(r^2 - b^2)} + b^2 = Rr\ Cos.\beta, \ldots (7)$$

zoodat wij nu R en r hebben op te lossen uit de twee vergelijkingen (6) en (7), die elk op zich zelve deze beide onbekenden bevatten.

Digitized by Google

De vergelijkingen (6) en (7) gaan, door een dergelijke behandeling als waaraan wij zoo even de vergelijking (2) onderwierpen, over in $R^2r^2\,Sin.^2\alpha + 2a^2Rr\,Cos.\alpha = a^2(R^2+r^2)$ . . . (8)
en $R^2r^2\,Sin.^2\beta + 2b^2Rr\,Cos.\beta = b^2(R^2+r^2)$ . . . (9)
uit elk dezer vergelijkingen $R^2 + r^2$ afzonderende, komt er

$$R^2+r^2 = Rr\left\{\frac{Rr}{a^2}Sin.^2\alpha + 2Cos.\alpha\right\} = Rr\left\{\frac{Rr}{b^2}Sin.^2\beta + 2Cos.\beta\right\}; \quad (10)$$

derhalve is

$$\frac{Rr}{a^2}\,Sin.^2\alpha + 2\,Cos.\alpha = \frac{Rr}{b^2}\,Sin.^2\beta + 2\,Cos.\beta,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$Rr = \frac{2a^2b^2\,(Cos.\alpha - Cos.\beta)}{a^2\,Sin.^2\beta - b^2\,Sin.^2\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Voor deze waarde van Rr, vinden wij dadelijk

$$\frac{Rr}{a^2}\,Sin.^2\alpha + 2\,Cos.\alpha = \frac{2\,(a^2\,Cos.\alpha\,Sin.^2\beta - b^2\,Cos.\beta\,Sin.^2\alpha)}{a^2\,Sin.^2\beta - b^2\,Sin.^2\alpha},$$

en hierdoor kunnen wij in plaats van (10) schrijven

$$R^2+r^2 = \frac{4a^2b^2(a^2\,Cos.\alpha\,Sin.^2\beta - b^2\,Cos.\beta\,Sin.^2\alpha)(Cos.\alpha - Cos.\beta)}{(a^2\,Sin.^2\beta - b^2\,Sin.^2\alpha)^2}; \quad (12)$$

zoodat nu door (11) en (12) het product onzer beide onbekenden benevens de som van derzelver vierkanten bekend is, en derhalve die onbekenden zelven, door eene overbekende leerwijze, kunnen gevonden worden.

Stellen wij daartoe ter bekorting

$a^2b^2\,(Cos.\alpha - Cos.\beta) = m^4$ en $a^2\,Sin.^2\beta - b^2\,Sin.^2\alpha = n^2$,

dan is $R^2 + r^2 = \frac{4m^4}{n^4}(a^2\,Cos.\alpha\,Sin.^2\beta - b^2\,Cos.\beta\,Sin.^2\alpha)$

en $2Rr = \frac{4m^4}{n^2} = \frac{4m^4}{n^4}(a^2\,Sin.^2\beta - b^2\,Sin.^2\alpha)$;

hieruit volgt eerst door optelling en aftrekking:

$$(R+r)^2 = \frac{4m^4}{n^4}\left\{a^2\,Sin.^2\beta\,(Cos.\alpha+1) - b^2\,Sin.^2\alpha\,(Cos.\beta+1)\right\},$$

$$(R-r)^2 = \frac{4m^4}{n^4}\left\{a^2\,Sin.^2\beta\,(Cos.\alpha-1) - b^2\,Sin.^2\alpha\,(Cos.\beta-1)\right\};$$

vervolgens door worteltrekking:

$$R+r = \frac{2m^2}{n^2}\sqrt{\left\{a^2\,Sin.^2\beta\,(Cos.\alpha+1) - b^2\,Sin.^2\alpha\,(Cos.\beta+1)\right\}},$$

$$R-r = \frac{2m^2}{n^2}\sqrt{\left\{a^2\,Sin.^2\beta\,(Cos.\alpha-1) - b^2\,Sin.^2\alpha\,(Cos.\beta-1)\right\}};$$

Digitized by Google

en dus wederom door optelling en aftrekking:

$$R = \frac{m^2(p+q)}{n^2},\quad r = \frac{m^2(p-q)}{n^2}; \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

zijnde nogmaals ter bekorting gesteld

$$\sqrt{\{a^2\,Sin.^2\beta(Cos.\alpha+1) - b^2\,Sin.^2\alpha(Cos.\beta+1)\}} = p$$

en $$\sqrt{\{a^2\,Sin.^2\beta(Cos.\alpha-1) - b^2\,Sin.^2\alpha(Cos\,\beta-1)\}} = q.$$

Door middel der formulen (13) worden dan nu ook in dit geval de stralen der cirkels uit de gegevens berekend.

CLXXXIX. Voorstel.

Door A. A. Moll.

In een regthoekigen driehoek zijn, uit de hoekpunten der scherpe hoeken, naar de overstaande zijden lijnen getrokken, die de scherpe hoeken middendoordeelen. Zoo nu deze lijnen gegeven zijn, begeert men de zijden des driehoeks te bepalen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, H. Middelburg, J. S. Spreijer *en* A. A. Moll.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij de regthoekszijden door x en y, de hypothenusa door z, en de gegevene deellijnen door p en q voor, dan hebben wij, zoo als in het CLXX. Voorstel gevonden is,

$$p = x\sqrt{\frac{2z}{z+x}} \text{ en } q = y\sqrt{\frac{2z}{z+y}}; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl ook nog $$x^2 + y^2 = z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

is; zoodat wij naar behooren drie vergelijkingen tusschen de drie onbekenden x, y en z hebben.

Ten einde op eene gemakkelijke wijze tot de oplossing dezer vergelijkingen te geraken, stellen wij

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,z \text{ en } y = \frac{2u}{1+u^2}\,z, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waardoor aan de vergelijking (2) voldaan wordt, terwijl de vergelijkingen (1) overgaan in

$$p = \frac{1-u^2}{\sqrt{(1+u^2)}}\,z \text{ en } q = \frac{2u\sqrt{2}}{(1+u)\sqrt{(1+u^2)}}\,z; \quad (4)$$

deelen wij nu de beide laatste vergelijkingen in elkander, zoo verdwijnt z, en wij hebben

$$\frac{p}{q} = \frac{(1-u^2)(1+u)}{2u\sqrt{2}},$$

of na herleiding en rangschikking

$$u^3 + u^2 + \left(\frac{2p\sqrt{2}}{q} - 1\right)u - 1 = 0; \quad . \quad . \quad (5)$$

Digitized by Google

en uit deze derdemagtsvergelijking kan dan de waarde van u berekend worden, zoodra men voor de verhouding $\frac{p}{q}$ het gegevene getal gesubstitueerd heeft.

De waarde van u gevonden zijnde, kan s volgens (4) berekend worden door een der formulen

$$s = p\,\frac{\sqrt{(1+u^2)}}{1-u^2} \quad \text{of} \quad s = q\,\frac{(1+u)\sqrt{(1+u^2)}}{2u\sqrt{2}}, \qquad (6)$$

terwijl dan eindelijk x en y door de formulen (3) bekend worden.

Zij b. v. gegeven $p = 35$ en $q = \frac{480\sqrt{2}}{7}$, dan wordt (5)

$$u^3 + u^2 + \frac{1}{48}u - 1 = 0,$$

welke vergelijking men vinden zal dat eenen wortel $u = \frac{1}{4}$ heeft, terwijl de beide andere wortels onbestaanbaar zijn. Met deze waarde van u vindt men door (6) terstond $s = 100$, terwijl dan verder door (3) gevonden wordt $x = 28$ en $y = 96$.

CXC. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer men, op de zijden van eenen driehoek, buitenwaarts gelijkzijdige driehoeken beschrijft, en de toppen van deze vereenigt met de overstaande hoekpunten van den eersten driehoek, zullen deze drie vereenigingslijnen: 1°. aan elkander gelijk zijn, en 2°. elkander in een zelfde punt snijden. Men vraagt het bewijs hiervan.

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., H. Middelburg *en* J. S. Speijer.

Oplossing van J. Bassan.

Laat ABC (Fig. 135) de driehoek zijn, D, E en F de toppen der gelijkzijdige driehoeken op de zijden beschreven, dan hebben wij in de eerste plaats te bewijzen, dat de drie lijnen AD, BE en CF aan elkander gelijk zijn. Hiertoe hebben wij, in de driehoeken ABD en FBC,

AB = FB, BD = BC en *hoek* ABD = *hoek* FBC = *hoek* ABC + 60°;

die driehoeken zijn dus gelijk en gelijkvormig, en derhalve is AD = CF. Evenzoo blijkt de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken BAE en FAC, waarin dan ook BE = CF is; en bijgevolg is AD = BE = CF.

Om in de tweede plaats te bewijzen, dat deze drie lijnen elkander in een zelfde punt snijden, trekken wij aanvankelijk slechts de

Digitized by Google

twee lijnen AD en CF, en vereenigen wij haar snijpunt G met de punten B en E, waarna wij te bewijzen hebben, dat BG en GE eene regte lijn uitmaken. Uit de reeds aangetoonde gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken ABD en FBC volgt, dat *hoek* GDB = *hoek* GCB is; om den vierhoek BGCD kan derhalve een cirkel beschreven worden, en uit de beschouwing van dien cirkel volgt dan

hoek BGD = *hoek* BCD = 60°, en *hoek* CGD = *hoek* CBD = 60°; de hoek AGC, die het supplement van den hoek CGD is, is dus ook het supplement van den hoek AEC, waaruit weder volgt, dat ook om den vierhoek AGCE een cirkel beschreven kan worden, en de beschouwing van dien cirkel geeft dan

hoek EGC = *hoek* EAC = 60°.

De hoeken EGC, CGD en BGD allen hoeken van 60° zijnde, zoo is hunne som gelijk aan twee regte hoeken, en derhalve maken BG en GE eene regte lijn uit.

Aanmerking. De bewezene stelling geldt zoowel voor stomp- als scherphoekige driehoeken; bij de scherphoekige, en bij de stomphoekige wier stompe hoeken kleiner dan 120° zijn, valt het snijpunt G binnen den driehoek; bij stomphoekige driehoeken, die een grooteren stompen hoek hebben, valt het snijpunt G buiten den driehoek; en ingeval een der hoeken, b. v. de hoek ABC, juist gelijk aan 120° mogt wezen, zou het snijpunt G in het hoekpunt B van dien hoek vallen.

CXCI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer men, uit de hoekpunten A, B *en* C *van eenen driehoek* ABC (Fig. 136), *loodlijnen* AD, BE *en* CF *op de overstaande zijden nederlaat, en deze loodlijnen, die elkander in eenig punt* M *snijden, zoodanig tot in* G, H *en* I *verlengt, dat* DG = MD, EH = ME *en* FI = MF *zij, zullen de zes punten* A, B, C, G, H *en* I *op den omtrek van eenen cirkel liggen. Men vraagt naar het bewijs.*

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., H. Middelburg *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Bassan.

Na de lijnen BG en CG getrokken te hebben, merken wij op, dat de driehoeken AMF en CMD gelijkvormig zijn, omdat zij, behalve een regten hoek, ook nog in het punt M een overstaanden gelijken hoek hebben, en dat de driehoeken CMD en CGD gelijk

Digitized by Google

en gelijkvormig zijn, als beide regthoekig en uit gelijke zijden zamengesteld zijnde; hieruit volgt, dat de hoeken FAM en DCG ieder in het bijzonder gelijk aan den hoek MCD zijn, en dat derhalve *hoek* BAG = *hoek* BCG is. Om den vierhoek ABGC kan dus een cirkel beschreven worden, en het punt G ligt derhalve op den omtrek des cirkels, dien men door de punten A, B en C kan laten gaan.

Op gelijke wijze bewijst men dat het punt H, als ook dat het punt I, op den cirkelomtrek ligt die door A, B en C gaat; de zes punten A, B, C, G, H en I liggen dus op den omtrek van eenen cirkel.

Is de driehoek stomphoekig, zoodat het punt M buiten den driehoek valt, zoo als in Fig. 137, dan blijft de stelling en haar bewijs onveranderd; slechts zal men altijd de gelijke stukken DG en MD, EH en ME, FI en MF, aan weerszijden moeten nemen van de voetpunten D, E en F der loodlijnen.

Is de driehoek regthoekig, zoo als in Fig. 138, dan valt het punt M in het hoekpunt B van den regten hoek, en de gelijke stukken DG = MD en FI = MF der voorgaande beide figuren, worden dan nul. In dat geval zegt onze stelling dus eeniglijk, dat EH = BE loodregt op AC genomen zijnde, de vier punten A, B, C en H op een cirkelomtrek liggen.

CXCII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit de hoekpunten van een' driehoek, om welken een cirkel beschreven is, heeft men loodlijnen op de overstaande zijden nedergelaten, en tot aan den omtrek des cirkels verlengd. Indien nu gegeven zijn de stukken dezer lijnen, tusschen de zijden des driehoeks en den omtrek des cirkels begrepen, begeert men dien driehoek te bepalen.

Opgelost *door* H. Middelburg, W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer *en* J. Bassan.

Oplossing *van* H. Middelburg.

Indien ABC (Fig. 136) de bedoelde driehoek voorstelt, gaat de cirkel, om dien driehoek beschreven, door de punten G, H en I in het voorgaande voorstel aangewezen, en blijkens dat voorstel zijn dan hier DG = MD = a, EH = ME = b en FI = MF = c gegeven.

Stellen wij nu CM = x, dan is CD = $\sqrt{(x^2 - a^2)}$, CE = $\sqrt{(x^2 - b^2)}$ en CF = $x + c$.

Digitized by Google

Voorts hebben wij: uit de gelijkvormige driehoeken CMD en AMF,

$$MD : CM = MF : AM,$$

of $$a : x = c : AM,$$

dus $$AM = \frac{cx}{a};$$

uit de gelijkvormige driehoeken CME en BMF,

$$ME : CM = MF : BM,$$

of $$b : x = c : BM,$$

dus $$BM = \frac{cx}{b};$$

uit de gelijkvormige driehoeken CME en CAF,

$$CE : CF = CM : AC = ME : AF,$$

of $$\sqrt{(x^2 - b^2)} : x + c = x : AC = b : AF,$$

dus $$AF = \frac{b(x + c)}{\sqrt{(x^2 - b^2)}},$$

en $$AC = \frac{x(x + c)}{\sqrt{(x^2 - b^2)}}; \ldots\ldots (1)$$

uit de gelijkvormige driehoeken CMD en CBF,

$$CD : CF = CM : BC = MD : BF,$$

of $$\sqrt{(x^2 - a^2)} : x + c = x : BC = a : BF,$$

dus $$BF = \frac{a(x + c)}{\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

en $$BC = \frac{x(x + c)}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}; \ldots\ldots (2)$$

zijnde dan verder

$$AB = AF + BF = \frac{a(x + c)}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} + \frac{b(x + c)}{\sqrt{(x^2 - b^2)}}, \ldots (3)$$

zoodat wij nu de zijden des driehoeks allen in x hebben uitgedrukt, en het er nog slechts op aan komt, de waarde van x te vinden.

Hiertoe hebben wij, omdat BC en AG twee koorden in een zelfden cirkel zijn, $CD \times BD = DG \times AD$,

of $$CD \times \sqrt{(BM^2 - MD^2)} = DG \times (AM + MD),$$

dat is

$$\sqrt{(x^2 - a^2)} \times \sqrt{\left(\frac{c^2x^2}{b^2} - a^2\right)} = a \times \left(\frac{cx}{a} + a\right)$$

of $$\sqrt{(x^2 - a^2)}\,(c^2x^2 - a^2b^2) = b(cx + a^2);$$

deze vergelijking in het vierkant brengende en vervolgens herleidende, verkrijgen wij eindelijk de derdemagtsvergelijking

Digitized by Google

$$x^3 - \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{c^2}\,x - \frac{2a^2b^2}{c} = 0, \quad (4)$$

waaruit x berekend kan worden; terwijl dan verder de formulen (1), (2) en (3) ter berekening van de zijden des driehoeks dienen.

CXCIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Uit het middelpunt van den ingeschreven cirkel eens driehoeks, heeft men lijnen naar de hoekpunten getrokken, en vervolgens door elk hoekpunt eene loodlijn op de naar hetzelve getrokkene lijn gesteld. Zoo nu de zijden gegeven zijn van den driehoek, door de snijding der drie genoemde loodlijnen ontstaan, begeert men in deze gegevens den straal van den genoemden cirkel uit te drukken.

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. BASSAN *en* W. VAN HAARST, JR.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Zij ABC (Fig. 139) de bedoelde driehoek, M het middelpunt van zijn ingeschreven cirkel; indien wij dan eerst de lijnen MA, MB en MC, en daarna loodregt op deze de lijnen EF, FD en DE trekken, zijn $EF = a$, $FD = b$ en $DE = c$ de gegevens, waarin wij den straal $MG = x$ des genoemden cirkels moeten uitdrukken. Hiertoe trekken wij de lijnen MD, ME en MF.

De lijnen MA, MB en MC deelen de hoeken des driehoeks ABC middendoor, zoodat wij kunnen stellen:

$$\textit{hoek}\ BAM = \textit{hoek}\ CAM = \alpha,$$
$$\textit{hoek}\ ABM = \textit{hoek}\ CBM = \beta,$$
$$\textit{hoek}\ ACM = \textit{hoek}\ BCM = \gamma,$$

als wanneer wij dadelijk hebben

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°;$$

merken wij nu in de eerste plaats op, dat de vierhoek AMBF twee regte hoeken heeft en dat alzoo om dien vierhoek een cirkel kan beschreven worden, dan blijkt hiernit dat wij hebben

$$\textit{hoek}\ BFM = \textit{hoek}\ BAM = \alpha$$

en

$$\textit{hoek}\ AFM = \textit{hoek}\ ABM = \beta,$$

worden de uit de beschouwing der vierhoeken BMCD en CMAE op gelijke wijze afgeleid, dat men heeft:

$$\textit{hoek}\ CDM = \beta, \quad \textit{hoek}\ BDM = \gamma,$$
$$\textit{hoek}\ AEM = \gamma, \quad \textit{hoek}\ CEM = \alpha.$$

Daar dan *hoek* $FDM = \gamma$ het complement is van *hoek* $EFD = \alpha + \beta$, moeten DM en EF elkander regthoekig snijden,

Digitized by Google

maar MA is regthoekig op EF, en derhalve is DMA eene regte lijn; blijkende evenzoo dat ook EMB en FMC regte lijnen zijn.

Nu is, in de regthoekige driehoeken MCD en MCE, CD = MC *Cot.* β en EC = MC *Cot.* α, dus

$$c = \text{ED} = \text{EC} + \text{CD} = \text{MC}\,(\mathit{Cot.}\,\alpha + \mathit{Cot.}\,\beta)$$

en

$$\text{MC} = \frac{c}{\mathit{Cot.}\,\alpha + \mathit{Cot.}\,\beta},$$

of daar $\mathit{Cot.}\,\alpha + \mathit{Cot.}\,\beta = \dfrac{\mathit{Sin.}\,(\alpha + \beta)}{\mathit{Sin.}\,\alpha\ \mathit{Sin.}\,\beta}$ is,

$$\text{MC} = \frac{c\ \mathit{Sin.}\,\alpha\ \mathit{Sin.}\,\beta}{\mathit{Sin.}\,(\alpha + \beta)};$$

zoodat uit den regthoekigen driehoek MGC verder volgt

$$x = \text{MG} = \text{MC}\ \mathit{Sin.}\,\gamma = \frac{c\ \mathit{Sin.}\,\alpha\ \mathit{Sin.}\,\beta\ \mathit{Sin.}\,\gamma}{\mathit{Sin.}\,(\alpha + \beta)},$$

waarvoor wij, omdat $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ is, ook kunnen schrijven

$$x = \frac{c\ \mathit{Cos.}\,(\beta + \gamma)\ \mathit{Cos.}\,(\alpha + \gamma)\ \mathit{Cos.}\,(\alpha + \beta)}{\mathit{Sin.}\,(\alpha + \beta)}.$$

Daar nu verder uit den driehoek DEF, diens inhoud door I voorstellende, gevonden wordt:

$$\mathit{Cos.}\,(\beta + \gamma) = \mathit{Cos.}\,\text{EDF} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\mathit{Cos.}\,(\alpha + \gamma) = \mathit{Cos.}\,\text{DEF} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\mathit{Cos.}\,(\alpha + \beta) = \mathit{Cos.}\,\text{EFD} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

en

$$\mathit{Sin.}\,(\alpha + \beta) = \frac{2I}{ab},$$

zoo gaat hierdoor de vorige waarde van x over in

$$x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)\,(a^2 + c^2 - b^2)\,(b^2 + c^2 - a^2)}{16abc \times I};$$

hierin eindelijk voor I de bekende waarde substituerende, waardoor die inhoud in de zijden a, b en c uitgedrukt wordt, hebben wij ten laatste

$$x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)\,(a^2 + c^2 - b^2)\,(b^2 + c^2 - a^2)}{4abc\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}}.$$

Aanmerking. Uit de oplossing volgt, dat het middelpunt M van den cirkel, in den driehoek ABC beschreven, geen ander is dan het gemeenschappelijk snijpunt der loodlijnen, die in den driehoek DEF uit de hoekpunten op de overstaande zijden worden nedergelaten.

Digitized by Google

CXCIV. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal te vinden van $\partial\phi\sqrt{Sec.\phi}$.

Opgelost *door* J. S. Spruijer *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. S. Spruijer.

Indien wij $Sec.\phi = x^2$ stellen, is

$$\phi = Boog\ Sec.x^2,$$

dus $$\partial\phi = \frac{\partial.x^2}{x^2\sqrt{(x^4-1)}} = \frac{2\partial x}{x\sqrt{(x^4-1)}},$$

en $$\partial\phi\sqrt{Sec.\phi} = \frac{2\partial x}{\sqrt{(x^4-1)}} = \frac{2\partial x}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}.$$

Omdat echter door geenerlei kunstgreep te gelijker tijd $\sqrt{(x^2-1)}$ en $\sqrt{(x^2+1)}$ rationaal kunnen gemaakt worden, moet de gevraagde integraal door eene reeks benaderd worden.

Te dien einde stellen wij $x = \frac{1}{z}$ en dus $\partial x = -\frac{\partial z}{z^2}$; hierdoor wordt

$$\frac{2\partial x}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}} = \frac{-2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = -2\partial z(1-z^4)^{-\frac{1}{2}},$$

zijnde dan $z^2 = \frac{1}{x^2} = Cos.\phi$ en $z = \sqrt{Cos.\phi}$.

Ontwikkelen wij nu $(1-z^4)^{-\frac{1}{2}}$ door de binomiaalformule van Newton, dan komt er

$$\frac{-2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = -2\partial z\left\{1+\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{2}\frac{3}{4}z^8+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}z^{12}+ens.\right\};$$

dus zoo wij term voor term integreren

$$\int\frac{-2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = C-2z\left\{1+\frac{1}{2}\frac{z^4}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{z^8}{9}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{z^{12}}{13}+ens.\right\},$$

en zoo wij hierin voor z wederom hare waarde schrijven

$$\int\partial\phi\sqrt{Sec.\phi}$$

$$= C-(2\sqrt{Cos.\phi})\left\{1+\frac{1}{2}\frac{Cos.^2\phi}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{Cos.^4\phi}{9}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{Cos.^6\phi}{13}+ens.\right\};$$

welke reeks, omdat $Cos.\phi < 1$ is, altijd convergeert.

CXCV. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal te vinden van $\partial\phi\sqrt{(1+Sec.\phi)}$.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. Bassan *en* J. S. Spruijer.

Digitized by Google

Oplossing van W. L. Ivanen.

Omdat $1 + Sec.\phi = \frac{1 + Cos.\phi}{Cos.\phi}$ is, stellen wij

$Cos.\phi = x$, dus $\phi = Boog\,Cos.\,x$ en $\partial\phi = \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$,

dan wordt

$$\partial\phi\sqrt{(1+Sec.\phi)} = -\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}\sqrt{\frac{1+x}{x}} = -\frac{\partial x}{\sqrt{(x-x^2)}}.$$

Nemen wij nu de algemeen bekende formule

$$\int -\frac{\partial x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = Boog\left(Cos.\,Vers. = \frac{x}{r}\right),$$

en stellen wij daarin $r = \frac{1}{2}$, zoo vinden wij

$$\int -\frac{\partial x}{\sqrt{(x-x^2)}} = Boog\,(Cos.\,Vers. = 2x)$$

of, hierin voor x hare waarde $Cos.\phi$ stellende,

$$\int\partial\phi\sqrt{(1+Sec.\phi)} = Boog\,(Cos.\,Vers. = 2\,Cos.\phi) + C.$$

CXCVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De integraal te vinden van

$$\partial y = \frac{4x^4 + 6x^2\sqrt{(x^4-1)}}{40x^7 + (41x^5 - 25x)\sqrt{(x^4-1)} - 40x^3}\,\partial x.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Bassan, J. S. Spruijer *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Schrijven wij den opgegeven vorm vooreerst in de gedaante

$$\partial y = \frac{2x^4 + 3x^2\sqrt{(x^4-1)}}{40x^2(x^4-1) + (16x^4 + 25(x^4-1))\sqrt{(x^4-1)}}\cdot\frac{2\partial x}{x},$$

en stellen wij vervolgens

$x^2 = \frac{1}{Sin.\phi}$, dus $2\,Nep.\,Log.\,x = -\,Nep.\,Log.\,Sin.\,\phi$,

dan volgt daaruit

$$x^4 = \frac{1}{Sin.^2\phi},\quad \frac{2\partial x}{x} = -\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi}\,\partial\phi,$$

en

$$\sqrt{(x^4-1)} = \sqrt{\left\{\frac{1}{Sin.^2\phi} - 1\right\}} = \sqrt{\frac{1-Sin.^2\phi}{Sin.^2\phi}} = \frac{Cos.\phi}{Sin.\phi}.$$

Brengen wij al deze waarden in den te integreren vorm over, zoo komt er

Digitized by Google

$$\partial y = -\frac{\frac{2}{Sin.^2\phi} + \frac{3}{Sin.\phi}\cdot\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi}}{\frac{40}{Sin.\phi}\cdot\frac{Cos.^2\phi}{Sin.^2\phi} + \left\{\frac{16}{Sin.^2\phi} + \frac{25\,Cos.^2\phi}{Sin.^2\phi}\right\}\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi}}\cdot\frac{Cos.\phi}{Sin.\phi}\partial\phi,$$

of na herleiding $\partial y = -\frac{(2 + 3\,Cos.\phi)\,\partial\phi}{(4 + 5\,Cos.\phi)^2}$.

Nu vinden wij, volgens bekende formulen (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int.-Rek.*, § 254 en 255)

$$\int\frac{(2 + 3\,Cos.\phi)\,\partial\phi}{(4 + 5\,Cos.\phi)^2} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{Sin.\phi}{4 + 5\,Cos.\phi} + \frac{7}{9}\int\frac{\partial\phi}{4 + 5\,Cos.\phi},$$

$$\int\frac{\partial\phi}{4 + 5\,Cos.\phi} = \tfrac{1}{3}\,Nep.\,Log.\,\frac{5 + 4\,Cos.\phi + 3\,Sin.\phi}{4 + 5\,Cos.\phi},$$

en hierdoor wordt dan

$$y = \frac{2}{9}\cdot\frac{Sin.\phi}{4 + 5\,Cos.\phi} - \frac{7}{27}\,Nep.\,Log.\,\frac{5 + 4\,Cos.\phi + 3\,Sin.\phi}{4 + 5\,Cos.\phi}.$$

Uit $x^2 = \frac{1}{Sin.\phi}$ volgt $Sin.\phi = \frac{1}{x^2}$ en $Cos.\phi = \frac{1}{x^2}\sqrt{(x^4 - 1)}$,

en deze waarden in de reeds verkregene uitkomst overbrengende, komt er eindelijk

$$y = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4x^2 + 5\sqrt{(x^4 - 1)}} - \frac{7}{27}\,Nep.\,Log.\,\frac{5x^2 + 4\sqrt{(x^4 - 1)} + 3}{4x^2 + 5\sqrt{(x^4 - 1)}},$$

waarbij nu eene willekeurige standvastige kan gevoegd worden.

CXCVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De waarde van y te vinden, uit de vergelijking

$$2x\partial x = \frac{\{4ax\partial x - (x^2 + 1)^2\,\partial y\}\,\sqrt{(x^4 + 1)}}{(n\sqrt{2})(x^2 + 1)\,y}.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer *en* W. L. Ivanon.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stellen wij $x^2 = \frac{1 + s}{1 - s}$, dan is $2x\partial x = \frac{2\partial s}{(1 - s)^2}$,

$x^2 + 1 = \frac{2}{1 - s}$, $\sqrt{(x^4 + 1)} = \frac{(\sqrt{2})\sqrt{(1 + s^2)}}{1 - s}$, en al deze waarden in de opgegevene vergelijking overbrengende, komt er

$$\frac{2\partial s}{(1 - s)^2} = \frac{\left\{\frac{4a\partial s}{(1 - s)^2} - \frac{4\partial y}{(1 - s)^2}\right\}\times\frac{(\sqrt{2})\sqrt{(1 + s^2)}}{1 - s}}{\frac{2ny\sqrt{2}}{1 - s}},$$

Digitized by Google

of na herleiding

$$ny\partial z = (a\partial z - \partial y)\sqrt{(1 + z^2)}$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$\partial y + \frac{ny\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = a\partial z \ldots\ldots\ldots (1)$$

Deze vergelijking den vorm

$$\partial y + yP\partial z = Q\partial z$$

hebbende, waarvan de integraal is (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.*, § 285)

$$y = e^{-\int P\partial z} \int e^{\int P\partial z} Q\partial z,$$

zoo vinden wij hier, door $P = \frac{n}{\sqrt{(1+z^2)}}$ en $Q = a$ te nemen:

$$\int P\partial z = \int \frac{n\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = n \; Nep.Log.\{z + \sqrt{(1 + z^2)}\},$$

$$e^{\int P\partial z} = \{z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n,$$

$$e^{-\int P\partial z} = \frac{1}{\{z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n} = \{-z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n,$$

en $y = \{-z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n \int a\{z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n \partial z.$

Om nu nog de laatstaangewezene integratie uit te voeren, stellen wij $z + \sqrt{(1 + z^2)} = u$,

dan volgt daaruit

$$-z + \sqrt{(1 + z^2)} = \frac{1}{u}, \quad z = \frac{u^2 - 1}{2u} \quad \text{en} \quad \partial z = \frac{(u^2 + 1)\,\partial u}{2u^2},$$

en wij hebben alzoo

$$y = \frac{1}{u^n} \int au^n \frac{(u^2 + 1)\,\partial u}{2u^2} = \frac{1}{u^n}\left\{\tfrac{1}{2}\int au^n \partial u + \tfrac{1}{2}\int au^{n-2}\partial u\right\};$$

dat is na integratie

$$y = \frac{1}{u^n}\left\{C + \frac{au^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{au^{n-1}}{2(n-1)}\right\}$$

$$= \frac{C}{u^n} + \frac{a}{n^2 - 1}\left\{\tfrac{1}{2}(n-1)\,u + \tfrac{1}{2}(n+1)\,\frac{1}{u}\right\}$$

$$= \frac{C}{u^n} + \frac{a}{n^2 - 1}\left\{\tfrac{1}{2}n\left(u + \frac{1}{u}\right) - \tfrac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\};$$

of zoo wij voor u en $\frac{1}{u}$ wederom de waarden stellen

$$y = C\{-z + \sqrt{(1 + z^2)}\}^n + \frac{na\sqrt{(1 + z^2)}}{n^2 - 1} - \frac{az}{n^2 - 1}. \quad (2)$$

Digitized by Google

Deze uitkomst, namelijk de vergelijking (2) als integraal der vergelijking (1), vindt men, zonder de tot haar dienende bewerkingen of herleidingen, opgegeven in het 3de Voorb. van § 285 van het reeds genoemde werk van I. R. Schmidt.

Daar eindelijk uit $x^2 = \frac{1+z}{1-z}$ volgt, dat wij hebben

$$z = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{en} \quad \sqrt{(1+z^2)} = \frac{\sqrt{2}(x^4+1)}{x^2+1},$$

zoo verkrijgen wij, voor de begeerde waarde van y,

$$y = C\left\{\frac{-(x^2-1)+\sqrt{2}(x^4+1)}{x^2+1}\right\}^n + \frac{na\sqrt{2}(x^4+1)}{(n^2-1)(x^2+1)} - \frac{a(x^2-1)}{(n^2-1)(x^2+1)}$$

of wel

$$y = C\left\{\frac{1-x^2+\sqrt{2}(x^4+1)}{x^2+1}\right\}^n + \frac{a}{n^2-1}\left\{\frac{1-x^2+n\sqrt{2}(x^4+1)}{x^2+1}\right\}.$$

CXCVIII. Voorstel.

Door L. Cohen Stuart.

Aan eene kromme van den tweeden graad zijn twee raaklijnen getrokken, die elkander in eenig punt O *snijden, en vervolgens zijn de hoeken, door deze raaklijnen gevormd, middendoorgedeeld. De hiertoe dienende deellijnen snijden de lijn, die de raakpunten vereenigt, in twee punten. Wanneer men nu door een dezer punten eene willekeurige lijn trekt, die de kromme in twee punten* P *en* Q *snijdt, en vervolgens deze punten* P *en* Q *met het punt* O *vereenigt, worden de hoeken, waaronder de lijnen* OP *en* OQ *elkander snijden, door dezelfde lijnen middendoorgedeeld als de hoeken door de raaklijnen gevormd. Men vraagt het bewijs hiervan.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* L. Cohen Stuart.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten OM en OM' (Fig. 140) twee raaklijnen aan eene kromme van den tweeden graad zijn, die elkander in O snijden, dan staan de lijnen OX en OY, die de hoeken dezer raaklijnen middendoordeelen, regthoekig op elkander in O.

Deze raaklijnen OX en OY tot assen van onderling regthoekige coördinaten aannemende, stellen wij de vergelijking der kromme voor door

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad . \quad . \quad (1)$$

en die der raaklijnen OM en OM' respectievelijk door

$$y = mx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$y = -mx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Digitized by Google

dan is de voorwaarde vervuld, dat deze lijnen uit den oorsprong getrokken zijn en aan weerszijden gelijke hoeken met OX maken.

Stellen wij r en s voor de coördinaten van het punt, waarin de kromme door OM geraakt wordt, (in onze Figuur het punt R), dan hebben wij, volgens (1) en (2)

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0$$

en $$s = mr,$$

waaruit door verbinding volgt

$$(a + bm + cm^2)\, r^2 + (d + em)\, r + f = 0; \quad \ldots (4)$$

daar de lijn OM de kromme raakt, moet deze vergelijking twee gelijke waarden voor r geven, en dus moet haar voorste lid een volkomen vierkant zijn, waartoe wij moeten hebben

$$4f(a + bm + cm^2) = (d + em)^2, \quad \ldots (5)$$

en de vorige vergelijking, na met $4f$ vermenigvuldigd te zijn, gaat dan over in

$$(d + em)^2\, r^2 + 4f(d + em)\, r + 4f^2 = 0$$

of $$\{(d + em)\, r + 2f\}^2 = 0,$$

waaruit volgt $$r = -\frac{2f}{d + em},$$

en $$s = mr = -\frac{2fm}{d + em}. \quad \ldots (6)$$

Stellen wij r' en s' voor de coördinaten van het raakpunt der lijn OM′ met de kromme, (in de Figuur het punt R′), dan vinden wij, gelijkerwijs uit (1) en (3)

$$(a - bm + cm^2)\, r'^2 + (d - em)\, r' + f = 0, \quad \ldots (4')$$

$$4f(a - bm + cm^2) = (d - em)^2, \quad \ldots (5')$$

$$r' = -\frac{2f}{d - em},$$

$$s' = -mr' = +\frac{2fm}{d - em}. \quad \ldots (6')$$

Voor de vergelijking der lijn, die de beide raakpunten vereenigt, (in de Figuur de lijn RR′), hebben wij, omdat deze lijn door de punten (r, s) en (r', s') gaat,

$$y - s = \frac{s' - s}{r' - r}(x - r),$$

of door hierin de waarden (6) en (6′) te substitueren, na herleiding $$dx + ey + 2f = 0; \quad \ldots (7)$$

de snijpunten van deze lijn met de assen OX en OY (in de Figuur de punten S en S′) worden gevonden door in de vergelij-

Digitized by Google

king (7) beurtelings $y = 0$ en $x = 0$ te stellen. De afstanden, waarop deze snijpunten van den oorsprong gelegen zijn, h en k noemende, (zijnde dan in de Figuur $OS = h$ en $OS' = k$), hebben wij alzoo

$$h = -\frac{2f}{d} \quad \text{en} \quad k = -\frac{2f}{e} \ldots\ldots (8)$$

Trekken wij de vergelijkingen (5) en (5') van elkander af, dan vinden wij, na de komende vergelijking door $4m$ gedeeld te hebben, terstond $2bf = de$, ... (9) voor de voorwaarde, waaraan de coëfficiënten der vergelijking (1) moeten voldoen, opdat de beide raaklijnen, uit den oorsprong aan de kromme getrokken, hoeken vormen die door de coördinaten-assen middendoorgedeeld worden.

Beschouwen wij verder twee uit den oorsprong getrokkene snijlijnen, (in de Figuur door ON en ON' voorgesteld), die aan weerszijden gelijke hoeken met de as der x maken, dan kunnen wij voor de vergelijkingen dezer lijnen nemen

$$y = nx \quad \text{en} \quad y = -nx; \ldots\ldots (10)$$

laten voorts p en q de coördinaten van de snijpunten (in de Figuur P en P') der eerste lijn, p' en q' die van de snijpunten (in de Figuur Q en Q') der tweede lijn met de kromme zijn, dan geraken wij, op dezelfde wijze als waarop boven de vergelijking (4) gevonden is, tot de vergelijkingen

$$(a + bn + cn^2)\,p^2 + (d + en)\,p + f = 0$$

en $(a - bn + cn^2)\,p'^2 + (d - en)\,p' + f = 0$;

vermenigvuldigen wij nu de eerste vergelijking met p'^2, de tweede met p^2, en trekken wij ze daarna van elkander af, zoo komt er

$$2bnp^2p'^2 + dpp'(p' - p) + enpp'(p' + p) + f(p' + p)(p' - p) = 0,$$

of met f vermenigvuldigende en daarna volgens (9) $2bf = de$ substituerende,

$$denp^2p'^2 + dfpp'(p' - p) + efnpp'(p' + p) + f^2(p' + p)(p' - p) = 0;$$

en hiervoor kunnen wij schrijven

$$dpp'\{enpp' + f(p' - p)\} + f(p' + p)\{enpp' + f(p' - p)\} = 0$$

of $$\{dpp' + f(p' + p)\} \times \{enpp' + f(p' - p)\} = 0. \quad (11)$$

Aan deze vergelijking kan voldaan worden, door elk der beide factoren afzonderlijk gelijk nul te stellen; zij wijst dus twee verschillende betrekkingen aan, die er tusschen de abscissen p en p' van twee punten der kromme kunnen bestaan, opdat de lijnen,

Digitized by Google

uit deze punten naar den oorsprong loopende, aan weerszijden gelijke hoeken met de as der x maken.

De lijn, die door de snijpunten (p, q) en (p', q') gaat, heeft tot vergelijking

$$y - q = \frac{q' - q}{p' - p}(x - p),$$

of, omdat volgens (10) $q = np$ en $q' = -np'$ is,

$$y - np = -\frac{n(p' + p)}{p' - p}(x - p),$$

dat is na herleiding

$$nx(p' + p) + y(p' - p) - 2npp' = 0; \quad . \quad . \quad (12)$$

en deze vergelijking gaat, naar gelang wij den eersten of tweeden factor van (11) gelijk nul stellen, dat is naar gelang wij hebben

$$pp' = -\frac{f(p' + p)}{d} \text{ of } pp' = -\frac{f(p' - p)}{en},$$

over in

$$ndx(p' + p) + dy(p' - p) + 2nf(p' + p) = 0$$

of $$nex(p' + p) + ey(p' - p) + 2f(p' - p) = 0,$$

waarvoor wij door middel van de waarden (8) kunnen schrijven

$$nx(p' + p) + y(p' - p) = nh(p' + p), \quad . \quad . \quad (13)$$

en $$nx(p' + p) + y(p' - p) = k(p' - p) \quad . \quad . \quad (14)$$

Het nul stellen van den eenen of van den anderen factor der vergelijking (11), komt overeen met de omstandigheid, dat men de lijn (12) kan beschouwen als uit een bepaald snijpunt der kromme met ON, naar haar eene of andere snijpunt met ON' getrokken te zijn; de vergelijking (13) behoort dan tot de eene, de vergelijking (14) tot de andere vereenigingslijn; maar ook op ON kan men het eene of het andere snijpunt kiezen, en elk der vergelijkingen (13) en (14) behoort dus tot twee vereenigingslijnen, zoodat van de vier vereenigingslijnen (in de Figuur PQ, P'Q, PQ' en P'Q') elk paar dat niet uit eenzelfde snijpunt getrokken is, tot dezelfde vergelijking, hetzij (13), hetzij (14) behoort.

Aan de vergelijking (13) voldoet $y = 0$ en $x = h$; de vereenigingslijnen in die vergelijking begrepen, gaan dus door het punt, waar OX door de vereenigingslijn der raakpunten gesneden wordt; (dat is in de Figuur gaan PQ en P'Q' door het punt S).

Aan de vergelijking (14) voldoet $x = 0$ en $y = k$; de vereenigingslijnen in die vergelijking begrepen, gaan dus door het punt waar OY door de vereenigingslijn der raakpunten wordt

Digitized by Google

gesneden; (dat is in de Figuur gaan P'Q en PQ' door het punt S').

Uit het aangetoonde volgt nu bij omkeering onmiddellijk het begeerde bewijs. Want zoo b. v. eene lijn, uit S' getrokken, de kromme in P en Q' sneed, zonder dat *hoek* POX = *hoek* Q'OX en dus zóó dat b. v. *hoek* POX > *hoek* Q'OX ware, zou men uit O eene lijn OU kunnen trekken, zoodanig dat men had *hoek* UOX = *hoek* Q'OX; en U het snijpunt dezer lijn OU met de kromme verbeeldende, zou dan volgens het bewezene de lijn die U en Q' vereenigde door S' gaan. Maar dit is onmogelijk omdat de drie punten P, U en Q' der kromme niet in eene regte lijn kunnen liggen. Derhalve, indien eene lijn uit S' getrokken de kromme in P en Q' snijdt, zal *hoek* POX = *hoek* Q'OX zijn; dat is de hoeken der lijnen OP en OQ' worden door de lijnen OX en OY middendoorgedeeld.

Aanmerkingen. 1°. De vergelijking (7) kan ook gemakkelijk afgeleid worden, uit de algemeene vergelijking van de raaklijn aan eene kromme, namelijk uit

$$Y - y = \frac{\partial y}{\partial x}(X - x),$$

waarin x en y de coördinaten van het onbepaalde raakpunt verbeelden, terwijl X en Y die van een onbepaald punt der raaklijn zijn. Het differentiaal-quotiënt uit (1) opgemaakt hierin overbrengende, komt er, voor de vergelijking van de raaklijn aan de kromme van den tweeden graad,

$$Y - y = -\frac{2ax + by + d}{2cy + bx + e}(X - x),$$

dat is na herleiding

$$(2ax+by+d)X+(2cy+bx+e)Y-2ax^2-2bxy-2cy^2-dx-ey=0,$$

of zoo wij hierbij het dubbel van (1) optellen,

$$(2ax+by+d)X+(2cy+bx+e)Y+dx+ey+2f=0. \quad (15)$$

Gaat nu deze raaklijn door den oorsprong, dan moeten $X = 0$ en $Y = 0$ aan de vergelijking (15) voldoen; derhalve moeten de coördinaten van het raakpunt voldoen aan de vergelijking

$$dx + ey + 2f = 0,$$

dat is: het raakpunt moet gelegen zijn op de regte lijn, die tot de laatste vergelijking behoort. Deze voorwaarde geldt voor de beide raaklijnen, die men uit den oorsprong aan de kromme kan trekken; de laatste vergelijking behoort dus tot de regte lijn, die de beide raakpunten vereenigt.

Digitized by Google

2°. De coördinaten der genoemde raakpunten voldoen dan aan de beide vergelijkingen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

en

$$dx + ey = -2f,$$

waarvan de eerste, door middel van de tweede, verandert in

$$ax^2 + bxy + cy^2 = f.$$

Zoo wij nu de laatste vergelijking met $4f$ vermenigvuldigen, en vervolgens aftrekken van

$$(dx + ey)^2 = 4f^2,$$

komt er

$$(d^2 - 4af)x^2 + 2(de - 2bf)xy + (e^2 - 4cf)y^2 = 0,$$

welke vergelijking geene bestaanbare waarden voor x en y kan toelaten, tenzij men hebbe

$$(d^2 - 4af)(e^2 - 4cf) < (de - 2bf)^2. \ldots\ldots (16)$$

Deze vergelijking (16) behelst dus de voorwaarde, waaraan de coëfficiënten der vergelijking (1) moeten voldoen, opdat het mogelijk zij, uit den oorsprong raaklijnen aan de kromme te trekken.

Wanneer nu bovendien de hoeken dezer raaklijnen door de assen middendoorgedeeld worden, zal men volgens (9) hebben $de = 2bf$, waardoor de voorwaarde (16) verandert in

$$(d^2 - 4af)(e^2 - 4cf) < 0;$$

in dit geval moeten dus $d^2 - 4af$ en $e^2 - 4cf$, een van beide positief en een van beide negatief zijn.

3°. Brengen wij de raaklijn (15) door het punt welks coördinaten zijn 0 en k, (in de Figuur het punt S'), dan moeten de coördinaten van het raakpunt voldoen aan de vergelijking

$$(2cy + bx + e)k + dx + ey + 2f = 0;$$

hierin volgens (8) en (9) substituerende $k = -\frac{2f}{e}$ en $b = \frac{de}{2f}$, verandert die vergelijking in

$$\frac{(e^2 - 4cf)y}{e} = 0.$$

Hieruit en vervolgens uit (1) vindt men dan, voor de coördinaten van het raakpunt,

$$y = 0 \quad \text{en} \quad x = \frac{-d \pm \sqrt{(d^2 - 4af)}}{2a} \ldots (17)$$

Brengen wij echter de raaklijn (15) door het punt welks coördinaten zijn h en 0, (in de Figuur het punt S), dan hebben wij

$$(2ax + by + d)h + dx + ey + 2f = 0,$$

Digitized by Google

of, $h = -\frac{2f}{d}$ en $b = \frac{de}{2f}$ substituerende,

$$\frac{(d^2 - 4af)\,x}{e} = 0,$$

waaruit dan voor de coördinaten van het raakpunt volgt

$$x = 0 \quad \text{en} \quad y = \frac{-e \pm \sqrt{(e^2 - 4cf)}}{2c} \ldots (18)$$

Daar nu, zoo als wij aantoonden, $d^2 - 4af$ en $e^2 - 4cf$ niet gelijktijdig positief kunnen zijn, kunnen ook de waarden (17) en (18) niet gelijktijdig bestaanbaar zijn. Hieruit volgt vooreerst, dat de assen, die de hoeken der uit den oorsprong getrokkene raaklijnen middendoordeelen, niet beide door de kromme gesneden kunnen worden; en ten tweede, dat slechts uit een der beide punten $(0, k)$ en $(h, 0)$ raaklijnen aan de kromme kunnen getrokken worden; zullende de raakpunten dan gelegen zijn op de as der x, of op die der y, naargelang het punt, waaruit zij getrokken kunnen worden, op de as der y of op die der x ligt. (In onze Figuur, waar de kromme de as der x snijdt, kunnen dus uit het punt S', op de as der y gelegen, raaklijnen aan de kromme getrokken worden, die haar juist in hare snijpunten met OX zullen raken.)

CXCIX. Voorstel.

Door P. H. van der Meulen.

De vergelijking der kromme lijn te vinden, langs welke een ligchaam in gelijke tijden gelijke verticale hoogten doorvalt.

Opgelost *door* P. H. van der Meulen, W. van Haarst, Jr., E. Olivier, Dz. *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* P. H. van der Meulen.

Laten AB, BC, CD, enz., (Fig. 141) oneindig kleine deelen van eene verticale kromme lijn wezen, die gelijke verticale hoogten A'B', B'C', C'D' enz. hebben, respectievelijk hoeken ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, enz. met den horizon maken, en achtervolgens met de snelheden v_1, v_2, v_3, enz. in gelijke tijden door een daar langs vallend ligchaam worden doorloopen; dan worden, omdat men de beweging langs de oneindig kleine boogjes als eenparig mag aanmerken, die gelijke tijden uitgedrukt door

$$\frac{AB}{v_1} = \frac{BC}{v_2} = \frac{CD}{v_3} = \text{enz.};$$

maar nu is $AB = \frac{A'B'}{Sin.\,\phi_1}$, $BC = \frac{B'C'}{Sin.\,\phi_2}$, $CD = \frac{C'D'}{Sin.\,\phi_3}$, enz.;

Digitized by Google

dus hebben wij ook

$$\frac{A'B'}{v_1 \, Sin. \, \phi_1} = \frac{B'C'}{v_2 \, Sin. \, \phi_2} = \frac{C'D'}{v_3 \, Sin. \, \phi_3} = \text{enz.};$$

en hieruit volgt, omdat $A'B' = B'C' = C'D' =$ enz. is,

$$v_1 \, Sin. \, \phi_1 = v_2 \, Sin. \, \phi_2 = v_3 \, Sin. \, \phi_3 = \text{enz.}$$

In de gezochte kromme lijn moet dus, voor elk punt, het product van de snelheid met den sinus van den hellingshoek eene standvastige grootheid zijn. Derhalve zal, omdat de sinus van den hellingshoek ten hoogste de eenheid kan wezen, de snelheid het kleinst zijn in dat punt der kromme, waar de raaklijn verticaal loopt, en het ligchaam kan alzoo niet op de voorgestelde wijze langs de gezochte kromme vallen, zonder dat er eene aanvangssnelheid bestaat. Beschouwen wij den val als te beginnen in het punt der kromme waar de raaklijn verticaal loopt, dan is deze aanvangssnelheid juist de genoemde standvastige grootheid; haar door c voorstellende, hebben wij dan de vergelijking

$$v \, Sin. \, \phi = c,$$

v de snelheid en ϕ den hellingshoek in een willekeurig punt der kromme voorstellende.

Het genoemde beginpunt als oorsprong van onderling regthoekige coördinaten, en de verticaal door dat punt gaande als as der x aannemende, hebben wij, volgens de bekende wetten van den val der ligchamen langs verticale krommè lijnen,

$$v^2 = c^2 + 2gx,$$

door g de versnelling der zwaartekracht aangeduid wordende. Voorts is

$$Sin. \, \phi = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}},$$

en derhalve gaat de vergelijking $v \, Sin. \, \phi = c$ over in

$$\frac{\partial x \sqrt{(c^2 + 2gx)}}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = c,$$

waaruit volgt, door ∂y af te zonderen,

$$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{2gx}}{c},$$

en door vervolgens te integreren

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{x \sqrt{2gx}}{c};$$

behoevende bij deze integraal geene standvastige gevoegd te worden, omdat gelijktijdig x en y nul zijn.

De laatste vergelijking is nu die der begeerde kromme lijn, en kan herleid worden tot

Digitized by Google

$$y^2 = \frac{8g}{9c^2} x^3,$$

als wanneer zij onmiddellijk blijkt tot de cubische parabool te behooren.

Zij APB (Fig. 142) eene parabool, wier top naar boven gekeerd en wier as PQ verticaal geplaatst is, dan is de ontwondene dier kromme eene cubische parabool COD, wier beide takken, in het keerpunt O zamenkomende, aldaar de verticale as PQ raken. Is nu p de parameter der parabool APB, dan is $OP = \frac{1}{4}p$, en zoo wij O tot oorsprong en OQ tot as der x nemen, heeft de ontwondene COD tot vergelijking

$$y^2 = \frac{16}{27p} x^3;$$

nemen wij dus $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{c^2}{g}$ of $OP = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{g}$, dan gaat de vergelijking van COD juist in de bovengevondene over.

Hieruit blijkt dat een ligchaam langs eenen tak OD der cubische parabool, met eene snelheid $c = \sqrt{(3g \times OP)}$ uit het punt O moet beginnen te vallen, om in gelijke tijden gelijke verticale hoogten door te vallen.

Neemt men op de verticale as PQ een punt M, boven den top der parabool, zoodanig dat $PM = \frac{1}{3}OP$ en $MO = \frac{2}{3}OP$ of $OP = \frac{2}{3}MO$ is, dan is $c = \sqrt{(2g \times MO)}$. Valt dus een ligchaam, dat in het punt M in rust is, aanvankelijk langs de verticale lijn MO, om vervolgens zijnen val langs de kromme OD te vervolgen, dan heeft het in O juist de snelheid die het behoort te hebben, opdat de val langs OD aan de gestelde voorwaarde beantwoorde.

De tijd, dien het ligchaam besteedt, om van het punt O naar eenig ander punt van OD te vallen, wordt gevonden door de formule

$$\partial t = \frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{v} = \frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\sqrt{(c^2 + 2gx)}};$$

maar wij hadden boven reeds

$$\frac{\partial x \sqrt{(c^2 + 2gx)}}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = c,$$

dus is

$$\partial t = \frac{\partial x}{c}$$

of

$$t = \frac{x}{c} \text{ en } x = ct,$$

Digitized by Google

waarbij, zoo wij den tijd van het punt O beginnen te rekenen, geene standvastige behoeft gevoegd te worden. In elke tijdseenheid wordt dus eene verticale hoogte c langs de kromme afgelegd.

De tijd, dien het ligchaam noodig heeft om van M naar O te vallen is blijkbaar $\frac{c}{g}$; nemen wij dus $c = g$, dan is die tijd eene seconde, terwijl $MO = \frac{1}{2}g$ en $OP = \frac{1}{2}g$ is. Voorts is dan $x = gt$, zoodat het ligchaam van O af, langs de kromme OD in elke seconde eene verticale hoogte g doorvalt, na in de eerste seconde, de hoogte $MO = \frac{1}{2}g$ te hebben doorgevallen.

De hoogten die het ligchaam dan, zoo wij die eerste seconde mederekenen, na verloop van 1, 2, 3, 4, 5, enz. seconden heeft doorgevallen, zijn respectievelijk

$$\frac{1}{2}g, \frac{3}{2}g, \frac{5}{2}g, \frac{7}{2}g, \frac{9}{2}g, \text{ enz.},$$

zij komen juist overeen met de hoogten, die een vrijvallend ligchaam, dat zonder aanvangssnelheid begint te vallen, respectievelijk in de 1ste, 2de, 3de, 4de, 5de seconden, enz. doorvalt.

CC. Voorstel.

Door. J. Badon Ghijben.

In eene dunne staaf, die als eene gelijkslachtige zware regte lijn kan beschouwd worden, begeert men een ophangpunt te kiezen, zoodanig, dat die staaf, onder de werking der zwaartekracht slingerende, hare slingeringen in den kortstmogelijken tijd volbrengt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij AB (Fig. 143) de bedoelde staaf, wier zwaartepunt, oudat zij als eene gelijkslachtige regte lijn moet aangemerkt worden, juist in haar midden Z ligt. Nemen wij boven dat zwaartepunt eenig ophangpunt O, dan komt het er op aan den afstand ZO zoodanig te bepalen, dat de staaf om O zoo spoedig mogelijk slingert, of dat, zoo S het slingerpunt van de om O slingerende staaf voorstelt, de afstand der onderling afhankelijke punten O en S zoo klein mogelijk worde.

Te dien einde stellen wij $OZ = x$, $OS = y$ en $AZ = BZ = a$, terwijl wij de massa der staaf door $2m$ zullen voorstellen; dan wordt vooreerst het moment van traagheid van de halve staaf AZ, ten opzigte van het punt Z, uitgedrukt door $\frac{1}{2}a^2m$; derhalve is $\frac{1}{2}a^2m$ het moment van traagheid der geheele staaf, ten opzigte van het punt Z; en door hierbij op te tellen de geheele massa

Digitized by Google

$2m$ der staaf, met het vierkant van $OZ = x$ vermenigvuldigd, verkrijgen wij voor haar moment van traagheid, ten opzigte van het punt O, $2m\left\{\frac{1}{3}a^2 + x^2\right\}$.

Het statisch moment der staaf, ten opzigte van het punt O, is blijkbaar hare massa vermenigvuldigd met den afstand OZ, dat is

$$2mx;$$

en door dan deze waarde in het gevondene moment van traagheid te deelen, verkrijgen wij, volgens den bekenden regel ter bepaling der slingerpunten,

$$y = \frac{a^2}{3x} + x,$$

zoodat wij slechts de waarde van x te zoeken hebben, die y tot een minimum maakt.

Door differentiatie vinden wij

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2 - a^2}{3x^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = + \frac{2a^2}{3x^3};$$

en zien dan oogenblikkelijk, dat men, om het eerste differentiaalquotiënt nul en gelijktijdig het tweede positief te maken,

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$$

moet nemen, en dat dus deze waarde van x, y tot een minimum maakt. De waarde van dit minimum is dan

$$y = \tfrac{2}{3}a\sqrt{3}.$$

Neemt men dus het ophangpunt O op eenen afstand $OZ = \frac{1}{3}AZ\sqrt{3}$ van het midden der staaf, zoo zal zij, om dat punt slingerende, hare slingeringen in den kortstmogelijken tijd volbrengen.

Beschrijven wij op AZ een gelijkzijdigen driehoek, en laten wij daarin, uit de hoekpunten A en Z, loodlijnen op de overstaande zijden vallen, elkander in M snijdende, zoo is $MZ = MA = \frac{1}{3}AZ\sqrt{3}$. Nemen wij dus $ZO = ZS = ZM$, zoo is O het begeerde ophangpunt en S het overeenkomstige slingerpunt.

CCI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale doorgangen van een vlak, begeert men in de as van projectie een punt te vinden, dat op een gegeven afstand van het vlak verwijderd is.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, W. VAN HAARST, JR. en J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Zij OX (Fig. 144) de as van projectie, AA′ de horizontale en

Digitized by Google

AA″ de verticale doorgang van het gegeven vlak; indien wij dan, door eenig punt a van den horizontalen doorgang, eene lijn PY regthoekig op dien doorgang trekken, en deze lijn PY tot nieuwe as van projectie willen aannemen, behoeven wij slechts, uit eenig punt B″ van AA″, eene loodlijn B″B′ op OX te laten vallen, B′b′b″ evenwijdig met AA′ te trekken, en b′b″ = B′B″ te nemen, om uit a door b″ de lijn aa″ te kunnen trekken, die den nieuwen verticalen doorgang van het gegeven vlak voorstelt; terwijl dan het nieuwe verticale vlak loodregt op den horizontalen doorgang AA′ staat en dus b′ab″ de standhoek is, dien het gegevene vlak met het horizontale maakt.

Stellen wij dus ergens op aa″ eene loodlijn CD, die gelijk aan den gegeven afstand is, en trekken wij door haar uiteinde D eene lijn e″e evenwijdig met aa″, vervolgens eE evenwijdig met aA; en eindelijk EE″ evenwijdig met AA″, dan zijn Ee, EE″ en ee″ de horizontale en verticale doorgangen van een vlak, dat evenwijdig met het gegevene, en daarvan op den afstand CD verwijderd is. Dit vlak eEE″ snijdt de as van projectie OX in het punt E; het punt E zal dus mede op den gegeven afstand van het vlak A′AA″ verwijderd zijn, en is bijgevolg het begeerde punt.

Door de loodlijn CD aan weerszijden van aa″ te plaatsen, zal men blijkbaar in de as OX twee punten E verkrijgen, die aan de vraag voldoen en aan weerszijden even ver van het punt A liggen.

CCII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van eene regte lijn, zoo mede van een punt buiten die lijn, begeert men de projectiën te construeren van eene andere lijn, die door het gegeven punt gaat en de gegevene lijn onder een gegeven hoek snijdt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr. en J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij OX (Fig. 145) de as van projectie, A′B′ de horizontale en A″B″ de verticale projectie der gegevene lijn, C′ de horizontale en C″ de verticale projectie van het gegeven punt, dan beginnen wij met het projecterende vlak der lijn op het horizontale, om hare horizontale projectie neder te slaan op het horizontale vlak. Hiertoe construeren wij eerst het punt P, waar de lijn het horizontale vlak ontmoet; vervolgens nemen wij in de lijn een wille-

Digitized by Google

keurig punt (Q', Q") en stellen in Q' op A'B' eene loodlijn Q'Q, die in lengte gelijk is aan de hoogte van het punt Q" boven de as; indien wij dan PQ trekken, is dit de lijn (A'B', A"B") in haar projecterend vlak op het horizontale neergeslagen.

Nemen wij dit neergeslagen projecterend vlak als nieuw verticaal vlak, en dus PY als nieuwe as van projectie aan, dan is PQ zoowel de nieuwe verticale projectie der gegevene lijn, als die lijn zelve; terwijl de nieuwe verticale projectie c" van het gegevene punt verkregen wordt door C'c" loodregt door PY te trekken, en op die loodlijn het punt c" even ver van PY te nemen, als C" van OX verwijderd is.

Trekken wij c"M loodregt op PQ, en stellen wij uit c" op c"M eene loodlijn c"c, wier lengte gelijk is aan den afstand van het punt C' tot de as PY; zoo wij dan Mc trekken, is c"Mc de standhoek van het vlak, dat door de lijn PQ en het punt (C', c") gaat, met het nieuwe verticale vlak; zoo wij dus verder Mc" tot in C verlengen, zoodanig dat MC = Mc wordt, is C de plaats waar het punt (C', c") komt te liggen, indien het vlak door dit punt en de lijn PQ gaande, om deze lijn PQ op het nieuwe verticale vlak wordt neergeslagen.

In dit laatstgenoemde neergeslagen vlak kan men nu werkelijk uit het punt C de lijnen CL en CN trekken, die met de lijn PQ den gegeven hoek CLM = CNM maken, waartoe men slechts MCL en MCN gelijk aan het complement van dien gegeven hoek behoeft te nemen; hierdoor worden de punten L of N bekend, in welke de gegevene lijn door de gevraagde moet gesneden worden; de horizontale projectiën L' en N' dezer punten worden gevonden door LL' en NN' loodregt op PY te trekken, terwijl dan verder hunne projectiën L" en N" op het eerste verticale vlak verkregen worden, zoo men L'L" en N'N" loodregt door OX trekt.

Vereenigen wij dus L' en N' met C', alsook L" en N" met C", dan zijn C'L' en C"L", of C'N' en C"N" de horizontale en verticale projectiën der lijn, die door het gegeven punt (C', C") gaat, en de gegevene lijn (A'B', A"B") onder den gegeven hoek CLM = CNM snijdt.

Aanmerking. Trekt men MM' loodregt op PY, en vervolgens M'M" loodregt door OX, zoo zijn M' en M" de projectiën van het voetpunt der loodlijn, die uit het punt (C', C") op de lijn (A'B', A"B") valt.

Digitized by Google

CCIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van een bol, benevens den horizontalen doorgang van een vlak, begeert men den verticalen doorgang van dat vlak soodanig te bepalen, dat hetzelve den bol volgens een kleinen cirkel van gegevene grootte snijdt.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, W. van Haarst, Jr. en J. S. Spijker.

Oplossing van W. L. Ivangh.

Laten P′ en P″ (Fig. 146) de projectiën van den bol, M′ en M″ de projectiën van zijn middelpunt zijn, dan wordt de as van projectie OX door de lijn M′M″ regthoekig gesneden in M. Zij voorts AA′ de horizontale doorgang van het vlak, en gh de middellijn van den kleinen cirkel, volgens welken de bol door het vlak moet gesneden worden.

Indien men nu in een der beide projectie-cirkels van den bol, b. v. in den verticalen, eene koorde GH uitzet, die gelijk aan gh is, daarop uit het middelpunt M″ eene loodlijn M″I laat vallen, en vervolgens met deze M″I als straal, uit M′ en M″, cirkels beschrijft, zijn deze cirkels de projectiën van een kleineren bol, die blijkbaar de eigenschap heeft dat al zijn rakende vlakken den gegeven bol snijden volgens cirkels, wier middellijnen gelijk aan de gegevene gh zijn. De vraag is hierdoor onmiddellijk teruggebragt tot het vinden van den verticalen doorgang van een vlak, dat een gegeven horizontalen doorgang AA′ heeft, en den genoemden kleineren bol raakt; en derhalve kan dan de constructie verder, volgens het CXXII. Voorstel uitgevoerd worden.

Hiertoe trekke men M′B′ loodregt op AA′, neme MB = M′B′, trekke uit B eene raaklijn aan den binnensten cirkel uit M″ beschreven, late uit het raakpunt r de loodlijn rR op OX neder, neme M′R′ = MR, trekke uit R′ een loodlijn op, en uit r een evenwijdige lijn met OX, ten einde door de snijding dezer lijnen het punt R″ te verkrijgen. Na dan eindelijk M″R″ getrokken en uit A eene loodlijn AA″ op M″R″ nedergelaten te hebben, zal AA″ de begeerde verticale doorgang wezen.

Door uit B eene tweede raaklijn aan denzelfden cirkel te trekken, zal men evenzoo eenen tweeden verticalen doorgang verkrijgen, die aan de vraag beantwoordt.

Digitized by Google

CCIV. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

De lijn te construeren voorgesteld door de formule

$$x = a \pm \nu\left\{3a^2 + \frac{a^3 - b^3}{b}\right\}. \quad (*)$$

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. B. Geel, W. van Haarst Jr., W. L. Ivanon en E. Olivier Dz.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Trek twee onbepaalde lijnen OX en OY (Fig 147) loodregt op elkander; neem op OY een stuk $OA = a$ en op het verlengde van OX een stuk $OB = b$; trek AB en stel daarop uit A eene loodlijn AC, die OX ergens in C ontmoet; neem vervolgens $BD = 2 \times OB = 2b$, $DE = OA = a$, en beschrijf op EC als middellijn eenen halven cirkel, die OY ergens in F snijdt. Beschrijf vervolgens uit B, met OF als straal, cirkelboogjes die OY en haar verlengde in G en H snijden, dan zullen AH en AG de lijnen zijn door de opgegevene formule voorgesteld.

Want daar de hoek BAC regt is, zoo is

$$OC = \frac{OA^2}{OB} = \frac{a^2}{b};$$

voorts is

$$OE = OB + BD + DE = b + 2b + a = 3b + a,$$

en dus

$$OF = \nu OC \times OE = \nu\frac{a^2}{b}(3b + a) = \nu\left\{3a^2 + \frac{a^2}{b}\right\};$$

omdat nu $BG = BH = OF$ genomen is, volgt hieruit verder

$$OG = OH = \nu(OF^2 - OB^2) = \nu\left\{3a^2 + \frac{a^2}{b} - b^2\right\} = \nu\left\{3a^2 + \frac{a^2 - b^2}{b}\right\},$$

dus $$AH = OA + OH = a + \nu\left\{3a^2 + \frac{a^2 - b^2}{b}\right\}$$

$$-AG = OA - OG = a - \nu\left\{3a^2 + \frac{a^2 - b^2}{b}\right\}.$$

CCV. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Hoe vindt men twee getallen, welke zoo gesteld zijn, dat de som van derzelver kwadraten een product zij van twee factoren, welke ieder wederom uit de som van twee kwadraten bestaan. (†)

(*) H. Schotman, *Vraagst. over de Hoogere Meetk.* N°. 12, bl. 2.

(†) Meijer Hirsch, *Verzam. van Voorb. enz.* N°. 48, bl. 218.

Digitized by Google

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer, J. B. Grel *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

Laten $p^2 + q^2$ en $r^2 + s^2$ de beide factoren zijn, dan verkrijgt men voor derzelver product, na ontwikkeling,

$$p^2r^2 + q^2r^2 + p^2s^2 + q^2s^2,$$

hetgeen nu gelijk moet zijn aan de som van twee vierkanten.

Wanneer men deze uitdrukking gelijktijdig met $2pqrs$ vermeerdert en vermindert, komt er

$$p^2r^2 + 2pqrs + q^2s^2 + p^2s^2 - 2pqrs + q^2r^2,$$

of wel $p^2r^2 - 2pqrs + q^2s^2 + p^2s^2 + 2pqrs + q^2r^2$;

dat is $(pr + qs)^2 + (ps - qr)^2$,

of $(pr - qs)^2 + (ps + qr)^2$,

welke uitdrukkingen nu reeds werkelijk, ieder in het bijzonder, de som van twee vierkanten voorstellen.

Men heeft dus in het algemeen

$$(pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2),$$

of $$(pr - qs)^2 + (ps + qr)^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2),$$

en de gevraagde getallen zijn derhalve:

$$pr + qs \text{ en } ps - qr,$$

of $$pr - qs \text{ en } ps + qr,$$

waarin voor p, q, r en s getallen naar welgevallen kunnen aangenomen worden.

Voor $p = 4$, $q = 1$, $r = 2$ en $s = 3$, verkrijgt men de getallen 11 en 10, of 5 en 14; en men heeft dan:

$$11^2 + 10^2 = (4^2 + 1^2)(2^2 + 3^2),$$

of ook $$5^2 + 14^2 = (4^2 + 1^2)(2^2 + 3^2).$$

CCVI. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Het verschil van twee getallen is een kwadraat, hunne som is een pronik, en het dubbel van hun product is eene derde magt. Indien nu de wortels, van dit kwadraat, van dezen pronik, en van deze derde magt, eene rekenkunstige reeks vormen, wier verschil de eenheid is, vraagt men de genoemde getallen te vinden.

Opgelost *door* L. Hoefnagel, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh, J. S. Speijer *en* J. B. Grel.

Oplossing *van* L. Hoefnagel.

Laten de begeerde getallen voorgesteld worden door $x + y$ en $x - y$, dan is hun verschil $2y$, hunne som $2x$, hun dubbel

Digitized by Google

product $2(x^2 - y^2)$, zoodat dan $2y$ een kwadraat, $2x$ een pronik, en $2(x^2 - y^2)$ eene derde magt moet wezen.

Zij nu p de wortel van het kwadraat, zoo moet $p + 1$ die van den pronik, en $p + 2$ die van de derde magt zijn, en men heeft dan de vergelijkingen:

$$2y = p^2,$$
$$2x = (p + 1)(p + 2),$$
en $$2(x^2 - y^2) = (p + 2)^3.$$

Uit de eerste en tweede vergelijking volgt dadelijk

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^4 \quad \text{en} \quad x^2 = \tfrac{1}{4}(p + 1)^2 (p + 2)^2,$$

zoodat men, deze waarden in de derde vergelijking overbrengende, verkrijgt

$$\tfrac{1}{4}(p + 1)^2 (p + 2)^2 - \tfrac{1}{4}p^4 = (p + 2)^3,$$

of na behoorlijke herleiding

$$p^3 + \tfrac{1}{2}p^2 - 3p - 3 = 0,$$

welke vergelijking slechts éénen bestaanbaren wortel heeft, namelijk

$$p = 2;$$

hierdoor vindt men dan verder

$$y = 2 \quad \text{en} \quad x = 6,$$

en de gevraagde getallen zijn dus

$$x - y = 4 \quad \text{en} \quad x + y = 8.$$

CCVII. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Van de vergelijking $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, *weet men: dat zij drie positieve meetbare wortels heeft, waarvan de beide kleinsten onderling eene eenheid verschillen; dat a, b en c geheele getallen zijn; en dat het kwadraat van b,* 3164 *kleiner is dan het kwadraat van c. Men vraagt hieruit de waarden van a, b en c te vinden.*

Opgelost *door* J. S. Spijker, L. Hoefnagel, W. van Haarst, Jr., J. B. Gerl *en* W. L. Ivanch.

Oplossing van J. S. Spijker.

Indien wij de wortels der vergelijking door p, q en r voorstellen, hebben wij, uit de bekende eigenschappen der hoogere magtsvergelijkingen,

$$p + q + r = a, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$pq + pr + qr = b, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$pqr = c, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

en, door de voorwaarden van het voorstel,

Digitized by Google

$$p + 1 = q, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$b^2 = c^2 - 3164. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Daar nu a, b en c even als p, q en r onbekend zijn, hebben wij *vijf* vergelijkingen tusschen *zes* onbekenden; het voorstel *is* dus onbepaald, tenzij hetzelve door de voorwaarde, dat al de onbekenden geheele positieve getallen zijn, bepaald mogt worden.

Uit (5) volgt

$c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = 3164 = 2 \times 2 \times 7 \times 113$, omdat c en b positieve geheele getallen verbeelden, zullen $c + b$ en $c - b$ óf twee evene óf twee onevene factoren moeten zijn, waarin 3164 zal moeten kunnen ontbonden worden; maar 3164 kan in geen twee onevene factoren ontbonden worden, en de eenigste mogelijke ontbindingen van dit getal, in twee evene factoren, zijn $3164 = 2 \times 1582$ en $3164 = 14 \times 226$; en wij kunnen dus niet anders hebben dan:

$c + b = 1582$ en $c - b = 2$, dat is $c = 792$ en $b = 790$, of

$c + b = 226$ en $c - b = 14$, dat is $c = 120$ en $b = 106$.

Nemen wij $c = 792$ en $b = 790$, dan is volgens (2), (3) en (4)

$$pq + pr + qr = 790, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

en

$$pqr = p(p + 1)\, r = 792; \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

maar de eenige mogelijke ontbindingen van 792 in drie factoren, waarvan de beide kleinsten eene eenheid verschillen, zijn

$792 = 1 \times 2 \times 396 = 2 \times 3 \times 132 = 3 \times 4 \times 66 = 8 \times 9 \times 11$, zoodat wij, alleen de vergelijking (7) in aanmerking nemende, zouden kunnen hebben:

$$p = 1,\ q = 2 \text{ en } r = 396;$$
$$p = 2,\ q = 3 \text{ en } r = 132;$$
$$p = 3,\ q = 4 \text{ en } r = 66;$$

of

$$p = 8,\ q = 9 \text{ en } r = 11;$$

welke waarden echter geen van allen aan de vergelijking (6) voldoen. Derhalve kunnen $c = 792$ en $b = 790$ niet voldoen.

Nemen wij daarentegen $c = 120$ en $b = 106$, dan hebben wij

$$pq + pr + qr = 106, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

en

$$pqr = p(p + 1)\, r = 120, \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

terwijl de mogelijke ontbindingen van 120 zijn

$120 = 1 \times 2 \times 60 = 2 \times 3 \times 20 = 3 \times 4 \times 10 = 4 \times 5 \times 6$ en wij dus, alleen de vergelijking (9) in aanmerking nemende, zouden kunnen hebben:

Digitized by Google

$$p = 1,\ q = 2 \text{ en } r = 60;$$
$$p = 2,\ q = 3 \text{ en } r = 20;$$
$$p = 3,\ q = 4 \text{ en } r = 10;$$
of $$p = 4,\ q = 5 \text{ en } r = 6;$$

van deze waarden voldoen aan de vergelijking (8) geene andere dan $p = 2,\ q = 3$ en $r = 20$,

en dit zijn alzoo de wortels der vergelijking, die aan het voorstel beantwoorden. Derhalve is dan

$$a = p + q + r = 25,$$

terwijl de vergelijking is

$$x^3 - 25x^2 + 106x - 120 = 0.$$

Intusschen zal men de waarde van a, nadat b en c bekend zijn, ook regtstreeks kunnen vinden. Indien men namelijk q en r tusschen de vergelijkingen (2), (3) en (4) elimineert, door uit (2) en (4) af te leiden

$$r = \frac{b - pq}{p + q} = \frac{b - p(p+1)}{p + (p+1)},$$

zoo mede uit (3) en (4)

$$r = \frac{c}{pq} = \frac{c}{p(p+1)},$$

verkrijgt men $$\frac{c}{p(p+1)} = \frac{b - p(p+1)}{2p+1},$$

of na behoorlijke herleiding

$$p^4 + 2p^3 - (b-1)\,p^2 + (2c - b)\,p + c = 0,$$

waarin nu p een geheel positief getal moet wezen.

Voor $c = 792$ en $b = 790$, heeft men

$$p^4 + 2p^3 - 791p^2 + 794p + 792 = 0,$$

waaraan in geheele getallen *niet* voldaan kan worden.

Voor $c = 120$ en $b = 106$, heeft men

$$p^4 + 2p^3 - 105p^2 + 134p + 120 = 0,$$

waaraan, in geheele getallen, alleen door $p = 2$ voldaan wordt.

Alzoo is dan $p = 2$, $q = p + 1 = 3$, $r = \frac{c}{pq} = \frac{120}{pq} = 20$,

en $a = p + q + r = 25$.

CCVIII. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Uit den top eens scherphoekigen driehoeks, is eene loodlijn op de basis nedergelaten, waardoor de driehoek in twee deelen verdeeld is. Indien men het aantal vierkante eenheden van het grootste deel, vermindert met het aantal lengte eenheden van de

Digitized by Google

kortste opstaande zijde des driehoeks, komt er tot rest het getal 41; terwijl men 15 tot rest verkrijgt, indien men het aantal lengte eenheden van de langste opstaande zijde, aftrekt van het aantal vierkante eenheden van het kleinste der genoemde deelen des driehoeks. Zoo nu bovendien gegeven is, dat de basis des driehoeks 14 lengte eenheden bevat, wil men daaruit zijne opstaande zijden berekenen.

Opgelost *door* J. S. Speijer, L. Horsnagel, W. van Haarst, Jr., J. B. Geel *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat AC de langste en BC de kortste opstaande zijde zijn van den scherphoekigen driehoek ABC (Fig. 148), uit welke top C de loodlijn CD op de bazis AB is neergelaten. Indien wij dan $AC = p$, $BC = q$, $CD = r$, $AD = s$ en $BD = t$ stellen, is vooreerst, volgens de eigenschap der regthoekige driehoeken,

$$p^2 = r^2 + s^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

en

$$q^2 = r^2 + t^2; \ldots\ldots\ldots (2)$$

voorts is, volgens de voorwaarden van het voorstel,

$$\tfrac{1}{2} rs - q = 41, \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\tfrac{1}{2} rt - p = 15, \ldots\ldots\ldots (4)$$

en

$$s + t = 14. \ldots\ldots\ldots (5)$$

Stellen wij verder gemakshalve

$$p + q = x \quad \text{en} \quad p - q = y,$$

dus $p^2 - q^2 = xy$ en $p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$,

dan vinden wij, door de som en het verschil van (1) en (2) te nemen,

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = 2r^2 + s^2 + t^2$$

en

$$xy = s^2 - t^2,$$

waarvoor wij schrijven kunnen

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + (s + t)^2 + (s - t)^2$$

en

$$xy = (s + t)(s - t),$$

of ook volgens (5)

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + 196 + (s - t)^2$$

en

$$xy = 14(s - t);$$

uit de laatste vergelijking volgt nu onmiddellijk

$$s - t = \frac{xy}{14}, \ldots\ldots\ldots (6)$$

waardoor de voorlaatste overgaat in

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + 196 + \left(\frac{xy}{14}\right)^2. \ldots\ldots (7)$$

Digitized by Google

Nemen wij de som en het verschil van (3) en (4); dan komt er

$$\tfrac{1}{2}r(s+t) - x = 56,$$

en $$\tfrac{1}{2}r(s-t) + y = 26,$$

dat is, volgens (5) en (6), $7r - x = 56$

en $$\frac{rxy}{28} + y = 26;$$

deze vergelijkingen geven dadelijk

$$x = 7r - 56 = 7(r-8) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

en $$y = \frac{28\times 26}{rx+28} = \frac{28\times 26}{7r(r-8)+28} = \frac{104}{r^2-8r+4} \quad \ldots \quad (9)$$

zoodat wij eindelijk, door de waarden (8) en (9) in (7) over te brengen, verkrijgen

$$49(r-8)^2 + \left\{\frac{104}{r^2-8r+4}\right\}^2 = 4r^2 + 196 + \left\{\frac{52(r-8)}{r^2-8r+4}\right\}^2,$$

dat is, na herleiding en rangschikking volgens de afdalende magten van r,

$$45r^6 - 1504r^5 + 18724r^4 - 106368r^3 + 259872r^2 - 157440r - 115200 = 0.$$

Om de oplossing dezer zesdemagtsvergelijking gemakkelijker te maken, merken wij op dat $AC + BC > AB$, dus $p + q > 14$ of $x > 14$ moet wezen, en dat alzoo volgens (8) ook $7(r-8) > 14$ en bijgevolg $r > 10$ moet zijn. Verminderen wij nu de wortels onzer vergelijking met 10 (hetgeen volgens de leerwijze van Horner zeer gemakkelijk geschiedt), dat is, stellen wij $r = 10 + s$, dan komt er

$$45s^6 + 1196s^5 + 11024s^4 + 38592s^3 + 13232s^2 - 174400s - 230400 = 0,$$

welke vergelijking slechts één afwisseling van teeken heeft, en dus ook niet meer dan éénen positieven wortel hebben kan. Deze wortel is $s = 2$, derhalve $r = 10 + s = 12$, en door (8) en (9) vinden wij nu verder $x = 28$ en $y = 2$; hieruit volgt dan dat de opstaande zijden des driehoeks zijn

$$p = \tfrac{1}{2}(x+y) = 15 \quad \text{en} \quad q = \tfrac{1}{2}(x-y) = 13.$$

CCIX. Vooretel.

Door J. Bassan.

Eene meetkunstige evenredigheid in geheele getallen te vinden, zoodat de som der beide eerste termen een derdemagtsgetal, en de som der beide laatste termen een vierkant is.

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer, J. B. Gerl *en* W. L. Ivange.

Digitized by Google

I. Oplossing van J. Bassan.

Men stelle de evenredigheid voor door

$$x : xy = z : zy,$$

dan zal $z + zy$ eene derde magt en $z + zy$ een vierkant moeten wezen.

Te dien einde neme men

$$x + xy = p^2x^3$$

en

$$z + zy = q^2z^2,$$

dan volgt hieruit $y = p^2x^2 - 1$

en

$$z = \frac{1 + y}{q^2} = \frac{p^2x^2}{q^2},$$

opdat nu z een geheel getal zij, neme men verder $x = qr$, dan wordt $y = p^2q^2r^2 - 1$ en $z = p^2r^2$,

waardoor men voor de gevraagde evenredigheid vindt

$$qr : p^2q^2r^3 - qr = p^2r^2 : p^6q^2r^4 - p^2r^2;$$

kunnende hierin voor p, q en r getallen naar welgevallen genomen worden.

Voor $p = 1$, $q = 1$ en $r = 2$, heeft men $2 : 6 = 4 : 12$.

» $p = 1$, $q = 2$ en $r = 1$, » » $2 : 6 = 1 : 3$.

Dit laatste antwoord bevat blijkbaar de kleinst mogelijke getallen.

II. Oplossing van W. van Haarst, Jr.

Dewijl de som van de beide eerste termen der begeerde evenredigheid een derdemagtsgetal moet zijn, kunnen wij voor die termen stellen $a^3 + b^3$ en $3ab(a + b)$. Maar nu is, omdat deze beide termen door $a + b$ deelbaar zijn,

$$a^3 + b^3 : 3ab(a + b) = a^2 - ab + b^2 : 3ab;$$

en de som van $a^2 - ab + b^2$ en $3ab$ is dan juist een kwadraat. Derhalve zullen in deze evenredigheid alle geheele getallenwaarden voor a en b aan de vraag voldoen.

Voor $a = 1$ en $b = 1$, heeft men: $2 : 6 = 1 : 3$.

CCX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Uit den top C *eens driehoeks* ABC (Fig. 149) *is eene loodlijn* CD *op de basis nedergelaten, en eene lijn* CE *getrokken, die den tophoek* ACB *middendoordeelt en de basis in* E *ontmoet. Indien nu de deelen* AE, ED *en* DB *van de basis gegeven zijn, wil men den driehoek door berekening en door constructie bepalen.*

Opgelost *door* J. S. Spruijer, J. Bassan, W. van Haarst, Jr., J. B. Gerl *en* W. L. Ivanon.

Digitized by Google

Oplossing van J. S. Speijer.

Laat gegeven zijn AE $= a$, ED $= b$ en DB $= c$, dan kunnen wij, omdat volgens eene bekende eigenschap des driehoeks AC : BC = AE : BE is, stellen AC $= ax$ en BC $= (b + c)\,x$.

Uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD volgt nu

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = a^2x^2 - (a + b)^2$$

en $$CD^2 = BC^2 - BD^2 = (b + c)^2x^2 - c^2,$$

zoodat wij hebben de vergelijking

$$a^2x^2 - (a + b)^2 = (b + c)^2x^2 - c^2,$$

waaruit achtervolgens afgeleid kan worden:

$$x^2\left\{a^2 - (b + c)^2\right\} = (a + b)^2 - c^2,$$

$$x^2(a + b + c)(a - b - c) = (a + b + c)(a + b - c),$$

$$x^2(a - b - c) = a + b - c,$$

en $$x = \sqrt{\frac{a + b - c}{a - b - c}}.$$

De zijden des driehoeks zijn dus:

$$AC = a\sqrt{\frac{a + b - c}{a - b - c}},$$

$$BC = (b + c)\sqrt{\frac{a + b - c}{a - b - c}},$$

en $$AB = a + b + c.$$

Om den driehoek uit de gegevens te construeren, neme men, op eene onbepaalde regte lijn XY, drie aan elkander sluitende deelen AE $= a$, ED $= b$ en DB $= c$, trekke uit A en B evenwijdige lijnen AF en BG, neme daarop AF $=$ AE, BG $=$ BE en vereenige de punten F en G door eene lijn, die men verlenge tot zij het verlengde van AB snijde in H. Verder beschrijve men op EH als middellijn een halven cirkel, en stelle op AB in het punt D eene loodlijn, die den genoemden halven cirkel ergens in C zal snijden. Indien men dan AC en BC trekt, zal ABC de begeerde driehoek zijn. Want, omdat AH : BH $=$ AF : BG $=$ AE : BE is, is de genoemde cirkel de meetkunstige plaats der punten, wier afstanden tot de punten A en B zich verhouden als AE : BE; derhalve is ook AC : BC $=$ AE : BE, en bijgevolg zal eene lijn van C naar E getrokken, den hoek ACB middendoordeelen.

Aanmerking. Uit de constructie volgt, dat het punt H, waar de verlengde AB door de verlengde FG gesneden wordt, aan denzelfden kant van E moet vallen als het voetpunt D der loodlijn; hiertoe moet AF $>$ BG, dat is AE $>$ BE of $a > b + c$ zijn. Dit volgt ook uit de waarde van x, omdat die anders onbestaan-

Digitized by Google

baar wordt, ten minste zoo lang b positief is. Is echter b negatief, dat is, ligt het punt D aan de andere zijde van E, dan zal $BE > AE$ of $b + c > a$ moeten zijn.

Indien c negatief is, ligt het punt D op het verlengde van AB, b. v. in D', en dan is AC'B de begeerde driehoek.

CCXI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Op de basis AB ***van eenen driehoek*** ABC (Fig. 150), ***is als middellijn een halve cirkel buitenwaarts beschreven, en vervolgens is de tophoek middendoorgedeeld door eene lijn*** CDE, ***die de basis des driehoeks in*** D, ***en den omtrek des cirkels in*** E ***ontmoet. Indien nu*** AD, BD ***en*** DE ***gegeven zijn, begeert men de zijden des driehoeks in deze gegevens uit te drukken; zoomede den driehoek te construeren.***

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. Bassan, W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Wij zullen aanvankelijk aanwijzen, hoe de driehoek uit de gegevens kan geconstrueerd worden, om vervolgens daaruit de berekening van de zijden des driehoeks af te leiden.

Dewijl de deelen $AD = a$ en $BD = b$ der bazis bekend zijn, kunnen wij dadelijk op de bazis AB den bedoelden halven cirkel beschrijven, en vervolgens uit het punt D, met de gegevene lijn $DE = c$ als straal, een boogje dat den omtrek van dien halven cirkel ergens in E snijdt; indien wij dan DE trekken en uit D verlengen, is dit verlengde de lijn, die den tophoek des driehoeks moet middendoordeelen. Trekken wij dus uit B eene lijn, die de verlengde ED regthoekig snijdt in F, nemen wij daarop $FG = BF$, en trekken wij door A en G eene lijn, wier verlengde het verlengde van DE ergens in C zal snijden, dan is C de top van den begeerden driehoek ABC; want door deze constructie is blijkbaar *hoek* GCF = *hoek* BCF, zoodat de lijn CDE werkelijk den tophoek des driehoeks ABC middendoordeelt.

Om van dezen driehoek, wiens bazis $AB = a + b$ onmiddellijk bekend is, ook de opstaande zijden te berekenen, kunnen wij $AC = ax$ stellen, als wanneer, volgens eene bekende eigenschap, $BC = bx$ is. Stellen wij verder *hoek* $BDF = \phi$, zoo is ook *hoek* $ADE = \phi$ en *hoek* $BDE = 180^\circ - \phi$, en uit de driehoeken ADE en BDE volgt dan:

Digitized by Google

$$AE^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos.\phi,$$
$$BE^2 = b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\phi,$$

en dus

$$AE^2 + BE^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c\,(a - b)\ Cos.\phi;$$

maar de driehoek ABE, in een halven cirkel staande, is regthoekig in E, dus is ook

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 = (a + b)^2,$$

en bijgevolg

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(a - b)\ Cos.\phi,$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$Cos.\phi = \frac{c^2 - ab}{c(a - b)}.$$

Verder is dan, uit den driehoek BDF,

$$DF = b\ Cos.\phi = \frac{b(c^2 - ab)}{c(a - b)},$$

alsmede

$$BF^2 = BD^2 - DF^2 = b^2 - \frac{b^2(c^2 - ab)^2}{c^2(a - b)^2} = \frac{b^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2(a - b)^2},$$

waaruit volgt

$$BG^2 = 4BF^2 = \frac{4b^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2(a - b)^2},$$

Uit de driehoeken ABC en BGC, hebben wij vervolgens:

$$Cos.\,ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \times BC},$$

en $Cos.\,GCB = \dfrac{GC^2 + BC^2 - BG^2}{2GC \times BC} = \dfrac{2BC^2 - BG^2}{2BC^2}$,

dus $\dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{AC} = \dfrac{2BC^2 - BG^2}{BC} = 2BC - \dfrac{BG^2}{BC}$;

hierin $AC = ax$, $BC = bx$, $AB = a + b$ substituerende en tevens voor BG^2 de bovengevondene waarde inbrengende, komt er

$$\frac{a^2x^2 + b^2x^2 - (a + b)^2}{ax} = 2bx - \frac{4b(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2(a - b)^2\,x};$$

dat is

$$a^2x^2 + b^2x^2 - (a + b)^2 = 2abx^2 - \frac{4ab(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2(a - b)^2},$$

of $$(a - b)^2\,x^2 = (a + b)^2 - \frac{4ab(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{c^2(a - b)^2},$$

waaruit wij dan, na behoorlijke herleiding, vinden

$$x^2 = \frac{c^2(a - b)^4 + 4ab(c^2 - ab)^2}{c^2(a - b)^4}.$$

Digitized by Google

Door deze waarde van x^2 verkrijgen wij dan eindelijk, voor de opstaande zijden des driehoeks,

$$AC = ax = \frac{a}{c(a-b)^2}\sqrt{\left\{c^2(a-b)^4 + 4ab(c^2-ab)^2\right\}}$$

en $$BC = bx = \frac{b}{c(a-b)^2}\sqrt{\left\{c^2(a-b)^4 + 4ab(c^2-ab)^2\right\}}.$$

CCXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van een trapezium de diagonalen en de afstand der evenwijdige zijden gegeven zijnde, begeert men daaruit de zijde van het vierkant te construeren, dat gelijken inhoud als het trapezium heeft.

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. L. IVANGH, J. B. GEEL, W. VAN HAARST, JR. *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Trek twee evenwijdige lijnen PP′ en QQ′ (Fig. 151), wier afstand PQ gelijk is aan den gegeven afstand van de evenwijdige zijden des trapeziums. Beschrijf uit twee punten A en B van de eene lijn PP′, met stralen gelijk aan de gegevene diagonalen, cirkelboogjes, die de andere lijn QQ′ in C en D snijden, zoodat AC en BD de gegevene lengten verkrijgen; trek vervolgens AD en BC, dan is ABCD een trapezium, dat de gegevene afmetingen heeft. De punten A en B kunnen hierbij willekeurig genomen worden, mits slechts digt genoeg bij elkander, opdat AC en BD elkander tusschen PP′ en QQ′ snijden; deze willekeurige keuze der punten A en B zal wel op den vorm, maar geenszins op den inhoud van het verkregen trapezium ABCD invloed hebben. Deel verder AD en BC middendoor in E en F, en trek door deze deelpunten de lijnen GH en IK loodregt op PP′ en QQ′, dan is GHIK een regthoek, van gelijken inhoud als het trapezium ABCD. Verleng dus verder HG met een stuk GL = GK en beschrijf op IL als middellijn een' halven cirkel, die PP′ in M snijdt, dan zal GM de begeerde zijde des vierkants zijn. Want volgens de constructie is

$GM^2 = GH \times GL = GH \times GK =$ *Regth.* GHIK $=$ *Trap.* ABCD.

AANMERKING *uit de oplossing van* W. L. IVANGH. Om de zijde van het begeerde vierkant, of wat op hetzelfde nederkomt den inhoud des trapeziums, uit de gegevens te berekenen, trekke men AD′ evenwijdig BD, waardoor men eenen driehoek ACD′ verkrijgt, die gelijken inhoud met het trapezium heeft. Dezen inhoud x^2

Digitized by Google

noemende, $AC = p$, $BD = AD' = q$ en $PQ = h$ stellende, hebben wij dan, uit den driehoek ACD':

$$x^2 = \tfrac{1}{2}h \times CD',$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}pq \times \textit{Sin.}\, CAD',$$

en $$CD'^2 = p^2 + q^2 - 2pq \times \textit{Cos.}\, CAD';$$

de eerste vergelijking geeft

$$CD' = \frac{2x^2}{h},$$

uit de tweede kunnen wij afleiden

$$\textit{Cos.}\, CAD' = \sqrt{(1 - \textit{Sin.}^2\, CAD')} = \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{2x^2}{pq}\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{1}{pq}\sqrt{(p^2q^2 - 4x^4)},$$

en deze waarden in de derde vergelijking overbrengende, komt er

$$\frac{4x^4}{h^2} = p^2 + q^2 - 2\sqrt{(p^2q^2 - 4x^4)},$$

of na verdrijving van het wortelteeken en behoorlijke herleiding $x^8 - \tfrac{1}{2}h^2(p^2 + q^2 - 2h^2)\,x^4 + \tfrac{1}{16}h^4\,(p^2 - q^2)^2 = 0$.

Uit deze vergelijking x^4 oplossende, verkrijgen wij $x^4 = \tfrac{1}{4}h^2\,(p^2 + q^2 - 2h^2) \pm \tfrac{1}{2}h^2\sqrt{(p^2 - h^2)\,(q^2 - h^2)}$, dat is, zoo wij ter bekorting $p^2 - h^2 = m$ en $q^2 - h^2 = n^2$ stellen, $x^4 = \tfrac{1}{4}h^2\,(m^2 + n^2) \pm \tfrac{1}{2}h^2mn$, of ook $x^4 = \tfrac{1}{4}h^2\,(m \pm n)^2$, en hieruit volgt dan weder

$$x^2 = \tfrac{1}{2}h\,(m \pm n).$$

Deze berekening toont aan, dat de gegevens twee trapeziums van verschillenden inhoud toelaten, en dat de zijde van het begeerde vierkant in beide gevallen gevonden wordt door eene middenevenredige tusschen h en $\tfrac{1}{2}(m \pm n)$ te construeren, nadat men vooraf door middel van regthoekige driehoeken de lijnen $m = \sqrt{(p^2 - h^2)}$ en $n = \sqrt{(q^2 - h^2)}$ geconstrueerd heeft.

In Fig. 151 is $x = GM$ eene middenevenredige tusschen h en $\tfrac{1}{2}(m + n)$ geworden, omdat uit de punten A en B de lijnen AC en BD naar zulke snijpunten van de cirkelboogjes met QQ' getrokken zijn, dat de hoeken ABD en BAC beide scherp werden. Koos men tot het trekken van de lijnen AC en BD zoodanige snijpunten, dat van de genoemde hoeken de eene scherp en de andere stomp werd, zoo als in Fig. 152 is voorgesteld, dan zou $x = GM$ eene middenevenredige tusschen h en $\tfrac{1}{2}(m - n)$ zijn. Immers wij hebben, in de beide Figuren:

Digitized by Google

$$A'C = \sqrt{(AC^2 - AA'^2)} = \sqrt{(p^2 - h^2)} = m,$$
$$A'D' = \sqrt{(AD'^2 - AA'^2)} = \sqrt{(q^2 - h^2)} = n,$$
$$GL = GK = \tfrac{1}{2}(AB + CD) = \tfrac{1}{2}CD';$$

maar nu is verder:

in Fig. 151, $GL = \tfrac{1}{2}CD' = \tfrac{1}{2}(A'C + A'D') = \tfrac{1}{2}(m + n)$
en in Fig. 152, $GL = \tfrac{1}{2}CD' = \tfrac{1}{2}(A'C - A'D') = \tfrac{1}{2}(m - n)$.

CCXIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

In een trapezium, heeft men, uit het snijpunt der diagonalen, loodlijnen op de vier zijden nedergelaten. Deze loodlijnen gegeven zijnde, begeert men daaruit het trapezium te bepalen.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., J. Bassan, W. L. Ivanoff *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laten $AB = x$ en $CD = y$ de evenwijdige zijden, $BC = z$ en $AD = v$ de beide andere zijden zijn, van het bedoelde trapezium ABCD (Fig. 153), waarin, uit het snijpunt O der diagonalen AC en BD, loodlijnen op de zijden x, y, z en v zijn nedergelaten, dan zijn deze loodlijnen, die wij achtervolgens door a, b, c en d zullen voorstellen, onze gegevens, en wij hebben onmiddellijk:

$$\textit{Drieh.}\ ABC = \textit{Drieh.}\ AOB + \textit{Drieh.}\ BOC$$
of $$\tfrac{1}{2}(a + b)\,x = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}cz,$$
$$\textit{Drieh.}\ ABD = \textit{Drieh.}\ AOB + \textit{Drieh.}\ AOD$$
of $$\tfrac{1}{2}(a + b)\,x = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}dv,$$
$$\textit{Drieh.}\ ACD = \textit{Drieh.}\ AOD + \textit{Drieh.}\ COD$$
of $$\tfrac{1}{2}(a + b)\,y = \tfrac{1}{2}dv + \tfrac{1}{2}by,$$
$$\textit{Drieh.}\ BCD = \textit{Drieh.}\ BOC + \textit{Drieh.}\ COD$$
of $$\tfrac{1}{2}(a + b)\,y = \tfrac{1}{2}cz + \tfrac{1}{2}by;$$

uit welke vergelijkingen dadelijk volgt

$$bx = cz = dv = ay. \ldots\ldots\ldots (1)$$

Laten wij verder uit C eene loodlijn CF op AB vallen, en trekken wij CE evenwijdig met AD, dan hebben wij

$$EC^2 = BC^2 + BE^2 - 2BE \times BF$$

en dus

$$BF = \frac{BC^2 + BE^2 - EC^2}{2BE} = \frac{z^2 + (x - y)^2 - v^2}{2(x - y)};$$

maar uit (1) volgt

Digitized by Google

$$x = \frac{c}{b}\,z,\ y = \frac{c}{a}\,z \quad \text{en} \quad v = \frac{c}{d}\,z, \ldots . \quad (2)$$

zoodat wij door substitutie dezer waarden verkrijgen

$$BF = \frac{(a-b)^2\,c^2d^2 - (c^2-d^2)\,a^2b^2}{2\,(a-b)\,abcd^2}\,z;$$

verder is $BC^2 = CF^2 + BF^2$,

of $z^2 = (a+b)^2 + \left\{\frac{(a-b)^2\,c^2d^2 - (c^2-d^2)\,a^2b^2}{2\,(a-b)\,abcd^2}\right\}^2 z^2$,

waaruit dan terstond gevonden wordt

$$z = \frac{2\,(a^2-b^2)\,abc^2d^2}{c\sqrt{\left\{2(a-b)^2(c^2+d^2)a^2b^2c^2d^2 - (a-b)^4c^4d^4 - (c^2-d^2)^2a^4b^4\right\}}},$$

en daarna door (2)

$$v = \frac{2\,(a^2-b^2)\,abc^2d^2}{d\sqrt{\left\{2(a-b)^2(c^2+d^2)a^2b^2c^2d^2 - (a-b)^4c^4d^4 - (c^2-d^2)^2a^4b^4\right\}}},$$

$$x = \frac{2\,(a^2-b^2)\,abc^2d^2}{b\sqrt{\left\{2(a-b)^2(c^2+d^2)a^2b^2c^2d^2 - (a-b)^4c^4d^4 - (c^2-d^2)^2a^4b^4\right\}}},$$

en

$$y = \frac{2\,(a^2-b^2)\,abc^2d^2}{a\sqrt{\left\{2(a-b)^2(c^2+d^2)a^2b^2c^2d^2 - (a-b)^4c^4d^4 - (c^2-d^2)^2a^4b^4\right\}}}.$$

CCXIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De vergelijking $x^2\partial y = (x\partial y - y\partial x)\sqrt{(a^2-y^2)}$ *te integreren.*

OPGELOST *door* W. L. IVANGH, J. S. SPEIJER, J. BASSAN *en* W. VAN HAARST, JR.

OPLOSSING *van* W. L. IVANGH.

Deel de beide leden der opgegevene vergelijking door $x^2\sqrt{(a^2-y^2)}$, dan verandert zij in

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \frac{x\partial y - y\partial x}{x^2},$$

waarvan, volgens overbekende regels, de integraal dadelijk blijkt te zijn

$$\textit{Boog Sin.}\ \frac{y}{a} = \frac{y}{x} + C,$$

of wel

$$y = a\ \textit{Sin.}\left(\frac{y}{x} + C\right).$$

Digitized by Google

CCXV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

In een horizontaal vlak zijn, uit eenig punt P, ***drie lijnen getrokken, die twee aan twee stompe hoeken met elkander maken. Men begeert nu eenen cubus met een zijner hoekpunten op het genoemde punt*** P ***te plaatsen, zoodanig, dat de horizontale projectiën der aldaar zamenkomende ribben, langs de getrokkene lijnen vallen.***

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Spijker.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat MN (Fig. 154) het horizontale vlak zijn, in hetwelk uit een punt P drie lijnen PA, PB en PC getrokken zijn, die met elkander twee aan twee stompe hoeken maken, te weten de hoeken BPC $= \alpha$, APC $= \beta$ en APB $= \gamma$; dan kunnen door deze lijnen verticale vlakken gebragt worden, die elkander volgens eene uit P opgerigte verticale lijn PZ zullen ontmoeten, en de cubus zal dan zoodanig moeten geplaatst worden, dat, van zijne drie in P zamenkomende ribben, er één in elk dezer verticale vlakken ligt. Laten nu PA′, PB′ en PC′ de verlengde ribben van den aldus geplaatsten cubus verbeelden, dan behoeven wij, ter bepaling van den begeerden stand van dat ligchaam, slechts de hoeken te berekenen, die de lijnen PA′, PB′ en PC′ met de verticale PZ maken, en wij stellen alzoo *hoek* A′PZ $= x$, *hoek* B′PZ $= y$, *hoek* C′PZ $= z$.

Daar de drie lijnen PA′, PB′ en PC′ onderling regthoekig zijn, bepalen zij twee aan twee drie onderling loodregte vlakken B′PC′, A′PC′ en A′PB′; en beschrijven wij dus uit P als middelpunt eenen bol, dan wordt zijn oppervlak door de genoemde onderling loodregte vlakken gesneden volgens een bolvormigen driehoek QRS, welks zijden allen kwadranten zijn. Indien voorts T het punt is, waar het oppervlak des bols door PZ wordt gesneden, en dan uit dit punt T bogen van groote cirkels naar de punten Q, R en S getrokken worden, is de bolvormige driehoek QRS in drie anderen verdeeld, terwijl dan blijkbaar *hoek* RTS $=$ *hoek* BPC $= \alpha$, *hoek* QTS $=$ *hoek* APC $= \beta$, *hoek* QTR $=$ *hoek* APB $= \gamma$, *boog* QT $=$ *hoek* A′PZ $= x$, *boog* RT $=$ *hoek* B′PZ $= y$ en *boog* ST $=$ *hoek* C′PZ $= z$ is.

Uit den bolvormigen driehoek RTS volgt

Cos. RS $=$ *Cos.* RT $\times$ *Cos.* ST $+$ *Sin.* RT $\times$ *Sin.* ST $\times$ *Cos.* RTS,

Digitized by Google

en dus, omdat RS een kwadrant is,

$$0 = Cos.\,y\ Cos.\,z + Sin.\,y\ Sin.\,z\ Cos.\,x;$$

hieruit volgt $$Cot.\,y\ Cot.\,z = -\,Cos.\,x, \ldots\ldots (1)$$

terwijl uit de bolvormige driehoeken QTS en QTR op dezelfde wijze gevonden wordt

$$Cot.\,x\ Cot.\,z = -\,Cos.\,\beta, \ldots\ldots (2)$$

en $$Cot.\,x\ Cot.\,y = -\,Cos.\,\gamma. \ldots\ldots (3)$$

Indien wij nu de vergelijkingen (1), (2) en (3) twee aan twee met elkander vermenigvuldigen, en elk product door de derde vergelijking deelen, verkrijgen wij dadelijk:

$$\left.\begin{aligned} Cot.^2\,x &= -\,\frac{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma}{Cos.\,\alpha},\\ Cot.^2\,y &= -\,\frac{Cos.\,\alpha\ Cos.\,\gamma}{Cos.\,\beta},\\ \text{en}\quad Cot.^2\,z &= -\,\frac{Cos.\,\alpha\ Cos.\,\beta}{Cos.\,\gamma}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

waardoor nu de te berekenen hoeken gevonden zijn, en dus ook de stand van den cubus bepaald is.

Uit (4) kunnen wij nog eenvoudiger formulen ter berekening van x, y en z afleiden. Omdat namelijk $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ is, hebben wij $Cos.\,\alpha = Cos.\,(\beta + \gamma)$; hierdoor gaat de eerste der formulen (4) over in

$$Cot.^2\,x = -\,\frac{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma}{Cos.\,(\beta+\gamma)} = -\,\frac{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma}{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma - Sin.\,\beta\ Sin.\,\gamma},$$

dus is

$$Tang.^2\,x = -\,\frac{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma - Sin.\,\beta\ Sin.\,\gamma}{Cos.\,\beta\ Cos.\,\gamma} = -1 + Tang.\,\beta\ Tang.\,\gamma,$$

$$Sec.^2\,x = 1 + Tang.^2\,x = Tang.\,\beta\ Tang.\,\gamma,$$

of ook $$Cos.^2\,x = \frac{1}{Sec.^2\,x} = Cot.\,\beta\ Cot.\,\gamma;$$

zoodat wij in plaats van (4) hebben:

$$\left.\begin{aligned} Cos.^2\,x &= Cot.\,\beta\ Cot.\,\gamma,\\ Cos.^2\,y &= Cot.\,\alpha\ Cot.\,\gamma,\\ Cos.^2\,z &= Cot.\,\alpha\ Cot.\,\beta. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Onderstellen wij, dat de straal van den bol des bolvormigen driehoeks QRS gelijk aan de ribbe van den cubus genomen is, dan zijn Q, R en S de hoekpunten van dat ligchaam die het naast bij P liggen; de loodlijnen QQ', RR' en SS', uit die punten op het horizontale vlak MN nedergelaten, zijn dan hunne

Digitized by Google

hoogten boven het horizontale vlak, terwijl PQ', PR' en PS' de projectiën op het horizontale vlak zijn, van de in P zamenkomende ribben van den cubus. De lengte van die ribben a noemende, hebben wij dan, voor de hoogten der punten Q, R en S boven het horizontale vlak:

$$\left.\begin{aligned} QQ' &= a\ Cos.\ x = a\sqrt{Cot.\beta\ Cot.\gamma}, \\ RR' &= a\ Cos.\ y = a\sqrt{Cot.\alpha\ Cot.\gamma}, \\ SS' &= a\ Cos.\ z = a\sqrt{Cot.\alpha\ Cot.\beta}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en voor de lengten van de projectiën der in P zamenkomende ribben:

$$\left.\begin{aligned} PQ' &= a\ Sin.\ x = a\sqrt{(1 - Cot.\beta\ Cot.\gamma)}, \\ PR' &= a\ Sin.\ y = a\sqrt{(1 - Cot.\alpha\ Cot.\gamma)}, \\ PS' &= a\ Sin.\ z = a\sqrt{(1 - Cot.\alpha\ Cot.\beta)}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Aanmerkingen. 1°. Omdat $\alpha+\beta+\gamma = 360°$ is, hebben wij de bekende betrekking $Cot.\beta\ Cot.\gamma + Cot.\alpha\ Cot.\gamma + Cot.\alpha\ Cot.\beta = 1$ (zie mijne *Beg. der Meetk.*, § 252). Dienvolgens vinden wij dan uit (5), (6) en (7):

$$Cos.^2 x + Cos.^2 y + Cos.^2 z = 1,$$

$$QQ'^2 + RR'^2 + SS'^2 = a^2,$$

en

$$PQ'^2 + PR'^2 + PS'^2 = 2a^2.$$

De eerste vergelijking brengt ons terug op de bekende eigenschap, dat de som der vierkanten van de cosinussen der hoeken, die eene lijn met drie onderling regthoekige lijnen vormt, gelijk aan de eenheid is. De tweede en derde vergelijking leeren ons, dat wanneer een cubus met een zijner hoekpunten op een horizontaal vlak geplaatst wordt, de vierkanten van de hoogten der aangrenzende hoekpunten boven het horizontale vlak, te zamen genomen, gelijk aan het vierkant op de ribbe zijn; terwijl de som van de vierkanten der horizontale projectiën, van de drie aan dat hoekpunt sluitende ribben, tweemaal zoo groot is.

2°. De ribbe a van den cubus en de stompe hoeken α, β en γ gegeven zijnde, kunnen de lijnen, tot wier berekening de formulen (6) en (7) dienen, gemakkelijk geconstrueerd worden. Volgens (6) namelijk is QQ' eene middenevenredige tusschen $-a\ Cot.\beta$ en $-a\ Cot.\gamma$, en verder is PQ' de tweede regthoekszijde van een regthoekigen driehoek, die de genoemde middenevenredige tot eerste regthoekszijde en de ribbe van den cubus tot hypothenusa heeft.

Laat b.v. in Fig. 155 het vlak der teekening het horizontale vlak zijn, waarin de bedoelde lijnen PA', PB en PC getrokken

Digitized by Google

zijn, en dus de hoeken BPC, APC en APB de werkelijke grootte hebben der hoeken α, β en γ, die in Fig. 154 slechts perspectievisch zijn voorgesteld geworden. Trekken wij dan evenwijdig met PA eene lijn, die daarvan op een afstand gelijk aan de ribbe a van den cubus verwijderd is, en die de lijnen PB en PC of haar verlengde ergens in D en E snijden zal; trekken wij vervolgens $DF = EG = a$ loodregt op PA, beschrijven wij op FG als middellijn een halven cirkel, stellen wij uit P op PA eene loodlijn PH, den omtrek in H ontmoetende; en beschrijven wij uit H met $HQ' = a$ als straal een boogje, dat PA ergens in Q' zal snijden, dan is PQ' de projectie, op het vlak der teekening, van eene ribbe van den cubus, terwijl PH de hoogte boven dat vlak aanwijst, van het zich in Q' projecterende hoekpunt. Immers volgens deze constructie is:

$$PG = EG \times Cot.EPG = a\ Cot.(180° - \beta) = -a\ Cot.\beta,$$
$$PF = DF \times Cot.DPF = a\ Cot.(180° - \gamma) = -a\ Cot.\gamma,$$
$$PH = \sqrt{PG \times PF} = a\sqrt{Cot.\beta\ Cot.\gamma},$$
$$PQ' = \sqrt{(HQ'^2 - PH^2)} = a\sqrt{(1 - Cot.\beta\ Cot.\gamma)}.$$

Even als wij hier het punt Q' in de lijn PA geconstrueerd hebben, kunnen wij ook de punten R' en S' in PB en PC construeren; en zoo wij dan verder lijnen, uit Q' evenwijdig met PB en PC, uit R' evenwijdig met PA en PC, uit S' evenwijdig met PA en PB trekken, verkrijgen wij de geheele projectie van den cubus, welks ribbe $a = DF$ is, en welks in P zamenkomende ribben zich langs de vooraf getrokkene lijnen PA, PB en PC projecteren.

3°. In de *isometrische perspectief* maakt men gebruik van drie lijnen PA, PB en PC, die twee aan twee hoeken van 120° met elkander maken, en langs welke zich de ribben projecteren van eenen cubus, die in het punt P met zijnen diagonaal loodregt op het vlak der teekening staat (zie H. Strootman, *Gronden der Beschr. Meetk. voor de Kon. Mil.-Akademie*, 2de druk, § 436 tot 442).

Uit het voorgaande volgt nu, dat men, tot het vervaardigen van dergelijke perspectievische teekeningen, even goed drie lijnen PA, PB en PC kan bezigen, die twee aan twee willekeurige stompe hoeken met elkander maken. Hiertoe zal men vooreerst, voor eene willekeurige waarde van $a = DF$, de punten Q', R' en S' in deze lijnen, door de bovenaangewezene constructie dienen te bepalen. En verder zal men dan de werkelijke afstanden, van

Digitized by Google

eenig in perspectief te brengen punt tot drie onderling loodregte vlakken, niet allen in dezelfde verhouding, en wel in verhouding van 1 tot $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, tot perspectiviesche afstanden moeten herleiden; maar deze herleiding zal voor de afstanden, zoo als zij op de lijnen PA, PB en PC gemeten worden, respectievelijk moeten plaats hebben in reden van DF tot PQ', van DF tot PR', en van DF tot PS'.

CCXVI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Uit een punt P, *buiten het vlak van een gegeven parallelogram* ABCD (Fig. 156), *heeft men loodlijnen laten vallen op de zijden* AB *en* AD, *en op den diagonaal* AC. *Indien nu de voetpunten van twee dezer loodlijnen gegeven zijn, begeert men daaruit het voetpunt van de derde loodlijn te vinden.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. L. Ivangh, J. S. Spruijt *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten B', C' en D' respectievelijk de voetpunten zijn der loodlijnen, uit het punt P op AB, AC en AD neergelaten; indien men dan de lijn AP trekt, zijn AB'P, AC'P en AD'P regthoekige driehoeken, die allen eene zelfde schuine zijde AP gemeen hebben. Zoo men dus eenen bol beschrijft, die AP tot middellijn heeft, zal het oppervlak van dien bol, behalve door de punten A en P, ook nog door de punten B', C' en D' gaan; de kleine cirkel, volgens welken dit oppervlak door het vlak des parallelograms gesneden wordt, moet dan ook door de vier punten A, B', C' en D' gaan. Indien er dus, van de drie punten B', C' en D', twee gegeven zijn, zal men slechts door deze twee gegevene punten en het punt A eenen cirkel behoeven te brengen, om door de snijding van dien cirkel met de zijde of diagonaal, waarop de derde loodlijn valt, het voetpunt van die derde loodlijn te vinden.

Om door berekening de onderlinge afhankelijkheid van de voetpunten B', C' en D' te bepalen, onderstellen wij dat het parallelogram gegeven is door zijne zijden AB $= a$, AD $= b$, benevens den diagonaal AC $= c$, en dat men uit deze gegevens wil vinden, hoe de afstanden AB' $= x$, AD' $= y$ en AC' $= z$ van elkander afhangen. Stellen wij daartoe nog *hoek* BAC $= \phi$ en *hoek* DAC $= \phi'$, dan hebben wij, na B'C' en C'D' getrokken te hebben:

uit den drichoek AB'C', *Tang.* AB'C' $= \dfrac{z\ Sin.\ \phi}{x - z\ Cos.\ \phi}$,

Digitized by Google

en uit den driehoek AD'C', $Tang.\,AD'C' = \frac{z\ Sin.\,\phi'}{y - z\ Cos.\,\phi'}$;

maar om den vierhoek AB'C'D' kan een cirkel beschreven worden; dus zijn de hoeken AB'C' en AD'C' elkanders supplementen, en bijgevolg hebben wij

$$Tang.\,AB'C' = -\ Tang.\,AD'C',$$

of $$\frac{z\ Sin.\,\phi}{x - z\ Cos.\,\phi} = -\frac{z\ Sin.\,\phi'}{y - z\ Cos.\,\phi'},$$

dat is, na deeling door z en verdrijving der breuken,

$$y\ Sin.\,\phi - z\ Sin.\,\phi\ Cos.\,\phi' = -x\ Sin.\,\phi' + z\ Sin.\,\phi'\ Cos.\,\phi,$$

$$x\ Sin.\,\phi' + y\ Sin.\,\phi = z\ Sin.\,(\phi + \phi'),$$

of $$x\frac{Sin.\,\phi'}{Sin.\,(\phi + \phi')} + y\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(\phi + \phi')} = z.$$

Uit de beide driehoeken, waarin het parallelogram door den diagonaal AC verdeeld is, volgt verder:

$$AB : AC = Sin.\,ACB : Sin.\,ABC = Sin.\,DAC : Sin.\,BAD,$$

en

$$AD : AC = Sin.\,ACD : Sin.\,ADC = Sin.\,BAC : Sin.\,BAD,$$

dat is $$a : c = Sin.\,\phi' : Sin.\,(\phi + \phi'),$$

en $$b : c = Sin.\,\phi : Sin.\,(\phi + \phi');$$

derhalve is dan

$$\frac{Sin.\,\phi'}{Sin.\,(\phi + \phi')} = \frac{a}{c} \text{ en } \frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(\phi + \phi')} = \frac{b}{c},$$

waardoor de reeds gevondene vergelijking tusschen x, y en z overgaat in $$ax + by = cz.$$

Indien er dus van de drie afstanden x, y en z twee gegeven zijn, kan men door deze eenvoudige vergelijking onmiddellijk de derde berekenen.

CCXVII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Indien S_1, S_2, S_3, S_4, ***enz. respectievelijk de sommen voorstellen van de*** 1ste, 2de, 3de, 4de ***magten enz. der natuurlijke getallen van*** 1 ***tot*** n ***ingesloten, begeert men eene algemeene en regelmatige formule te vinden, waardoor men elke som*** S_m, ***uit een zeker aantal voorgaande sommen kan berekenen.***

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* J. S. Spreijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Indien wij de binomiaal-coefficiënten, tot de p^{de} magt behoorende, volgens eene gebruikelijke notatie door $\binom{1}{p}$, $\binom{2}{p}$, $\binom{3}{p}$, enz.

Digitized by Google

voorstellen, zoodat $\binom{1}{p} = \frac{1}{p}$, $\binom{2}{p} = \frac{p\,(p-1)}{1.2}$, $\binom{3}{p} = \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1.2.3}$,

en in het algemeen $\binom{r}{p} = \frac{p\,(p-1)\,(p-2).....(p-r+1)}{1.2.3.....r}$

is, hebben wij, volgens de binomiaal-formule:

$$(1+1)^p = 1^p + \binom{1}{p}1^{p-1} + \binom{2}{p}1^{p-2} + \binom{3}{p}1^{p-3} + ... + \binom{2}{p}1^2 + \binom{1}{p}1 + 1,$$

$$(2+1)^p = 2^p + \binom{1}{p}2^{p-1} + \binom{2}{p}2^{p-2} + \binom{3}{p}2^{p-3} + ... + \binom{2}{p}2^2 + \binom{1}{p}2 + 1,$$

$$(3+1)^p = 3^p + \binom{1}{p}3^{p-1} + \binom{2}{p}3^{p-2} + \binom{3}{p}3^{p-3} + ... + \binom{2}{p}3^2 + \binom{1}{p}3 + 1,$$

enz..... enz..... tot

$$(n+1)^p = n^p + \binom{1}{p}n^{p-1} + \binom{2}{p}n^{p-2} + \binom{3}{p}n^{p-3} + ... + \binom{2}{p}n^2 + \binom{1}{p}n + 1.$$

Tellen wij nu deze vergelijkingen, wier aantal n is, bij elkander op, dan kunnen wij in de som, het eerste lid van elke vergelijking, op de laatste na, tegen den eersten term van het tweede lid der volgende vergelijking weglaten; met in 't oog-houding der beteekenis, die wij volgens de opgaaf aan S_1, S_2, S_m gegeven hebben, verkrijgen wij dan, door die optelling,

$$(n+1)^p = 1 + \binom{1}{p}S_{p-1} + \binom{2}{p}S_{p-2} + \binom{3}{p}S_{p-3} + ... + \binom{2}{p}S_2 + \binom{1}{p}S_1 + n. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In deze vergelijking, die voor alle geheele positieve waarden van p doorgaat, mogen wij p door $p+1$ vervangen; dit geeft dan

$$(n+1)^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}S_p + \binom{p+1}{2}S_{p-1} + \binom{p+1}{3}S_{p-2} + ... + \binom{p+1}{2}S_2 + \binom{p+1}{1}S_1 + n. \quad (2)$$

Digitized by Google

en trekken wij nu (1) van (2) af, daarbij in het oog houdende, dat men in het algemeen heeft $\binom{r}{p+1} = \binom{r}{p} + \binom{r-1}{p}$, dan komt er, alzoo $(n+1)^{p+1} - (n+1)^p = n(n+1)^p$ is,

$$n(n+1)^p = S_p + \binom{1}{p} S_p + \binom{2}{p} S_{p-1} + \binom{3}{p} S_{p-2} + \ldots\ldots + \binom{2}{p} S_3 + \binom{1}{p} S_2 + S_1,$$

waarvoor wij, tot bevordering van regelmatigheid, kunnen schrijven

$$n(n+1)^p = \left\{\begin{array}{l} -S_{p+1} + S_p \\ +S_{p+1} + \binom{1}{p} S_p + \binom{2}{p} S_{p-1} + \binom{3}{p} S_{p-2} + \ldots\ldots + \binom{2}{p} S_3 + \binom{1}{p} S_2 + S_1 \end{array}\right\}. \quad (3)$$

In deze vergelijking, die wederom voor alle geheele positieve waarden van p geldt, mogen wij nogmaals p door $p+1$ vervangen; dit geeft

$$n(n+1)^{p+1} = \left\{\begin{array}{l} -S_{p+2} + S_{p+1} \\ +S_{p+2} + \binom{1}{p+1} S_{p+1} + \binom{2}{p+1} S_p + \ldots\ldots + \binom{2}{p+1} S_3 + \binom{1}{p+1} S_2 + S_1 \end{array}\right\}. \quad (4)$$

en zoo wij nu wederom (3) van (4) aftrekken, zonder daarbij de termen, die wij in de bovenste regels geplaatst hebben, met de overigen te vermengen, komt er, omdat $n(n+1)^{p+1} - n(n+1)^p = n^2(n+1)^p$ is,

$$n^2(n+1)^p = \left\{\begin{array}{l} -S_{p+2} + 2S_{p+1} - S_p \\ +S_{p+2} + \binom{1}{p} S_{p+1} + \binom{2}{p} S_p + \binom{3}{p} S_{p-1} + \ldots\ldots + \binom{2}{p} S_4 + \binom{1}{p} S_3 + S_2 \end{array}\right\}. \quad (5)$$

Hierin weder p door $p+1$ vervangende, hebben wij

Digitized by Google

$$n^2\,(n+1)^{p+1} = \left\{\begin{array}{l} -\,S_{p+3} + 2S_{p+2} - S_{p+1} \\ +\,S_{p+3} + \binom{1}{p+1}\,S_{p+2} + \binom{2}{p+1}\,S_{p+1} + \ldots\ldots + \binom{2}{p+1}\,S_4 + \binom{1}{p+1}\,S_3 + S_2 \end{array}\right\}. \quad (6)$$

en vervolgens ook weder (5) van (6) aftrekkende, vinden wij

$$n^2\,(n+1)^p = \left\{\begin{array}{l} -\,S_{p+3} + 3S_{p+2} - 3S_{p+1} + S_p \\ +\,S_{p+3} + \binom{1}{p}\,S_{p+2} + \binom{2}{p}\,S_{p+1} + \ldots\ldots + \binom{2}{p}\,S_4 + \binom{1}{p}\,S_3 + S_2 \end{array}\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

kunnende men op deze wijze zoo ver voortgaan als men goedvindt. De uitkomst, waartoe men zoodoende geraakt, is gemakkelijk na te gaan. Immers in al de vergelijkingen (3), (5) en (7) begint elke regel van het tweede lid met eenen term S_m, waarin m gelijk is aan het gezamenlijk aantal factoren n en $n+1$ van het eerste lid, terwijl de verdere termen van elken regel achtervolgens sommen S_m bevatten, waarin m telkens eene eenheid kleiner wordt; voorts zijn de coëfficiënten van den eersten regel, de binomiaal-coëfficiënten (met afwisselende teekens genomen) behoorende tot de zooveelste magt als het aantal factoren n van het eerste lid bedraagt; terwijl de coëfficiënten van den tweeden regel, de binomiaal-coëfficiënten zijn behoorende tot de zooveelste magt als het aantal factoren $n+1$ is, in het eerste lid begrepen. Deze eigenschap der vergelijkingen (3), (5) en (7) zal blijkbaar blijven stand houden, in de vergelijkingen die wij, op de bovengevolgde manier voortgaande, ter bepaling van $n^4\,(n+1)^p$, $n^5\,(n+1)^p$, enz. zouden verkrijgen. Derhalve is dan in het algemeen

$$n^q\,(n+1)^p = \left\{\begin{array}{l} -\,S_{p+q} + \binom{1}{q}\,S_{p+q-1} - \binom{2}{q}\,S_{p+q-2} + \binom{3}{q}\,S_{p+q-3} - \text{enz.} \\ +\,S_{p+q} + \binom{1}{p}\,S_{p+q-1} + \binom{2}{p}\,S_{p+q-2} + \binom{3}{p}\,S_{p+q-3} - \text{enz.} \end{array}\right\},$$

of wel $n^q\,(n+1)^p = \left\{\binom{1}{p} + \binom{1}{q}\right\}\,S_{p+q-1} + \left\{\binom{2}{p} - \binom{2}{q}\right\}\,S_{p+q-2} + \left\{\binom{3}{p} + \binom{3}{q}\right\}\,S_{p+q-3} + \text{enz.}; \quad (A)$

Digitized by Google

zijnde het onnoodig in deze formule den laatsten term aan te wijzen, daar zij blijkbaar moet voortgezet worden tot dat de daarin voorkomende binomiaal-coëfficiënten nul worden.

Neemt men nu $p + q = m + 1$, dan verschaft de vergelijking (A) dadelijk het middel, om de som S_m uit eenige voorgaande sommen S_{m-1}, S_{m-2}, enz. te berekenen. Daar echter p en q, mits slechts $p + q = m + 1$ zij, overigens geheel willekeurig kunnen genomen worden, geeft de vergelijking (A) het middel om de som S_m op verschillende wijzen, uit een zeker aantal voorgaande sommen te vinden. Om b.v. S_4 te berekenen, moeten wij in (A) $p + q = 5$ stellen; maar nu mogen wij $q = 1$ en $p = 4$, of $q = 2$ en $p = 3$, enz., nemen.

Wij hebben dan: voor $q = 1$ en $p = 4$,

$$n(n+1)^4 = 5S_4 + 6S_3 + 4S_2 + S_1,$$

dus $S_4 = \frac{1}{5}\{n(n+1)^4 - 6S_3 - 4S_2 - S_1\}$;

voor $q = 2$ en $p = 3$,

$$n^2(n+1)^3 = 5S_4 + 2S_3 + S_2,$$

dus $S_4 = \frac{1}{5}\{n^2(n+1)^3 - 2S_3 - S_2\}$;

voor $q = 3$ en $p = 2$,

$$n^3(n+1)^2 = 5S_4 - 2S_3 + S_2,$$

dus $S_4 = \frac{1}{5}\{n^3(n+1)^2 + 2S_3 - S_2\}$,

voor $q = 4$ en $p = 1$,

$$n^4(n+1) = 5S_4 - 6S_3 + 4S_2 - S_1,$$

dus $S_4 = \frac{1}{5}\{n^4(n+1) + 6S_3 - 4S_2 + S_1\}$.

Ten aanzien der vergelijking (A) merken wij nog op, dat zij niets anders dan de algemeene voorstelling der verschillende vergelijkingen (3), (5), (7), enz. is, zoodat dan ook (A) in (3), (5), (7) overgaat, wanneer men respectievelijk $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$ stelt. Voor $q = 0$, kan dan ook de vergelijking (A) niet meer gelden, evenmin als voor $p = 0$; zoo men $q = 0$ wilde nemen, zou men in plaats van (A) de vergelijking (1) moeten bezigen. Voor $p = 5$ geeft (1) dan

$$(n+1)^5 = 1 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + n,$$

en dus $S_4 = \frac{1}{5}\{(n+1)^5 - (n+1) - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1\}$;

zoodat wij nu S_4 op vijf verschillende wijzen in voorgaande sommen uitgedrukt hebben.

Stellen wij in (1) achtervolgens $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$, enz., zoo komt er:

Digitized by Google

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n,$$
$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$
$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n, \text{ enz.,}$$

waaruit volgt:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\{(n+1)^2 - (n+1)\},$$
$$S_2 = \tfrac{1}{3}\{(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1\},$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\{(n+1)^4 - (n+1) - 6S_2 - 4S_1\}, \text{enz.;}$$

hieruit blijkt nu dadelijk, dat wanneer men, door achtervolgende substitutiën, de waarden van S_2, S_3, enz. in n alleen uitdrukt, deze uitdrukkingen alle den factor $n(n+1)$ zullen bevatten. Men zal namelijk vinden:

$$S_1 = \tfrac{1}{2} n(n+1),$$
$$S_2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$
$$S_4 = \tfrac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1),$$
$$S_5 = \tfrac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1),$$
$$S_6 = \tfrac{1}{42} n(n+1)(6n^5 + 15n^4 + 6n^3 - 6n^2 - n + 1),$$
$$S_7 = \tfrac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2),$$

enz. enz.

Indien m oneven en dus $p + q = m + 1$ een even getal is, kan men $q = p$ nemen; de vergelijking (A) wordt dan

$$n^p(n+1)^p = 2\binom{1}{p}S_{2p-1} + 2\binom{3}{p}S_{2p-3} + 2\binom{5}{p}S_{2p-5} + \text{enz.;} \quad (B)$$

nemen wij hierin achtervolgens $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$, enz., zoo komt er:

$$n^2(n+1)^2 = 4S_2,$$
$$n^3(n+1)^3 = 6S_5 + 2S_2,$$
$$n^4(n+1)^4 = 8S_7 + 8S_5,$$
$$n^5(n+1)^5 = 10S_9 + 20S_7 + 2S_5,$$
$$n^6(n+1)^6 = 12S_{11} + 40S_9 + 12S_7,$$
$$n^7(n+1)^7 = 14S_{13} + 70S_{11} + 42S_9 + 2S_7,$$
$$n^8(n+1)^8 = 16S_{15} + 112S_{13} + 112S_{11} + 16S_9,$$

enz. enz.,

waaruit volgt:

$$S_2 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$
$$S_5 = \tfrac{1}{6} n^3 (n+1)^3 - \tfrac{1}{3} S_2,$$
$$S_7 = \tfrac{1}{8} n^4 (n+1)^4 - S_5,$$
$$S_9 = \tfrac{1}{10} n^5 (n+1)^5 - \tfrac{1}{2} S_7 - \tfrac{1}{5} S_5,$$
$$S_{11} = \tfrac{1}{12} n^6 (n+1)^6 - \tfrac{10}{3} S_9 - S_7,$$

enz. enz.;

Digitized by Google

hieruit blijkt, dat de sommen S_5, S_7, S_9, S_{11}, enz., wanneer men ze in n alleen uitdrukt, allen den factor $n^2(n+1)^2$ zullen bevatten. En dat verder de sommen van onevenen rang, door S_{4r+1} en S_{4r+3} voorgesteld, op eene eenvoudige wijze in r voorgaande dergelijke sommen kunnen uitgedrukt worden.

In de vergelijking (A) mogen wij p en q met elkander verwisselen; wij hebben dan niet alleen

$$n^q(n+1)^p = \left\{\binom{1}{p}+\binom{1}{q}\right\} S_{p+q-1} + \left\{\binom{2}{p}-\binom{2}{q}\right\} S_{p+q-2} + \left\{\binom{3}{p}+\binom{3}{q}\right\} S_{p+q-3} + \text{enz.},$$

maar ook $$n^p(n+1)^q = \left\{\binom{1}{p}+\binom{1}{q}\right\} S_{p+q-1} - \left\{\binom{2}{p}-\binom{2}{q}\right\} S_{p+q-2} + \left\{\binom{3}{p}+\binom{3}{q}\right\} S_{p+q-3} - \text{enz.};$$

door nu van deze vergelijkingen de som en het verschil te nemen, hebben wij

$$n^q(n+1)^p + n^p(n+1)^q = 2\left\{\binom{1}{p}+\binom{1}{q}\right\} S_{p+q-1} + 2\left\{\binom{3}{p}+\binom{3}{q}\right\} S_{p+q-3} + \text{enz.} \quad \ldots\ldots (C)$$

en $$n^q(n+1)^p - n^p(n+1)^q = 2\left\{\binom{2}{p}-\binom{2}{q}\right\} S_{p+q-2} + 2\left\{\binom{4}{p}-\binom{4}{q}\right\} S_{p+q-4} + \text{enz.}; \quad \ldots\ldots (D)$$

welke vergelijkingen dan dienen kunnen, om eenige som S_m van evenen rang, in eenige voorgaande dergelijke sommen uit te drukken. Hiertoe zal men voor p en q slechts zulke getallen behoeven te nemen, dat $p+q$ oneven of even zij, naar gelang men (C) of (D) verkiest te gebruiken; zullende echter p niet gelijk q kunnen genomen worden.

Zoo hebben wij b.v. uit (C): voor $p=2$ en $q=1$,

$$n(n+1)^2 + n^2(n+1) = 6\,S_3;$$

voor $p=4$ en $q=1$, $\quad n(n+1)^4 + n^4(n+1) = 10\,S_5 + 8\,S_3;$

voor $p=3$ en $q=2$, $\quad n^2(n+1)^3 + n^3(n+1)^2 = 10\,S_5 + 2\,S_3;$

voor $p=6$ en $q=1$, $\quad n(n+1)^6 + n^6(n+1) = 14\,S_7 + 40\,S_5 + 12\,S_3;$

Digitized by Google

voor $p = 5$ en $q = 2$;

$$n^2 (n+1)^5 + n^5 (n+1)^2 = 14\, S_6 + 20\, S_4 + 2\, S_2;$$

voor $p = 4$ en $q = 3$,

$$n^3 (n+1)^4 + n^4 (n+1)^3 = 14\, S_6 + 10\, S_4;$$

enz. enz.

Desgelijks hebben wij uit (D): voor $p = 3$ en $q = 1$,

$$n (n+1)^3 - n^3 (n+1) = 6\, S_2;$$

voor $p = 5$ en $q = 1$,

$$n (n+1)^5 - n^5 (n+1) = 20\, S_4 + 10\, S_2;$$

voor $p = 4$ en $q = 2$,

$$n^2 (n+1)^4 - n^4 (n+1)^2 = 10\, S_4 + 2\, S_2;$$

voor $p = 7$ en $q = 1$,

$$n (n+1)^7 - n^7 (n+1) = 42\, S_6 + 70\, S_4 + 14\, S_2;$$

voor $p = 6$ en $q = 2$,

$$n^2 (n+1)^6 - n^6 (n+1)^2 = 28\, S_6 + 30\, S_4 + 2\, S_2;$$

voor $p = 5$ en $q = 3$,

$$n^3 (n+1)^5 - n^5 (n+1)^3 = 14\, S_6 + 10\, S_4;$$

enz. enz.

CCXVIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Te integreren $\partial y = \dfrac{x \partial x \sqrt{x}}{3ax^2 - 3a^2 x + a^3}$.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Sprijer, J. Bassan *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stelt men $x = z^2$, en dus $\partial x = 2z\partial z$, zoo gaat de opgegevene vergelijking over in

$$\partial y = \frac{2z^4 \partial z}{3az^4 - 3a^2 z^2 + a^3} = \frac{2}{3a} \cdot \frac{z^4}{z^4 - az^2 + \frac{1}{3}a^2} \partial z =$$

$$= \frac{2}{3a}\left\{1 + \frac{az^2 - \frac{1}{3}a^2}{z^4 - az^2 + \frac{1}{3}a^2}\right\} \partial z = \frac{2\partial z}{3a} + \frac{2}{3} \frac{z^2 - \frac{1}{3}a}{z^4 - az^2 + \frac{1}{3}a^2} \partial z,$$

en hieruit volgt dan vooreerst

$$y = \frac{2z}{3a} + \frac{2}{3} \int \frac{z^2 - \frac{1}{3}a}{z^4 - az^2 + \frac{1}{3}a^2} \partial z. \quad \ldots \quad (1)$$

De noemer $z^4 - az^2 + \frac{1}{3}a^2$ kan in geen bestaanbare eerstemagtsfactoren ontbonden worden; maar om denzelven in twee bestaanbare tweedemagtsfactors te ontbinden, kan men stellen

$$z^4 - az^2 + \tfrac{1}{3}a^2 = (z^2 + pz + \tfrac{1}{3}a\sqrt{3})(z^2 + qz + \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}),$$

en men zal dan vinden

$$p = -q = \sqrt{(a + \tfrac{2}{3}a\sqrt{3})}; \quad \ldots \quad (2)$$

Digitized by Google

stelt men verder

$$\frac{z^2-\frac{1}{3}a}{z^4-az^2+\frac{1}{3}a^2}=\frac{Mz+N}{z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}}+\frac{Pz+Q}{z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}},$$

dan zal men vinden

$$M=-P=-\frac{3+\sqrt{3}}{6p} \text{ en } N=Q=-\frac{\sqrt{3}}{6};$$

alzoo is

$$\frac{z^2-\frac{1}{3}a}{z^4-az^2+\frac{1}{3}a^2}=\frac{(3+\sqrt{3})z-p\sqrt{3}}{6p(z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})}-\frac{(3+\sqrt{3})z+p\sqrt{3})}{6p(z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})},$$

en brengt men deze waarde in (1) over, zoo bekomt men

$$y=\frac{2z}{3a}+\frac{1}{9p}\int\frac{(3+\sqrt{3})z-p\sqrt{3}}{z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z-\frac{1}{9p}\int\frac{(3+\sqrt{3})z+p\sqrt{3}}{z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z. \quad (3)$$

Maar in het algemeen is (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int.-Rek.*, § 179)

$$\int\frac{A+Bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}\partial z=\frac{B}{\gamma}\,Nep.\,Log.\sqrt{\frac{4\gamma(\alpha+\beta z+\gamma z^2)}{4\alpha\gamma-\beta^2}}+\frac{2\gamma A-\beta B}{\gamma\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}\,Boog\,Tang.\frac{\beta+2\gamma z}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}};$$

neemt men, in deze formule,

$A=-p\sqrt{3}$, $B=3+\sqrt{3}$, $\alpha=\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\beta=-p$ en $\gamma=1$,

zoo komt er

$$\int\frac{(3+\sqrt{3})z-p\sqrt{3}}{z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z=(3+\sqrt{3})\,Nep.\,Log.\frac{6\sqrt{(z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}+\frac{9p-3p\sqrt{3}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}\,Boog\,Tang.\frac{6z-3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}, \quad (4)$$

en schrijft men vervolgens $-p$ in plaats van p, dan vindt men nog

$$\int\frac{(3+\sqrt{3})z+p\sqrt{3}}{z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z=(3+\sqrt{3})\,Nep.\,Log.\frac{6\sqrt{(z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}-\frac{9p-3p\sqrt{3}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}\,Boog\,Tang.\frac{6z+3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}. \quad (5)$$

Alsnu de waarden (4) en (5) overbrengende in (3), verkrijgt men

$$y=\frac{2z}{3a}+$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{9p}\left\{N.\,Log.\frac{6\sqrt{(z^2-pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}-N.Log.\frac{6\sqrt{(z^2+pz+\frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}\right\}+\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}\times$$

$$\left\{Boog\,Tang.\frac{6z-3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}+Boog\,Tang.\frac{6z+3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3}-9p^2)}}\right\};$$

Digitized by Google

of, door toepassing der bekende formulen

$$Log.\,m - Log.\,n = Log.\frac{m}{n}$$

en $Boog\ Tang.\,m + Boog\ Tang.\,n = Boog\ Tang.\frac{m+n}{1-mn}$,

$$y = \frac{2z}{3a} + \frac{3+\sqrt{3}}{9p}\ Nep.\,Log.\sqrt{\frac{z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}{z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}}$$
$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\ Boog\ Tang.\ \frac{z\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}{a\sqrt{3} - 3z^2}.$$

Hierin vervolgens wederom $z^2 = x$ of $z = \sqrt{x}$ en $p = \sqrt{(a + \frac{2}{3}a\sqrt{3})}$ substituerende, komt er eindelijk:

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{3a} + \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3a}}\ N.\,Log.\sqrt{\frac{3x - \sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3ax} + a\sqrt{3}}{3x + \sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3ax} + a\sqrt{3}}}$$
$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3a}}\ Boog\ Tang.\ \frac{\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3ax}}{a\sqrt{3} - 3x}$$

of ook

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{3a} + \frac{1+\sqrt{3}}{6\sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{a}}\ Nep.\,Log.\frac{x\sqrt{3} - \sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{ax} + a}{x\sqrt{3} + \sqrt{(3+2\sqrt{3})}.\sqrt{ax} + a}$$
$$- \frac{1-\sqrt{3}}{3\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{a}}\ Boog\ Tang.\ \frac{\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{ax}}{a - x\sqrt{3}}.$$

CCXIX. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Te integreren $\partial y = \dfrac{(x-a)\,\partial x\sqrt{(x-a)}}{3ax^2 - 3a^2x + a^3}$.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Spreijer, J. Bassan *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stelt men $x - a = z^2$, dus $x = a + z^2$ en $\partial x = 2z\partial z$, zoo gaat de hier opgegevene vergelijking over in

$$\partial y = \frac{2z^4\partial z}{3az^4 + 3a^2z^2 + a^3} = \frac{2}{3a}\cdot\frac{z^4}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2}\partial z =$$
$$= \frac{2}{3a}\left\{1 - \frac{az^2 + \frac{1}{3}a^2}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2}\right\}\partial z = \frac{2\partial z}{3a} - \frac{2}{3}\cdot\frac{z^2 + \frac{1}{3}a}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2}\partial z,$$

zoodat wij weder aanvankelijk hebben

$$y = \frac{2z}{3a} - \frac{2}{3}\int\frac{z^2 + \frac{1}{3}a}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2}\partial z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Verder denzelfden weg als in het voorgaande voorstel volgende, stellen wij vooreerst

$$z^4 + az^2 + \tfrac{1}{3}a^2 = (z^2 + pz + \tfrac{1}{3}a\sqrt{3})\,(z^2 + qz + \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}),$$

Digitized by Google

waaruit wij vinden

$$p = -q = \sqrt{(-a + \tfrac{2}{3}a\sqrt{3})}; \ldots . \quad (2)$$

en vervolgens

$$\frac{z^2 + \frac{1}{3}a}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2} = \frac{Mz + N}{z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}} + \frac{Pz + Q}{z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}},$$

hetgeen geeft

$$M = -P = -\frac{3 - \sqrt{3}}{6p}, \quad N = Q = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

en dus

$$\frac{z^2 + \frac{1}{3}a}{z^4 + az^2 + \frac{1}{3}a^2} = \frac{(3 - \sqrt{3})z + p\sqrt{3}}{6p(z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})} - \frac{(3 - \sqrt{3})z - p\sqrt{3}}{6p(z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})},$$

zoodat dan (1) overgaat in

$$y = \frac{2z}{3a} - \frac{1}{9p}\int\frac{(3-\sqrt{3})z + p\sqrt{3}}{z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z + \frac{1}{9p}\int\frac{(3-\sqrt{3})z - p\sqrt{3}}{z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z. \quad (3)$$

Nemen wij nu, in de algemeene waarde van $\int\frac{A + Bz}{\alpha + \beta z + \gamma z^2}\partial z$,

$A = p\sqrt{3}$, $B = 3 - \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$, $\beta = -p$ en $\gamma = 1$,

zoo verkrijgen wij

$$\int\frac{(3-\sqrt{3})z + p\sqrt{3}}{z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z = (3-\sqrt{3})\,Nep.Log.\frac{6\sqrt{(z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}$$
$$+ \frac{9p + 3p\sqrt{3}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\,Boog\ Tang.\frac{6z - 3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}; \ldots (4)$$

en ook, door hierin $-p$ voor p te schrijven

$$\int\frac{(3-\sqrt{3})z - p\sqrt{3}}{z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}\partial z = (3-\sqrt{3})\,Nep.Log.\frac{6\sqrt{(z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}$$
$$- \frac{9p + 3p\sqrt{3}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\,Boog\ Tang.\frac{6z + 3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}. \ldots (5)$$

De waarden (4) en (5) in (3) overbrengende, vinden wij

$$y = \frac{2z}{3a} +$$
$$\frac{3-\sqrt{3}}{9p}\left\{N.\ Log.\frac{6\sqrt{(z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}} - N.\ Log.\frac{6\sqrt{(z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3})}}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\right\}$$
$$- \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}} \times$$
$$\left\{Boog\,Tang.\frac{6z + 3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}} + Boog\,Tang.\frac{6z - 3p}{\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\right\},$$

dat is, zoo wij de logarithmen vereenigen, alsmede de bogen,

Digitized by Google

$$y = \frac{2z}{3a} + \frac{3 - \sqrt{3}}{9p}\ Nep.\ Log.\ \sqrt{\frac{z^2 + pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}{z^2 - pz + \frac{1}{3}a\sqrt{3}}} - \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}\ Boog\ Tang.\ \frac{z\sqrt{(12a\sqrt{3} - 9p^2)}}{a\sqrt{3} - 3z^2}.$$

Hierin nu weder voor z en p hare waarden, namelijk $z = \sqrt{(x - a)}$ en $p = \sqrt{(-a + \frac{1}{3}a\sqrt{3})}$, substituerende, komt er eindelijk: $y = \frac{2\sqrt{(x - a)}}{3a} +$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{3a}}\ Nep.Log.\sqrt{\frac{3(x-a)+\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}\sqrt{3a(x-a)}+a\sqrt{3}}{3(x-a)-\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}\sqrt{3a(x-a)}+a\sqrt{3}}} - \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}.\sqrt{3a}}\ Boog\ Tang.\ \frac{\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}.\sqrt{3a(x - a)}}{a\sqrt{3} - 3(x - a)},$$

of ook $y = \frac{2\sqrt{(x - a)}}{3a}$

$$- \frac{1 - \sqrt{3}}{6\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}\sqrt{a}}\ Nep.Log.\ \frac{(x-a)\sqrt{3}+\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{a(x-a)}+a}{(x-a)\sqrt{3}-\sqrt{(-3+2\sqrt{3})}.\sqrt{a(x-a)}+a} - \frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}.\sqrt{a}}\ Boog\ Tang.\ \frac{\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}.\sqrt{a(x - a)}}{a - (x - a)\sqrt{3}}.$$

CCXX. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Men verlangt den tijd te berekenen, dien de waterspiegel besteedt, om in een verticaal staand prismatisch vat, waarin het water niet wordt aangevuld, uit zeker peil tot een lager peil te dalen; wanneer deze daling het gevolg is van de uitvloeijing des waters, door eene in den verticalen wand aanwezige regthoekige opening, met horizontale boven- en benedenzijden. Onderstellende dat de opening op eene merkelijke diepte onder water blijft, maar te groot is om de hoogte des waterspiegels boven haar zwaartepunt, als' eene gemiddelde drukhoogte in rekening te mogen brengen.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz. *en* J. S. Spreijer.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Zij ABCD (Fig. 157) de verticale zijwand van het bedoelde prismatische vat, en onderstellen wij aanvankelijk, dat de uitvloeijing des waters plaats heeft door eene opening van willekeurige gedaante PMQN, welker hoogste en laagste punten door de horizontale lijnen EF en GH bepaald zijn.

Zij AB de stand van den waterspiegel bij het begin van den tijd, dien men beschouwen wil, en laat deze stand des water-

Digitized by Google

spiegels bepaald zijn, door zijne hoogte AG $= h$, boven den benedenkant der opening. Indien dan na verloop van zekeren tijd t, de waterspiegel in ab gekomen is, en dus in den tijd t eene daling Aa $= u$ ondergaan heeft, zal hij in een volgend tijddeeltje ∂t eene daling ∂u ondergaan, en de hoeveelheid water in dat tijddeeltje ∂t uitgevloeid, zal dan, indien de inhoud der standvastige horizontale doorsnede van het vat m is, uitgedrukt worden door $m\partial u$.

Deze hoeveelheid water mag men beschouwen als gedurende het tijddeeltje ∂t, onder een standvastigen waterspiegel ab, uit de opening PMQN gevloeid te zijn. Indien dus M de hoeveelheid water voorstelt, die, bij eene standvastige hoogte des waterspiegels ab, in ééne tijdseenheid door de opening uitvloeijen zou, en dus $M\partial t$ de hoeveelheid is in het tijddeeltje ∂t uitgevloeid, hebben wij

$$m\partial u = M\partial t. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Om de waarde van M te vinden, beschouwen wij eene differentiaal MNmn der opening, begrensd door twee horizontale lijnen, die op de afstanden ai $= y$ en ai' $= y + \partial y$ beneden ab genomen zijn. Zoo wij dan MN $= s$ stellen, is $s\partial y$ de inhoud van de differentaal der opening; uit deze differentiaal vloeit het water onder eene drukhoogte ai $= y$, en dus met eene snelheid voorgesteld door $n\sqrt{2gy}$; de hoeveelheid water, in ééne tijdseenheid door die differentiaal uitvloeijende, is alzoo

$$s\partial y \times n\sqrt{2gy},$$

en voor de hoeveelheid, die in eene tijdseenheid door de geheele opening uitvloeit, altijd in de onderstelling dat ab eene standvastige hoogte behoudt, hebben wij dan

$$M = \int s\partial y \times n\sqrt{2gy} = (n\sqrt{2g}) \int s\partial y\sqrt{y},$$

mits deze integraal van $y =$ aE tot $y =$ aG genomen worde; terwijl n een door proeven te bepalen coëfficiënt is.
Stellen wij dus aG $= x$ en EG $= a$, waardoor aE $= x - a$ wordt, zoo is

$$M = (n\sqrt{2g}) \int_{x-a}^{x} s\partial y\sqrt{y};$$

vóórts is nu

$$u = h - x \quad \text{en dus} \quad \partial u = -\partial x,$$

zoodat dan de vergelijking (1) overgaat in

$$-m\partial x = (n\sqrt{2g})\, \partial t \int_{x-a}^{x} s\partial y\sqrt{y},$$

Digitized by Google

waaruit volgt $\partial t = -\frac{m}{n\sqrt{2g}} \cdot \frac{\partial x}{\int_{x-a}^{x} x\partial y\sqrt{y}}$

en $$t = -\frac{m}{n\sqrt{2g}} \int \frac{\partial x}{\int_{x-a}^{x} x\partial y\sqrt{y}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Laat nu de vraag zijn om den tijd T te berekenen, gedurende welken de waterspiegel van AB tot A'B' daalt, en stellen wij $A'G = h'$, dan is T de waarde, die men volgens (2) voor t vindt, indien men de laatste integraal van $u = 0$ tot $u = h - h'$, dat is van $x = h$ tot $x = h'$ neemt; derhalve is dan

$$T = -\frac{m}{n\sqrt{2g}} \int_{h}^{h'} \frac{\partial x}{\int_{x-a}^{x} x\partial y\sqrt{y}},$$

of wel $$T = \frac{m}{n\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} \frac{\partial x}{\int_{x-a}^{x} x\partial y\sqrt{y}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Is nu de opening een regthoek, waarvan de boven- en benedenzijden horizontaal loopen, en waarvan behalve de hoogte $EG = a$ ook de breedte $MN = b$ gegeven is, dan is $z = b$ standvastig. Hierdoor verkrijgen wij

$$\int z\partial y\sqrt{y} = \int b\partial y\sqrt{y} = \tfrac{2}{3}\, by\sqrt{y} + Const.$$

en $$\int_{x-a}^{x} x\partial y\sqrt{y} = \tfrac{2}{3} b \left\{x\sqrt{x} - (x-a)\sqrt{(x-a)}\right\};$$

derhalve gaat dan de formule (3) over in

$$T = \frac{3m}{2nb\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} \frac{\partial x}{x\sqrt{x} - (x-a)\sqrt{(x-a)}}. \quad (4)$$

Maar nu hebben wij, door teller en noemer te vermenigvuldigen met $x\sqrt{x} + (x-a)\sqrt{(x-a)}$,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x} - (x-a)\sqrt{(x-a)}} = \int \frac{\partial x \left\{x\sqrt{x} + (x-a)\sqrt{(x-a)}\right\}}{\left\{x\sqrt{x}\right\}^2 - \left\{(x-a)\sqrt{(x-a)}\right\}^2} =$$

$$= \int \frac{x\partial x\sqrt{x}}{3ax^2 - 3a^2x + a^3} + \int \frac{(x-a)\partial x\sqrt{(x-a)}}{3ax^2 - 3a^2x + a^3},$$

en deze beide integralen hebben wij in de twee voorgaande voorstellen berekend; nemen wij dezelve naar behooren van $x = h'$ tot $x = h$, en stellen wij gemakshalve $h - a = k$, $h' - a = k'$, $3 + 2\sqrt{3} = c$ en $-3 + 2\sqrt{3} = d$, zoo verkrijgen wij:

Digitized by Google

voor de eerste $\frac{2}{3a}(\sqrt{h} - \sqrt{h'}) +$

$$+\frac{1+\sqrt{3}}{6\sqrt{ca}}\left\{N.\,Log.\,\frac{h\sqrt{3}-\sqrt{cah}+a}{h\sqrt{3}+\sqrt{cah}+a} - N.\,Log.\,\frac{h'\sqrt{3}-\sqrt{cah'}+a}{h'\sqrt{3}+\sqrt{cah'}+a}\right\}$$
$$-\frac{1-\sqrt{3}}{3\sqrt{da}}\left\{Boog\,Tang.\,\frac{\sqrt{dah}}{a-h\sqrt{3}} - Boog\,Tang.\,\frac{\sqrt{dah'}}{a-h'\sqrt{3}}\right\},$$

voor de tweede $\frac{2}{3a}(\sqrt{k} - \sqrt{k'}) -$

$$-\frac{1-\sqrt{3}}{6\sqrt{da}}\left\{N.\,Log.\,\frac{k\sqrt{3}+\sqrt{dak}+a}{k\sqrt{3}-\sqrt{dak}+a} - N.\,Log.\,\frac{k'\sqrt{3}+\sqrt{dak'}+a}{k'\sqrt{3}-\sqrt{dak'}+a}\right\}$$
$$-\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{ca}}\left\{Boog\,Tang.\,\frac{\sqrt{cak}}{a-k\sqrt{3}} - Boog\,Tang.\,\frac{\sqrt{cak'}}{a-k'\sqrt{3}}\right\},$$

en de som dezer waarden met $\frac{3m}{2nb\sqrt{2g}}$ vermenigvuldigd, zal dan den begeerden tijd T opleveren.

CCXXI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van een bol, benevens de horizontale doorgangen van twee vlakken, die dezen bol raken, begeert men de projectiën te construeren van een punt zijns oppervlaks, dat even ver van de beide rakende vlakken als van het middelpunt verwijderd is.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh *en* J. S. Spruijt.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten M′ en M″ (Fig. 158) de horizontale en verticale projectiën van het middelpunt des gegeven bols zijn, dan zal de as van projectie OX, door de vereenigingslijn M′M″ regthoekig gesneden worden in M, en MM″ zal de hoogte van het middelpunt des bols boven het horizontale vlak zijn. Laten verder A′A′ en B′B′ de gegevene horizontale doorgangen zijn, van de beide vlakken die den bol raken.

Trekken wij M′E loodregt op A′A′, en stellen wij uit M′, op M′E eene loodlijn $M'M_1 = MM''$; beschrijven wij uit M_1, met den straal des bols, eenen cirkel; trekken wij uit E eene raaklijn ER aan dien cirkel; daarna uit M_1, evenwijdig met die raaklijn, eene lijn M_1e, die M′E ergens in e ontmoeten zal; en eindelijk door het punt e eene lijn a′a′ evenwijdig met A′A′, dan zal a′a′ de horizontale doorgang zijn van een vlak, dat door het

Digitized by Google

middelpunt des bols gaat, en evenwijdig loopt met het rakende vlak waarvan A'A' de horizontale doorgang is. Want laat men den vierhoek $EM'M_1R$, met den in zijn vlak gelegen en uit M_1 beschreven cirkel M_1R, om de lijn M'E omwentelen, totdat het vlak van dien vierhoek loodregt op het horizontale vlak komt, dan wordt M_1 het middelpunt, dus de cirkel M_1R een groote cirkel, en ER eene raaklijn van den bol; maar die raaklijn ER is dan tevens loodregt op A'A' gekomen; derhalve bepalen dan ER en A'A' een vlak dat den bol raakt, en bijgevolg bepalen eM_1 en a'a' een vlak, dat door het middelpunt van den bol gaat en met het rakende vlak evenwijdig is.

Trekken wij evenzoo: M'F loodregt op B'B'; $M'M_2 = MM''$ loodregt op M'F; FR' raaklijn aan den cirkel, uit M_2 met den straal des bols beschreven; M_2f evenwijdig met FR'; en eindelijk door f eene lijn b'b' evenwijdig met B'B', dan is b'b' desgelijks de horizontale doorgang van een vlak, dat, door het middelpunt des bols gaande, evenwijdig loopt met het rakende vlak waarvan B'B' de horizontale doorgang is.

Daar het begeerde punt, op eenen afstand, gelijk aan den straal des bols, van elk der beide rakende vlakken A'A'R en B'B'R' moet verwijderd zijn, moet het in elk der beide vlakken liggen, die door het middelpunt gaande de lijnen a'a' en b'b' tot horizontale doorgangen hebben; en het begeerde punt moet dus in de gemeene doorsnede der beide laatstgenoemde vlakken gelegen zijn. Maar het punt G', in hetwelk de lijnen a'a' en b'b' elkander snijden, is even als het middelpunt (M', M'') een punt van die gemeene doorsnede; na dus G'G'' loodregt op de as van projectie getrokken te hebben, worden de projectiën G'M' en G''M'' dier gemeene doorsnede onmiddellijk bekend; en het begeerde punt is alzoo geen ander, dan een der snijpunten van de lijn (G'M', G''M'') met het oppervlak des bols.

Deze snijpunten nu kunnen, volgens eene bekende leerwijze, op de volgende wijze geconstrueerd worden. Men neme op de as van projectie $MG = M'G'$, trekke uit G door M'' eene lijn, den verticalen projectiecirkel des bols, in twee punten P en Q, snijdende; trekke vervolgens uit P en Q, evenwijdig met de as, lijnen die G''M'' ergens in P'' en Q'' zullen snijden, en daarna uit P'' en Q'', regthoekig door de as, lijnen die G'M' ergens in P' en Q' zullen ontmoeten, dan zijn P' en P'' of Q' en Q'' de horizontale en verticale projectiën van een snijpunt der lijn

Digitized by Google

(G'M', G''M'') met het oppervlak des bols, en dus van een punt, dat aan de vraag beantwoordt.

Uit het punt E kan men twee raaklijnen aan den cirkel M_1R en ook uit het punt F twee raaklijnen aan den cirkel M_2R', trekken. Hierdoor verkrijgt men nog twee andere rakende vlakken, die A'A' en B'B' tot horizontale doorgangen hebben. Bij elk van de beide rakende vlakken, die door A'A' gaan, kan men een van de beide rakende vlakken kiezen, die door B'B' gaan, en de gekozene vlakken als diegenen beschouwen, welke in de opgaaf bedoeld zijn. Er zijn dus vier zulke keuzen mogelijk; en voor elke keuze, kan men, door de aangewezene constructie, twee punten vinden, die aan de vraag voldoen. In het geheel kan men dus acht voldoende punten construeren, waarvan wij er echter, om de figuur hare duidelijkheid niet te benemen, slechts twee geconstrueerd hebben.

CCXXII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Van twee hoekpunten eens gelijkzijdigen driehoeks, die zich ergens in de ruimte bevindt, zijn de horizontale en verticale projectiën gegeven. Indien men nu ook nog de hoogte van het derde hoekpunt boven het horizontale vlak kent, wil men daaruit de projectiën van dat derde hoekpunt construeren.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., J. S. Spelier *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laten (A', A'') en (B', B'') de gegevene hoekpunten zijn (Fig. 159), en h de hoogte van het derde hoekpunt boven het horizontale vlak; indien wij dan, evenwijdig met de as van projectie OX, eene lijn PQ ter hoogte h boven dezelve trekken, is deze PQ de verticale doorgang van een vlak, dat ter hoogte h boven het horizontale vlak evenwijdig met hetzelve loopt. Het derde hoekpunt moet zich dan klaarblijkelijk in dit vlak bevinden, en zich op het verticale vlak in de lijn PQ projecteren.

Trekken wij A'B', stellen wij op die lijn uit B' eene loodlijn $B'B = B''b - A''a$, en trekken wij A''B, dan is deze lijn A''B de werkelijke afstand der punten (A', A'') en (B', B''), en bijgevolg de werkelijke lengte van eene zijde des gelijkzijdigen driehoeks. Beschrijven wij vervolgens uit A'' en B'', met die werkelijke lengte als straal, cirkelboogjes, de lijn PQ in p en q snijdende, zoodat $A''p = B''q = A''B$ wordt, dan is het klaar, dat a'p en b'q de lengten zijn van de horizontale projectiën van de

Digitized by Google

twee andere zijden des gelijkzijdigen driehoeks; want a'p en b'q zijn regthoekszijden van regthoekige driehoeken, wier andere regthoekszijden $A''a' = A''a - h$ en $B''b' = B''b - h$ de verschillen in hoogte zijn van de punten (A', A'') en (B', B'') met het derde hoekpunt, terwijl de schuine zijden A''p en B''q de werkelijke afstanden van de punten (A', A'') en (B', B'') tot het derde hoekpunt zijn.

Beschrijven wij dus verder uit A' met a'p als straal, en uit B' met b'q als straal, cirkelboogjes elkander in C' of D' snijdende, dan is C' of D' de horizontale projectie van het begeerde derde hoekpunt; en uit C' en D' lijnen regthoekig door de as trekkende, tot dat zij PQ in C'' en D'' ontmoeten, zal C'' of D'' de verticale projectie van dat derde hoekpunt wezen.

Alzoo zijn A'B'C' en A''B''C'', of A'B'D' en A''B''D'' de projectiën des bedoelden gelijkzijdigen driehoeks.

Aanmerkingen *uit de Oplossing van* J. S. Speijer. De constructie blijft onveranderd, indien *h* zoo gegeven mogt zijn, dat de lijn PQ hetzij boven A''B'' viel, hetzij A''B'' tusschen A'' en B'' sneed, hetzij door een der punten A'' of B'' ging. Is echter *h* te groot of te klein gegeven, zoo kan $a'p + b'q < A'B'$ worden; dan zullen de cirkelboogjes geen punt gemeen hebben, en er kan onder de gegevens geen gelijkzijdige driehoek bestaan. Is *h* juist klein genoeg of juist groot genoeg gegeven, om te maken dat $a'p + b'q = A'B'$ wordt, dan zullen de cirkelboogjes elkander in een punt van A'B' raken; er zal dan slechts één gelijkzijdige driehoek aan de vraag beantwoorden, en van dezen zal het vlak verticaal zijn.

CCXXIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Gegeven zijnde de horizontale en verticale projectiën van twee hoekpunten van een regelmatig tetraëdrum, benevens de hoogte, waarop zich een der beide andere hoekpunten boven het horizontale vlak bevindt, begeert men de projectiën van dat ligchaam te construeren.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., J. S. Speijer *en* W. L. Ivanch.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten (A', A'') en (B', B'') de gegevene projectiën zijn (Fig. 160) van twee hoekpunten van een regelmatig tetraëdrum, dan kan men, volgens het voorgaande voorstel, een derde hoekpunt

Digitized by Google

(C′, C″) van dat ligchaam construeren, zoodanig dat dit hoekpunt op eene gegevene hoogte boven het horizontale vlak ligt. Hierdoor verkrijgt men dan de projectiën van een zijvlak (A′B′C′, A″B″C″) des ligchaams, dat men als grondvlak kan aannemen, zoodat er slechts overblijft de projectiën van den top te construeren.

Bij het construeren van het punt (C′, C″), vindt men tevens de werkelijke lengte der ribbe (A′B′, A″B″), die wij in Fig. 161 door AB hebben voorgesteld. Beschrijft men op deze AB een gelijkzijdigen driehoek ABC, laat men daarin uit twee hoekpunten A en C loodlijnen op de overstaande zijden vallen, elkander snijdende in M; stelt men vervolgens uit M eene loodlijn op AM en beschrijft men, uit A, met AB als straal, een cirkelboogje, de laatstgenoemde loodlijn in D snijdende, dan is MD de lengte der loodlijn, die uit den top des tetraëdrums op het grondvlak valt. Want zoo men den driehoek AMD om de lijn AM laat draaijen, totdat hij loodregt op het vlak ABC komt, zal blijkbaar het punt D in den top des tetraëdrums gekomen zijn.

Trekken wij in *Fig.* 160, uit C′ en C″ lijnen respectievelijk naar het midden van A′B′ en A″B″, en nemen wij op deze lijnen stukken C′M′ en C″M″, die gelijk aan twee derde gedeelten van dezelve zijn, dan zijn blijkbaar M′ en M″ de projectiën van den voet der loodlijn, die uit den top van het tetraëdrum op zijn grondvlak (A′B′C′, A″B″C″) valt; die top zal dus het uiteinde zijn van eene lijn, die uit het punt (M′, M″) loodregt op het vlak (A′B′C′, A″B″C″) staat, en de in Fig. 161 geconstrueerde lengte MD heeft.

Om dezen top te construeren, bepalen wij eerst (Fig. 160) de punten E en F, in welke de lijnen (A′C′, A″C″) en (B′C′, B″C″) het horizontale vlak van projectie ontmoeten; hiertoe hebben wij slechts A″C″ en B″C″ te verlengen, tot dat zij de as van projectie OX in e en f ontmoeten, en vervolgens uit e en f loodlijnen op OX te stellen, die dan de verlengden van A′C′ en B′C′ in de begeerde punten E en F zullen snijden; eene lijn, door E en F getrokken, zal dan de horizontale doorgang van het vlak (A′B′C′, A″B″C″) zijn. Verder nemen wij eene lijn PY, die den genoemden doorgang EF ergens in Q regthoekig snijdt, als eene nieuwe as van projectie aan; door dan M′mM loodregt op PY te trekken, mM gelijk aan de hoogte van M″ boven de as OX te nemen, en QM te trekken, wordt M de nieuwe verticale projectie van het

Digitized by Google

punt (M′, M″), en QM de doorgang van het vlak (A′B′C′, A″B″C″) met het nieuwe verticale vlak.

Omdat het nieuwe verticale vlak loodregt op het grondvlak (A′B′C′, A″B″C″) des tetraëdrums genomen is, zal de loodlijn, uit den top op dat grondvlak vallende, zich op het nieuwe verticale vlak in hare ware grootte en loodregt op den doorgang QM projecteren. Stellen wij dus op QM, uit M, eene loodlijn MD, die de in Fig. 161 geconstrueerde lengte heeft, dan is D de projectie van den top des ligchaams op het nieuwe verticale vlak. Trekken wij vervolgens uit D eene loodlijn Dd op PY, zoo is Dd de hoogte van den top boven het horizontale vlak; en het punt D′, waar het verlengde van Dd gemeden wordt, door eene lijn uit M′ evenwijdig met PY getrokken, zal de horizontale projectie van den top zijn.

Eindelijk D′D″ loodregt door OX trekkende, en het gedeelte van D′D″, dat boven OX valt, gelijk aan Dd nemende, zal D″ de projectie van den top op het oorspronkelijke verticale vlak zijn; zoodat wij slechts, uit D′ naar A′, B′ en C′, gelijk mede uit D″ naar A″, B″ en C″ lijnen behoeven te trekken, om de volledige projectiën A′B′C′D′ en A″B″C″D″ van het begeerde tetraëdrum te bekomen.

Aanmerking. Het is klaar, dat men de loodlijn MD ook aan de andere zijde van QM uit M had kunnen oprigten, en daardoor een tetraëdrum zou verkregen hebben, dat aan de andere zijde van het zijvlak (A′B′C′, A″B″C″) lag. Deze omstandigheid verbindende met het dubbele antwoord, dat men volgens het voorgaande voorstel voor het punt (C′, C″) verkrijgt, ziet men, dat er in 't algemeen vier tetraëdrums kunnen geconstrueerd worden, die aan de vraag voldoen.

CCXXIV. Voorstel.

Door A. Hulscher.

Van welken boog is de sinus middenevenredig tusschen den cosinus versus en den cosinus; en van welken boog is de cosinus middenevenredig tusschen den sinus versus en den sinus.

Opgelost *door* J. S. Spreijer, A. Hulscher, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivanor *en* J. B. Gerl.

Oplossing *van* J. S. Spreijer.

Wat het eerste gedeelte der vraag betreft, stelle men den te vinden boog door ϕ voor, dan is

$$Cos.vers.\phi : Sin.\phi = Sin.\phi : Cos.\phi,$$

Digitized by Google

of $$\frac{1 - Sin.\phi}{Sin.\phi} = \frac{Sin.\phi}{Cos.\phi};$$

dat is $$Cosec.\phi - 1 = Tang.\phi,$$

of $$Cosec.\phi = Tang.\phi + 1.$$

Maar nu is in het algemeen

$$Cosec.\phi = \sqrt{(1+Cot.^2\phi)} = \sqrt{\left\{1+\frac{1}{Tang.^2\phi}\right\}} = \frac{\sqrt{(Tang.^2\phi+1)}}{Tang.\phi},$$

en dus hier ook

$$\frac{\sqrt{(Tang.^2\phi + 1)}}{Tang.\phi} = Tang.\phi + 1$$

of $$Tang.^2\phi + 1 = Tang.^2\phi\,(Tang.\phi + 1)^2,$$

dat is na herleiding

$$Tang.^4\phi + 2\,Tang.^2\phi - 1 = 0,$$

welke vergelijking slechts twee bestaanbare wortels heeft, eenen positieven en eenen negatieven, namelijk

$$Tang.\phi = 0{,}7166727 \quad \text{en} \quad Tang.\phi = -2{,}1069184.$$

Alleen positieve bogen kleiner dan 360° in aanmerking nemende, is dus, indien wij den positieven wortel gebruiken,

$$\phi = 35°37'41'',25;$$

en, indien wij den negatieven wortel nemen,

$$\phi = 295°23'25''.$$

De boog moet altijd in het eerste of vierde kwadrant vallen; want daar *Cos. vers.* ϕ en ook $Sin.^2\phi$ altijd positief zijn, is ook noodzakelijk *Cos.* ϕ positief.

Wat het tweede gedeelte der vraag betreft, stelle men, in de reeds opgeloste evenredigheid, $\phi = 90° - \psi$; zij gaat dan over in de nu op te lossen evenredigheid

$$Sin.\,vers.\,\psi : Cos.\,\psi = Cos.\,\psi : Sin.\,\psi,$$

waaruit blijkt, dat men voor ψ slechts het complement der voor ϕ gevondene waarden zal behoeven te nemen; deze complementen, zoo men positieve bogen verlangt, des noodig met 360° verhoogende.

De begeerde waarden van ψ zijn dus

$$\psi = 90° - 35°37'41'',25 = 64°22'18'',75$$

en $$\psi = 450° - 295°23'25'' = 154°36'35''.$$

De boog moet hier altijd in het eerste of tweede kwadrant vallen, omdat noodzakelijk *Sin.* ψ positief is.

CCXXV. Voorstel.

Door **A. Hulscher.**

Van welken boog is de cotangens middenevenredig tusschen

Digitized by Google

den tangens en den secans; en van welken boog is de tangens middenevenredig tusschen den cotangens en cosecans.

Opgelost *door* J. S. Speijer, A. Hulscher, W. van Haaren, Jr., W. L. Ivanch *en* J. B. Geel.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Den eerstbedoelden boog ϕ noemende, moet men hebben

$$Tang.\,\phi : Cot.\,\phi = Cot.\,\phi : Sec.\,\phi,$$

dus $$Sec.\,\phi = \frac{Cot.^2\,\phi}{Tang.\,\phi} = Cot.^3\,\phi,$$

of $$Cos.\,\phi = \frac{1}{Sec.\,\phi} = \frac{1}{Cot.^3\,\phi} = Tang.^3\,\phi,$$

en dus $$Log.\,Cos.\,\phi = 3\ Log.\,Tang.\,\phi.$$

Door een logarithmen-sinustafel is het nu gemakkelijk, te naasten bij den boog te vinden, welks *Log. Cos.* het drievoud van zijnen *Log. Tang.* is. Maakt men b. v. gebruik van de tafels van Callet, dan vindt men al spoedig, dat de nevens elkander staande waarden in de kolommen der *Log. Cos.* en *Log. Tang.*, waarvan de eene zoo na mogelijk het drievoud van de andere is, gevonden worden bij den boog van $42°8'50''$. Immers men vindt

$$Log.\,Tang.\,42°8'50'' = 9{,}9566810 - 10,$$

waarvan het drievoud

$$3\ Log.\,Tang.\,42°8'50'' = 9{,}8700430 - 10$$

nagenoeg gelijk is aan

$$Log.\,Cos.\,42°8'50'' = 9{,}8700661 - 10$$

en dus is dan ook te naasten bij

$$\phi = 42°8'50'';$$

bedragende het verschil dezer logarithmenwaarden, in eenheden der laatste decimaalcijfer, slechts 231.

Om nu eene meer naauwkeurige waarde voor ϕ te vinden, neme men uit de tafel de verschillen 423 en 191, die bij de gebezigde logarithmen staan; voege driemaal het verschil 423 bij het verschil 191, hetgeen geeft 1460; en stelle de evenredigheid $1460 : 231 = 10'' : \delta$. Dan vindt men $\delta = 1'',6$ voor de waarde, die nog bij de vorige waarde van ϕ moet gevoegd worden; zoodat wij hebben

$$\phi = 42°8'51'',6.$$

Omdat in het tweede kwadrant de tangens, cotangens en secans alle drie negatief zijn, kan men echter ook nemen

$$\phi = 137°51'8'',4.$$

Wil men de oplossing op de gewone wijze aanvatten, dan volgt uit $$Cos.\,\phi = Tang.^3\,\phi$$

Digitized by Google

onmiddellijk, dat men ook heeft

$$Cos.^4\phi = Sin.^3\phi,$$

dat is $(1 - Sin.^2\phi)^2 = Sin.^3\phi$

of na ontwikkeling

$$Sin.^4\phi - Sin.^2\phi - 2\,Sin.^2\phi + 1 = 0;$$

deze vergelijking heeft slechts éénen positieven wortel kleiner dan 1, waarvoor men zal vinden

$$Sin.\phi = 0{,}6710436,$$

hetgeen even als boven geeft

$$\phi = 42°8'51'',6 \quad \text{of} \quad \phi = 137°51'8'',4.$$

Om het tweede gedeelte der vraag te beantwoorden, stelle men, even als in de voorgaande oplossing, $\phi = 90° - \psi$; waardoor de reeds opgeloste evenredigheid verandert in

$$Cot.\psi : Tang.\psi = Tang.\psi : Cosec.\psi;$$

zoodat men, om aan deze te voldoen, heeft:

$$\psi = 90° - 42°8'51'',6 = 47°51'8'',4$$

en $\psi = 450° - 137°51'8'',4 = 312°8'51'',6.$

De bovenstaande evenredigheden geven $Cot.^2\phi = Tang.\phi\ Sec.\phi$ en $Tang.^2\psi = Cot.\psi\ Cosec.\psi$; omdat nu $Cot.^2\phi$ en $Tang.^2\psi$ zeker positief zijn, moeten $Tang.\phi$ en $Sec.\phi$ gelijke teekens hebben, hetgeen slechts in het eerste en tweede kwadrant plaats heeft, terwijl ook $Cot.\psi$ en $Cosec.\psi$ gelijke teekens moeten hebben, zoo als slechts in het eerste en vierde kwadrant het geval is.

CCXXVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Eene harmonische reeks van drie termen te vinden, zoodanig: dat hare dubbele som een vyfhoekig getal is, het dubbel van den eersten term tot wortel hebbende; en dat het gedurig product harer termen een vierkant getal is, hetwelk den derden term tot wortel heeft.

Opgelost *door* J. Bassan, J. S. Spijker, J. B. Geel *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Bassan.

Dewijl de begeerde reeks eene harmonische is, kunnen wij hare termen voorstellen door

$$x, \quad \frac{2xy}{x+y} \quad \text{en} \quad y;$$

alsdan is: hare dubbele som

$$2(x+y) + \frac{4xy}{x+y};$$

Digitized by Google

het gedurig product harer termen

$$\frac{2x^2y^2}{x+y};$$

het vijfhoekig getal, dat het dubbel van den eersten term tot wortel heeft,

$$\tfrac{1}{2}(2x)\{3(2x)-1\} = x(6x-1);$$

en het vierkant getal, dat den derden term tot wortel heeft,

$$y^2.$$

Volgens de opgaaf hebben wij dan de vergelijkingen

$$2(x+y)+\frac{4xy}{x+y} = x(6x-1) \ldots\ldots (1)$$

en

$$\frac{2x^2y^2}{x+y} = y^2 \ldots\ldots (2)$$

Uit (2) volgt, na deeling door y^2, onmiddellijk

$$y = 2x^2 - x, \ldots\ldots (3)$$

en deze waarde van y in (1) substituerende, komt er

$$4x^2 + 4x - 2 = 6x^2 - x$$

of na herleiding $x^2 - \frac{5}{2}x = -1$,

waaruit volgt $x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{(\frac{25}{16} - 1)}$,

dat is $x = 2$ of $x = \frac{1}{2}$.

Nemende $x = 2$, zoo is volgens (3) $y = 6$, en wij hebben, voor de gevraagde reeks, de getallen 2, 3 en 6. Nemende $x = \frac{1}{2}$, zoo is $y = 0$, en hierdoor wordt geene eigenlijke reeks gevonden.

CCXXVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Van elken willekeurigen veelhoek van 2n zijden, in eenen cirkel beschreven, is de som der n hoeken, om den anderen genomen, gelijk aan n — 1 maal twee regte hoeken. Men vraagt naar het bewijs.

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Spelijer.

Oplossing van J. Bassan.

Laat A′AB′BC′CD′D (Fig. 162) een gedeelte voorstellen van een willekeurigen $2n$-hoek in een cirkel beschreven, dan moeten wij bewijzen, dat de som S der n hoeken A, B, C, D, enz., om den anderen uit de hoeken des veelhoeks genomen, gelijk is aan $n - 1$ maal twee regte hoeken.

Trekken wij daartoe, uit het middelpunt M van den cirkel, stralen naar de hoekpunten van de overgeslagene hoeken A′, B′,

Digitized by Google

C', D', enz. des veelhoeks, dan wordt daardoor de veelhoek zelve in n vierhoeken verdeeld.

In elk dezer vierhoeken is de hoek aan het middelpunt tweemaal zoo groot als het supplement van den overstaanden hoek, die tevens een hoek des veelhoeks is. Want beschouwen wij b. v. den vierhoek MA'AB', en verlengen wij zijne zijde A'A tot ergens in L, dan is de hoek B'AL het supplement van den hoek A; maar de hoek B'AL, als gevormd door de koorde AB' en het verlengde der koorde AA', wordt gemeten door de helft van den boog A'AB', terwijl de hoek A'MB' door den geheelen boog A'AB' gemeten wordt, en dus het dubbel van den hoek B'AL is; zoodat wij hebben:

$$\textit{hoek}\ \mathrm{A} = 2R - \textit{hoek}\ \mathrm{B'AL} = 2R - \tfrac{1}{2}\,\textit{hoek}\ \mathrm{A'MB'},$$

door R een regten hoek aanduidende.

De n vierhoeken, waarin de veelhoek verdeeld is, geven alzoo aanleiding tot de n vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \textit{hoek}\ \mathrm{A} &= 2R - \tfrac{1}{2}\,\textit{hoek}\ \mathrm{A'MB'};\\ \textit{hoek}\ \mathrm{B} &= 2R - \tfrac{1}{2}\,\textit{hoek}\ \mathrm{B'MC'},\\ \textit{hoek}\ \mathrm{C} &= 2R - \tfrac{1}{2}\,\textit{hoek}\ \mathrm{C'MD'},\\ &\text{enz.} \qquad\quad \text{enz.};\end{aligned}$$

deze vergelijkingen optellende, daarbij in het oog houdende, dat de som der hoeken A'MB', B'MC', C'MD', enz., juist 4 regte hoeken, en dus de som hunner helften juist 2 regte hoeken is, hebben wij

$$S = n \times 2R - 2R$$

of

$$S = (n - 1) \times 2R,$$

hetgeen bewezen moest worden.

CCXXVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Wanneer van een driehoek gegeven zijn de hoeken, en de afstand van de middelpunten zijner in- en omgeschrevene cirkels, begeert men de zijden van dien driehoek in deze gegevens uit te drukken.

Opgelost *door* W. van Haarst, Jr., J. Bassan, J. B. Geel, W. L. Ivanon *en* J. S. Spelyer.

Oplossing *van* W. van Haarst, Jr.

Laten α, β en γ de gegevene hoeken des driehoeks zijn, en stellen wij de zijden over deze hoeken respectievelijk door x, y en z voor; zij verder a de gegevene afstand van de middelpunten der in- en omgeschrevene cirkels, welker stralen wij r en R zullen noemen; dan hebben wij, volgens bekende stellingen:

Digitized by Google

$$x = 2R\ Sin.\alpha,\quad y = 2R\ Sin\ \beta,\quad z = 2R\ Sin.\gamma,\ldots(1)$$

$$2Rr = \frac{xyz}{x+y+z},\ldots\ldots\ldots(2)$$

en $$R^2 - 2Rr = a^2.\ldots\ldots\ldots(3)$$

Brengen wij nu vooreerst de waarden (1) in de vergelijking (2) over, zoo komt er

$$2Rr = \frac{4R^2\ Sin.\alpha\ Sin.\beta\ Sin.\gamma}{Sin.\alpha + Sin.\beta + Sin.\gamma};$$

en deze waarde in de vergelijking (3) substituerende, vinden wij

$$R^2 - \frac{4R^2\ Sin.\alpha\ Sin.\beta\ Sin.\gamma}{Sin.\alpha + Sin.\beta + Sin.\gamma} = a^2\ldots\ldots(4)$$

Uit deze vergelijking kan dadelijk R^2 opgelost worden, maar men kan haar vooraf vereenvoudigen; omdat namelijk $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ is, heeft men

$$Sin.\alpha + Sin.\beta + Sin.\gamma = 4\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\ Cos.\tfrac{1}{2}\beta\ Cos.\tfrac{1}{2}\gamma,$$

omdat $Sin.\alpha = 2\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha$, $Sin.\beta = 2\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Cos.\tfrac{1}{2}\beta$, $Sin.\gamma = 2\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\ Cos.\tfrac{1}{2}\gamma$ is, heeft men almede

$Sin.\alpha\ Sin\ \beta\ Sin.\gamma = 8\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\ Cos.\tfrac{1}{2}\beta\ Cos.\tfrac{1}{2}\gamma$,

en hierdoor verandert dan de vergelijking (4) in

$$R^2 - 8R^2\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma = a^2;$$

alsnu wordt er onmiddellijk uit gevonden

$$R = \frac{a}{\sqrt{\{1 - 8\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\}}};\ldots(5)$$

en volgens (1) hebben wij dan verder

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2a\ Sin.\alpha}{\sqrt{\{1 - 8\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\}}},\\ y &= \frac{2a\ Sin.\beta}{\sqrt{\{1 - 8\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\}}},\\ \text{en}\quad z &= \frac{2a\ Sin.\gamma}{\sqrt{\{1 - 8\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Sin.\tfrac{1}{2}\beta\ Sin.\tfrac{1}{2}\gamma\}}}. \end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

CCXXIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Op de basis AB (Fig. 163) *van een driehoek, is als middellijn een halve cirkel buitenwaarts beschreven. Vervolgens zijn uit den top* C, *drie lijnen naar den omtrek getrokken, welke dien omtrek in* D, E *en* F *ontmoeten, en de basis in* G, H *en* I *snijden; gaande van deze lijnen: de eerste* CD *loodregt door de basis, terwijl de tweede* CE *de basis, en de derde* CF *den tophoek middendoordeelt. Zoo nu van deze lijnen gegeven*

Digitized by Google

zijn de stukken DG, EH *en* FI, *begeert men daaruit de zijden des driehoeks te berekenen.*

Opgelost *door* J. Bassan, W. van Haarst, Jr., J. S. Spruijer *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel DG $= a$, EH $= b$, FI $= c$, GI $= x$, *hoek* GIC $= \phi$, AG $= p$ en BG $= q$.

Omdat de lijn CE de bazis des driehoeks in H middendoordeelt, is H het middelpunt van den cirkel op AB beschreven; derhalve is

$$AH = BH = HE = b \quad \text{en} \quad AB = 2b \ldots \ldots (1)$$

Zoo wij verder HD trekken, is ook HD $= b$ en dus

$$GH = \sqrt{(HD^2 - DG^2)} = \sqrt{(b^2 - a^2)};$$

maar AG $=$ AH $+$ GH en BG $=$ BH $-$ GH zijnde, is dan ook

$$p = b + \sqrt{(b^2 - a^2)} \text{ en } q = b - \sqrt{(b^2 - a^2)}, \ldots (2)$$

zoodat nu p en q bekenden zijn; kortheidshalve $\sqrt{(b^2 - a^2)} = m$ stellende, is dan

$$p - q = 2m \quad \text{en} \quad pq = a^2 \ldots \ldots (3)$$

Voorts is: AI $= p - x$, BI $= q + x$,

$$CG = x\ Tang.\ \phi,$$

$$\left.\begin{aligned} AC &= \sqrt{(AG^2 + CG^2)} = \sqrt{(p^2 + x^2\ Tang.^2\ \phi)}, \\ BC &= \sqrt{(BG^2 + CG^2)} = \sqrt{(q^2 + x^2\ Tang.^2\ \phi)}; \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

omdat CF den hoek ACB middendoordeelt, hebben wij alzoo

$$AC : BC = AI : BI$$

of

$$\sqrt{(p^2 + x^2\ Tang.^2\ \phi)} : \sqrt{(q^2 + x^2\ Tang.^2\ \phi)} = p - x : q + x,$$

waaruit gevonden wordt

$$Tang.^2\ \phi = \frac{p^2(q + x)^2 - q^2(p - x)^2}{x^2\ \{(p - x)^2 - (q + x)^2\}},$$

dat is na behoorlijke herleiding

$$Tang.^2\ \phi = \frac{2pq + (p - q)\ x}{(p - q)\ x - 2x^2},$$

of door middel van (3)

$$Tang.^2\ \phi = \frac{a^2 + mx}{mx - x^2};$$

hieruit volgt dan verder

$$Sec.^2\ \phi = 1 + Tang.^2\ \phi = \frac{a^2 + 2mx - x^2}{mx - x^2}$$

en

$$Cos.^2\ \phi = \frac{1}{Sec.^2\ \phi} = \frac{x(m - x)}{a^2 + 2mx - x^2} \ldots \ldots (5)$$

Trekken wij nog de koorden AF en BF, zoo hebben wij, uit

Digitized by Google

de driehoeken AIF en BIF,

$$AF^2 = FI^2 + AI^2 - 2FI \times AI \times Cos.\,AIF$$
$$= c^2 + (p - x)^2 - 2c(p - x)\,Cos.\,\phi$$

en $$BF^2 = FI^2 + BI^2 - 2FI \times BI \times Cos.\,BIF$$
$$= c^2 + (q + x)^2 + 2c(q + x)\,Cos.\,\phi,$$

waaruit door optelling volgt

$$AF^2 + BF^2 = p^2 + q^2 + 2\{c^2 + x^2 - (p - q)x - c(p - q - 2x)\,Cos.\,\phi\};$$

maar de driehoek AFB is regthoekig in F, en omdat $AB = p + q$ is, hebben wij dus ook

$$AF^2 + BF^2 = AB^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq;$$

deze waarden van $AF^2 + BF^2$ met elkander vergelijkende, vinden wij dus ook nog

$$pq = c^2 + x^2 - (p - q)\,x - c(p - q - 2x)\,Cos.\,\phi;$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$Cos.\,\phi = \frac{c^2 - pq - (p - q)\,x + x^2}{c(p - q - 2x)},$$

of door middel van (3)

$$Cos.\,\phi = \frac{c^2 - a^2 - 2mx + x^2}{2c(m - x)} \quad \ldots\ldots (6)$$

Uit (5) en (6) hebben wij derhalve de vergelijking

$$\frac{x(m - x)}{a^2 + 2mx - x^2} = \frac{(c^2 - a^2 - 2mx + x^2)^2}{4c^2(m - x)^2}, \quad (7)$$

waaruit, nu x moet opgelost worden. Hiertoe kan men

$$x = m - y$$

stellen, en tevens, zoo als uit $\sqrt{(b^2 - a^2)} = m$ volgt, $a^2 = b^2 - m^2$ substituteren; alsdan gaat (7) over in

$$\frac{(m - y)\,y}{b^2 - y^2} = \frac{(c^2 - b^2 + y^2)^2}{4c^2y^2},$$

dat is $$\frac{(m - y)\,y}{b^2 - y^2} = \frac{c^4 - 2c^2(b^2 - y^2) + (b^2 - y^2)^2}{4c^2y^2},$$

of $4c^2(m - y)\,y^2 = c^4(b^2 - y^2) - 2c^2(b^2 - y^2)^2 + (b^2 - y^2)^2$,

en na behoorlijke ontwikkeling en rangschikking

$$y^6 - (3b^2 + 2c^2)\,y^4 + 4c^2my^3$$
$$+ (b^2 - c^2)(3b^2 - c^2)\,y^2 - b^2(b^2 - c^2)^2 = 0. \quad (8)$$

Uit deze zesdemagtsvergelijking nu kan, zoodra men voor b, c, en $m = \sqrt{(b^2 - a^2)}$ de gegevene getallenwaarden substitueert, y door benadering gevonden worden. Hierdoor wordt dan ook $x = m - y$ bekend, zoodat men door (5) of (6) den hoek ϕ, en daarna door (4) de zijden AC en BC des driehoeks kan berekenen; terwijl de zijde $AB = 2b$ onmiddellijk bekend is.

Digitized by Google

CCXXX. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal te vinden van $\partial\phi\sqrt{(Sin.\,2\phi + 2\,Cos.\,\phi)}$.

Opgelost *door* J. S. Spijker, J. Bassan, W. van Haaren, Jr. en W. L. Ivanch.

Oplossing *van* J. S. Spijker.

De gegevene uitdrukking door ∂y voorstellende, kunnen wij haar vooreerst schrijven in den vorm

$$\partial y = \partial\phi\sqrt{2}\;Cos.\,\phi\,(1 + Sin.\,\phi),$$

en stellen wij daarin

$$1 + Sin.\,\phi = x^2\,Cos.\,\phi,$$

dan gaat zij al dadelijk over in

$$\partial y = x\partial\phi\,Cos.\,\phi\sqrt{2};$$

maar nu is ook

$$(1 + Sin.\,\phi)^2 = x^4\,Cos.^2\,\phi = x^4\,(1 - Sin.^2\,\phi),$$

dus $$1 + Sin.\,\phi = x^4\,(1 - Sin.\,\phi),$$

waaruit volgt $$Sin.\,\phi = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1},$$

en door deze waarde van $Sin.\,\phi$ te differentiëren

$$\partial\phi\;Cos.\,\phi = \frac{8x^3\partial x}{(x^4 + 1)^2};$$

alzoo wordt dan $$\partial y = \frac{8x^4\partial x\sqrt{2}}{(x^4 + 1)^2},$$

waarvoor wij schrijven kunnen

$$\partial y = (2\sqrt{2}).x.\frac{4x^3\partial x}{(x^4 + 1)^2} = (2\sqrt{2})x.\partial\,\frac{-1}{x^4 + 1}.$$

Hieruit volgt nu

$$y = (2\sqrt{2})\int x.\partial\frac{-1}{x^4+1} = (2\sqrt{2})\left\{-\frac{x}{x^4+1} + \int\frac{\partial x}{x^4+1}\right\};$$

omdat men heeft (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.*, § 184, 5de Voorbeeld)

$$\int\frac{\partial x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{Log.\sqrt{\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}} + Bg\,Tg.\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right\},$$

vinden wij dus verder

$$y = \frac{-2x\sqrt{2}}{x^4+1} + \tfrac{1}{2}Log.\frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + Bg\;Tg.\;\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2};$$

en zoo wij hierin wederom voor x hare waarde $x = \sqrt{\dfrac{1 + Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi}}$ schrijven, komt er na herleiding, voor de gevraagde integraal,

Digitized by Google

$$x = -\sqrt{(2Cos.\phi - Sin.2\phi)} + Boog\,Tang.\frac{\sqrt{(2Cos.\phi + Sin.2\phi)}}{Cos.\phi - Sin.\phi - 1} \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2} Nep.Log.\frac{Cos.\phi + Sin.\phi + 1 + \sqrt{(2Cos.\phi + Sin.2\phi)}}{Cos.\phi + Sin.\phi + 1 - \sqrt{(2Cos.\phi + Sin.2\phi)}} + C.$$

CCXXXI. Voorstel.

Door G. F. W. Baehr.

De straal van eenen bol, en de coördinaten van zijn middelpunt, ten opzigte van drie onderling regthoekige assen gegeven zijnde, vraagt men de punten van zijn oppervlak te bepalen, voor welke de som der drie coördinaten, ten opzigte van dieselfde assen, een maximum of minimum is.

Opgelost *door* G. F. W. Baehr, W. van Haarst, Jr. *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* G. F. W. Baehr.

Laten a, b en c de coördinaten zijn van het middelpunt des bols, en zij r zijn straal, zoo is de vergelijking van zijn oppervlak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \ldots (1)$$

en de functie u, die een maximum of minimum moet worden, is

$$u = x + y + z.$$

Men zal dus moeten hebben

$$\partial x + \partial y + \partial z = 0, \ldots\ldots (2)$$

terwijl uit (1) volgt, dat tevens zal moeten voldaan worden aan de vergelijking

$$(x-a)\partial x + (y-b)\partial y + (z-c)\partial z = 0. \ldots (3)$$

Door uit de vergelijkingen (2) en (3) een der differentialen te elimineren, en de coëfficiënten der beide overblijvenden gelijk nul te stellen, verkrijgt men twee vergelijkingen, die met (1) voldoende zijn, om de onbekenden x, y en z te bepalen. Vermenigvuldigt men daartoe (3) met zekeren standvastigen factor $-m$ en telt men het product bij (2), zoo verkrijgt men

$$\{1 - m(x-a)\}\partial x + \{1 - m(y-b)\}\partial y + \{1 - m(z-c)\}\partial z = 0;$$

bepaalt men nu m zoodanig, dat de coëfficiënt van een der differentialen verdwijnt, zoo moeten ook nog de coëfficiënten der beide overblijvenden gelijk nul gesteld worden, zoodat men heeft de drie vergelijkingen

$1 - m(x-a) = 0$, $1 - m(y-b) = 0$ en $1 - m(z-c) = 0$;

waaruit, door m te elimineren, dadelijk volgt

$$x - a = y - b = z - c,$$

als wanneer verder uit (1) gevonden wordt

$$x - a = y - b = z - c = \pm \tfrac{1}{3} r\sqrt{3},$$

Digitized by Google

of $x = a \pm \frac{1}{3} r\sqrt{3}$, $y = b \pm \frac{1}{3} r\sqrt{3}$, $z = c \pm \frac{1}{3} r\sqrt{3}$,
zoodat het maximum of minimum van u is:

$$u' = x + y + z = a + b + c \pm r\sqrt{3}.$$

Men kan gemakkelijk, zonder hoogere differentialen te gebruiken, aantoonen dat het bovenste teeken een maximum en het onderste een minimum geeft; men heeft namelijk de identiteit

$$\{(x-a)+(y-b)+(z-c)\}^2 - 3\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\} = -\{(x-a)-(y-b)\}^2 - \{(x-a)-(z-c)\}^2 - \{(y-b)-(z-c)\}^2,$$

waaruit volgt dat altijd

$$\{(x-a)+(y-b)+(z-c)\}^2 < 3\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}$$

is; volgens (1) is dus ook altijd

$$\{x - a + y - b + z - c\}^2 < 3r^2,$$

of omdat $x + y + z = u$ is

$$\{u - (a + b + c)\}^2 < 3r^2,$$

zoodat steeds

$$u - (a + b + c) < r\sqrt{3}$$

en $$u - (a + b + c) > -r\sqrt{3},$$

of $$u < a + b + c + r\sqrt{3}$$

en $$u > a + b + c - r\sqrt{3}$$

zal zijn.

Dit laatste zou alleen voldoende geweest zijn om het maximum of minimum te bepalen; maar de voorgaande analyse geeft de zekerheid, dat de gevondene waarden van x, y en z de eenigste zijn, waarvoor er een maximum of minimum plaats heeft.

CCXXXII. Voorstel.

Door G. F. W. Baehr.

Eene vlakke kromme lijn, benevens twee punten in haar vlak, in stelling gegeven zijnde, vraagt men op die kromme het punt of de punten te vinden, voor welke de som der afstanden, tot aan de gegevene punten, een maximum of minimum is.

Opgelost *door* G. F. W. Baehr *en* W. van Haaret, Jr.

Oplossing *van* G. F. W. Baehr.

Laten (α, β) en (α_1, β_1) de coördinaten der gegevene punten zijn, dan is de som der afstanden tot aan een zeker punt der kromme, dat x en y tot coördinaten heeft,

$$s = \sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}} + \sqrt{\{(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2\}};$$

hieruit, en uit de vergelijking $y = F(x)$ der kromme, volgt, dat s beschouwd kan worden als eene functie van x alleen, zoodat men heeft

Digitized by Google

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}}} + \frac{(x-\alpha_1)+(y-\beta_1)\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\}}},$$

en nog na eenige herleiding

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\left\{(y-\beta)-(x-\alpha)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}}{\sqrt{\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}^3}}$$

$$+\frac{\left\{(y-\beta_1)-(x-\alpha_1)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^2+(y-\beta_1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\}}{\sqrt{\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\}^3}}.$$

De waarden van x en y, die voor s een maximum of minimum opleveren, zullen nu gevonden worden uit de vergelijkingen

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad y = F(x);$$

of uit de vergelijkingen

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \infty \quad \text{en} \quad y = F(x).$$

Het laatste kan alleen plaats hebben, als in $\frac{\partial s}{\partial x}$ de term $\frac{\partial y}{\partial x}$ oneindig groot is, waardoor ook $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en de volgende differentiaalquotiënten oneindig groot worden. Na de waarden van x en y opgemerkt te hebben, waarvoor $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ is, en die de punten aanwijzen, waarin de kromme loodregt op de as der x is, ontwijkt men de zwarigheden, die uit het stellen van $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ zouden voortvloeijen, door s te beschouwen als eene functie van y, waardoor in $\frac{\partial s}{\partial y}$ de term $\frac{\partial x}{\partial y}$ alsdan gelijk nul wordt.

Noemen wij de hoeken, die de lijnen, gaande door de punten (α, β) en (α_1, β_1) en het punt (x, y) der kromme, met de as der x maken, respectievelijk ϕ en ϕ', zoo is

$$Tang.\,\phi = \frac{y-\beta}{x-\alpha} \quad \text{en} \quad Tang.\,\phi' = \frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1},$$

waardoor $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ overgaat in

$$Cos.\,\phi + Cos.\,\phi' + (Sin.\,\phi + Sin.\,\phi')\frac{\partial y}{\partial x} = 0;$$

Digitized by Google

aan deze vergelijking wordt in het algemeen voldaan, door te stellen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Cos.\phi + Cos.\phi'}{Sin.\phi + Sin.\phi'} = -Cot.\tfrac{1}{2}(\phi + \phi'), \quad (1)$$

en nog in een bijzonder geval, dat niet in het algemeene begrepen is, door te stellen

$$Cos.\phi + Cos.\phi' = 0 \quad \text{en} \quad Sin.\phi + Sin.\phi' = 0$$

Om alle mogelijke hoeken, die aan deze bijzondere vergelijkingen voldoen, in eene enkele formule zamen te vatten, nemen wij de som van hare vierkanten, waardoor wij verkrijgen

$$2 + 2\,Cos.(\phi - \phi') = 0$$

of
$$4\,Cos.^2\tfrac{1}{2}(\phi - \phi') = 0; \quad \ldots\ldots (2)$$

men zal dus noodzakelijk moeten hebben $Cos.\frac{1}{2}(\phi - \phi') = 0$ of

$$\tfrac{1}{2}(\phi - \phi') = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

waarin k een willekeurig positief of negatief geheel getal voorstelt. De gevondene vergelijking, of

$$\phi - \phi' = (2k+1)\pi,$$

toont aan, dat de hoeken ϕ en ϕ' juist een geheel aantal malen den halven omtrek verschillen; en daar zij behooren tot lijnen, die door een zelfde punt gaan, zoo zullen deze lijnen in elkanders verlengde vallen. Snijdt dus de lijn, die de twee punten (α, β) en (α_1, β_1) vereenigt, de gegevene kromme, zoo kan voor dat snijpunt de som der afstanden tot aan de gegevene punten een maximum of minimum zijn; valt dat snijpunt tusschen de punten (α, β) en (α_1, β_1), zoo is die som zeker een minimum; maar valt het snijpunt buiten deze punten, zoo moet men nader bepalen of er een maximum of minimum plaats heeft. Hoe dit geschiedt, zal uit het volgende blijken.

Stellen wij, om tot het algemeene geval terug te keeren, door θ den hoek voor, dien de raaklijn aan het punt (x, y) der kromme met de as der x maakt, zoo is uit (1)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Tang.\theta = -Cot.\tfrac{1}{2}(\phi + \phi') = -Tang.\tfrac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi'));$$

en om wederom de meest algemeene formule te verkrijgen, waardoor de hoeken ϕ en ϕ', die aan de vraag voldoen, verbonden zijn, leiden wij uit deze vergelijking af

$$Tang.\theta + Tang.\tfrac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi')) = 0$$

of
$$\frac{Sin.\{\theta + \frac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi'))\}}{Cos.\theta.Cos.\frac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi'))} = 0,$$

Digitized by Google

zoodat men, omdat de noemer niet oneindig groot kan worden, zal moeten stellen

$$Sin.\{\theta + \tfrac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi'))\} = 0,$$

waaruit wederom volgt, k eenig positief of negatief geheel getal voorstellende, $\theta + \frac{1}{2}(\pi - (\phi + \phi')) = k\pi$

of
$$\tfrac{1}{2}(\phi + \phi') = \theta - \frac{2k-1}{2}\pi. \quad \ldots\ldots (3)$$

Indien men het punt (x, y) der kromme, met de punten (α, β) en (α_1, β_1) vereenigt, en den hoek dezer vereenigingslijnen middendoordeelt, zal die deellijn met de as der x eenen hoek $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$ maken; en $\theta - \frac{2k-1}{2}\pi$ zal, voor elke waarde van k, den hoek met de as der x aanwijzen van eene lijn loodregt op de raaklijn, dat is van eene normaal; uit de laatstgevondene vergelijking volgt dus, dat de normalen der kromme lijn, in de punten, waarvoor de som der afstanden een maximum of minimum is, den hoek dier afstanden middendoordeelen; of ook, dat die afstanden gelijke hoeken maken met de raaklijn.

Hieruit volgt mede, dat de bijzondere waarden, uit de vergelijking (2) afgeleid, in het algemeene geval begrepen zijn, indien de lijn, die de twee punten vereenigt, de kromme loodregt doorsnijdt.

Alvorens te onderzoeken, hoe in het algemeen het maximum van het minimum onderscheiden wordt, zullen wij aantoonen, hoe, uit het tot nu toe gevondene, de gevraagde punten op de kromme nader bepaald kunnen worden.

Stelt men in (3) eenvoudig $k = 0$, dan heeft men vooreerst $\phi + \phi' = 2\theta + \pi$ of

$$Tang.(\phi + \phi') = Tang.\,2\theta, \quad \ldots\ldots (a)$$

verder heeft men nog de vergelijkingen:

$$Tang.\,\phi = \frac{y-\beta}{x-\alpha}, \quad \ldots\ldots (b)$$

$$Tang.\,\phi' = \frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1}, \quad \ldots\ldots (c)$$

$$y = F(x), \quad \ldots\ldots (d)$$

en
$$\frac{\partial y}{\partial x} = Tang.\,\theta = F'(x); \quad \ldots\ldots (e)$$

als men nu, uit (b) en (c), x en y in $Tang.\,\phi$ en $Tang.\,\phi'$

Digitized by Google

uitdrukt, en derzelver waarden in (d) en (e) overbrengt, heeft men, met (a), drie vergelijkingen tusschen θ, ϕ en ϕ'.

Kan men uit deze vergelijkingen gemakkelijk een of meer waarden van ϕ of van ϕ' vinden, dan geven de doorsnijdingspunten, van de kromme door (d) bepaald, met de regte lijnen, waarvan (b) en (c) de vergelijkingen zijn, punten die aan de vraag voldoen. Kunnen de overeenkomstige waarden van ϕ en ϕ' te gelijker tijd bepaald worden, dan zijn (b) en (c) alleen voldoende. En kan men θ in bekenden uitdrukken, dan heeft men (d) en (e) ter bepaling van x en y; komende dit laatste geval neder op het trekken van eene raaklijn aan de gegevene kromme, evenwijdig met eene gegevene lijn, als wanneer het raakpunt een der gevraagde punten is.

Men kan echter al de punten die aan de vraag voldoen in eens vinden, uit de doorsnijdingen van de gegevene kromme met eene andere, die uit de vergelijkingen (a), (b), (c) en (e) voortkomt, en waarvan de vergelijking op de volgende wijze gevonden wordt. Uit (b) en (e) heeft men

$$Tang.(\phi + \phi') = \frac{Tang.\phi + Tang.\phi'}{1 - Tang.\phi\ Tang.\phi'} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)(y-\beta_1) + (x-\alpha_1)(y-\beta)}{(x-\alpha)(x-\alpha_1) - (y-\beta)(y-\beta_1)}$$

en uit (e)

$$Tang.2\theta = \frac{2.Tang.\theta}{1 - Tang.^2\theta} = \frac{2F'(x)}{1 - \{F'(x)\}^2},$$

waardoor (a) overgaat in

$$\frac{(x-\alpha)(y-\beta_1) + (x-\alpha_1)(y-\beta)}{(x-\alpha)(x-\alpha_1) - (y-\beta)(y-\beta_1)} = \frac{2F'(x)}{1 - \{F'(x)\}^2}.$$

of

$$\frac{2xy - (\beta+\beta_1)x - (\alpha+\alpha_1)y + \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta}{x^2 - y^2 - (\alpha+\alpha_1)x + (\beta+\beta_1)y + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1} = \frac{2F'(x)}{1 - \{F'(x)\}^2}; \quad (4)$$

de doorsnijdingspunten nu der kromme, waarvan (4) de vergelijking is, met de gegevene kromme $y = F(x)$, zullen alle punten opleveren, die aan de vraag voldoen.

In het algemeen zal de oplossing dezer vergelijkingen wel zeer omslagtig zijn, en meestal niet regtstreeks kunnen geschieden, zie hier echter eene toepassing van dezelve. Stellen wij vooreerst, dat de vergelijking der kromme, in plaats van den vorm $y = F(x)$, den vorm $f(x, y) = u = 0$ hebbe,

Digitized by Google

dan is $$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y = 0,$$

en dus $$\frac{\partial y}{\partial x} = F'(x) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

zoodat (4) verandert in

$$\frac{2xy - (\beta+\beta_1)x - (\alpha+\alpha_1)y + \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta}{x^2 - y^2 - (\alpha+\alpha_1)x + (\beta+\beta_1)y + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1} =$$

$$= -2\,\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}; \quad \ldots\ldots (5)$$

zij nu als voorbeeld

$$u = Ay^2 + Bx^2 - C = 0, \quad \ldots\ldots (6)$$

waarin wij C positief onderstellen, terwijl A en B positief of negatief kunnen zijn; en zij verder $\alpha = -\alpha_1$, $\beta = \beta_1 = 0$, zoodat de gegevene punten gelegen zijn op een der assen van eene hyperbool of ellips, op gelijke afstanden aan weerszijden van het middelpunt, dan gaat, omdat nu

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2Ay \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2Bx$$

is, de vergelijking (5) voor dit bijzondere geval over in

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2 - \alpha^2} = -\frac{8ABxy}{4A^2y^2 - 4B^2x^2}.$$

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan door $x = 0$ of $y = 0$, waaruit volgt, dat de toppunten altijd aan de vraag kunnen voldoen, wat ook de waarde van α zij. Na door den factor $2xy$ gedeeld te hebben, heeft men nog

$$\frac{1}{x^2 - y^2 - \alpha^2} = -\frac{AB}{A^2y^2 - B^2x^2}$$

of na herleiding

$$Ay^2 + Bx^2 - \frac{ABx^2}{A - B} = 0; \quad \ldots\ldots (7)$$

deze vergelijking zal, met (6) verbonden, geene nieuwe punten kunnen aanwijzen, zoo niet

$$C = \frac{ABx^2}{A - B}$$

of $$x = \sqrt{\frac{(A - B)\,C}{AB}} = \sqrt{\left\{\frac{C}{B} - \frac{C}{A}\right\}}$$

Digitized by Google

is; maar alsdan is ook de vergelijking (7) dezelfde als (6) en zullen dus alle punten der kromme aan de vraag kunnen voldoen.

Behoort nu de vergelijking (6) tot de ellips, dan zijn A en B beiden positief, terwijl $a = \sqrt{\frac{C}{B}}$ en $b = \sqrt{\frac{C}{A}}$ de halve assen dier ellips zijn, zoodat nu $\alpha = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ alleen bestaanbaar kan zijn, indien $a > b$ is, namelijk, indien de punten op de groote as der ellips liggen. De waarde van α is hier gelijk aan de uitmiddelpuntigheid der ellips, en de gegevene punten komen dus met hare brandpunten overeen.

Behoort de vergelijking (6) tot de hyperbool, dan zijn A of B een van beide negatief; maar alleen als A negatief ondersteld wordt, kan α bestaanbaar wezen, en de halve assen der hyperbool zijn dan $a = \sqrt{\frac{C}{B}}$ en $b = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, zoodat men heeft

$$\alpha = \sqrt{\left\{\frac{C}{B} + \left(-\frac{C}{A}\right)\right\}} = \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

terwijl dus de punten op de bestaanbare as gelegen zijn, wijst ook hier α de brandpunten aan.

Wij moeten hierbij wel opmerken, dat de algemeene vergelijkingen (4) en (5) ook volkomen dezelfden zouden zijn, indien men in plaats van (3) genomen had

$\frac{1}{2}(\phi + \phi') = \theta - 2k\pi$ of eenvoudiger $\frac{1}{2}(\phi + \phi') = \theta$, aantoonende dat de raaklijn zelve den hoek der afstanden, en dus de normaal het supplement van dien hoek middendoordeelt; en deze laatste vergelijking zou uit $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ voortvloeijen, als men den tweeden term van dat differentiaalquotiënt negatief stelde, waardoor (1) zou overgaan in

$$Cos.\phi - Cos.\phi' + (Sin.\phi - Sin.\phi')\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

en dus geven zou $\frac{\partial y}{\partial x} = Tang.\frac{1}{2}(\phi + \phi')$

of $$\theta = \frac{1}{2}(\phi + \phi');$$

zoodat door de voorgaande oplossing, zoowel de punten gevonden worden, waarvoor het verschil der afstanden, als die waarvoor de som der afstanden een maximum of minimum is.

Om in eenig geval te onderzoeken, of de som dan wel het verschil moet genomen worden, behoeft men slechts te zien, of

Digitized by Google

de normaal den hoek der afstanden, dan wel deszelfs supplement middendoordeelt. Zoo ziet men in het voorgaande voorbeeld, dat bij de hyperbool het verschil der afstanden moet genomen worden.

Ten einde nu het maximum van het minimum te kunnen onderscheiden, beginnen wij met de algemeene vergelijkingen te vereenvoudigen, door de lijn, die de twee gegevene punten vereenigt, voor as der x, en de loodlijn op haar midden voor as der y aan te nemen. Wij zullen dan ook de vergelijking $y = F(x)$ der gegevene kromme tot die nieuwe assen moeten herleiden; onderstellende dat zij alsdan tot den vorm $f(x, y) = u = 0$ gebragt is, zullen wij dan verder in (4) en (5) moeten stellen $\alpha = -\alpha_1$ en $\beta = \beta_1 = 0$, waardoor die vergelijkingen overgaan in:

$$\frac{2xy}{x^2-y^2-a^2} = \frac{2F'(x)}{1-\{F'(x)\}^2} = -2\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

en verder wordt nu:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\left\{y-(x-\alpha)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^2 + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\{(x-\alpha)^2+y^2\}}{\sqrt{\{(x-\alpha)^2+y^2\}^3}}$$

$$+\frac{\left\{y-(x+\alpha)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^2 + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\{(x+\alpha)^2+y^2\}}{\sqrt{\{(x+\alpha)^2+y^2\}^3}},$$

waaruit men aanstonds ziet, dat de gevondene waarden voor x en y zeker een minimum zullen opleveren, als de kromme lijn in de punten, waarvan zij de coördinaten zijn, hare bolronde zijde naar de as der x keert, dat is, naar de lijn die de twee gegevene punten vereenigt; want alsdan is $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positief en dus ook zeker $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ positief. Keert echter de kromme lijn in die punten hare holronde zijde naar de as der x, dan is $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negatief, en men zal nog verder onderzoek moeten doen naar het teeken van $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$.

Nemen wij bij voorbeeld de ellips, waarvan

$$u = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

de vergelijking is, dan heeft men:

Digitized by Google

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2b^2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2a^2y$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$;

liggen nu de gegevene punten op de as der x, even ver aan weerszijden van het middelpunt, zoo is reeds gebleken, dat de toppunten aan de vraag kunnen voldoen, terwijl dan hier de vereenvoudigde uitdrukking voor $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ van onmiddellijke toepassing is. Onderzoeken wij nu het geval $x = 0$ en $y = \pm b$, dan is voor deze waarden van x en y,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 2a^2b, \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp\frac{b}{a^2}$$

en alzoo

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 2\,\frac{b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2+b^2)}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} = \frac{2b^2}{a^2\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \times (a^2 - b^2 - a^2);$$

het teeken van $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ is dus alleen afhankelijk van den laatsten factor $a^2 - b^2 - a^2$; is nu $a < b$, dan zal dit teeken zeker negatief zijn; indien daarentegen $a > b$ is, dan zal het negatief of positief zijn, naargelang $a^2 >$ of $< a^2 - b^2$, dat is naargelang $a >$ of $< \sqrt{(a^2 - b^2)}$ is.

Indien dus de gegevene punten op de kleine as der ellips gelegen zijn ($a < b$), dan is in elk geval de som hunner afstanden tot aan het toppunt der groote as een maximum; zijn zij echter op de groote as gelegen ($a > b$), dan is de som hunner afstanden tot aan het toppunt der kleine as een maximum of een minimum, naargelang die punten buiten of binnen de brandpunten liggen. Wij zien hier dus drie gevallen, waarin de kromme lijn hare holronde zijde keert naar de lijn, die de twee gegevene punten vereenigt, en waarvan er slechts één het minimum geeft; zoodat men in al zulke gevallen nader het teeken van $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ dient te bepalen.

Indien $a = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ is, wordt $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$, en men zoude dus het derde en de volgende differentiaal-quotiënten noodig hebben; hier kan dit ontweken worden, omdat de waarde van a aanwijst, dat de gegevene punten met de brandpunten der ellips overeenkomen, en voor deze de som der afstanden tot aan eenig punt der kromme standvastig gelijk aan de groote as blijft; er

Digitized by Google

heeft dus hier geen maximum of minimum plaats, zoo als men, en de gezegde eigenschap der ellips niet bekend was geweest, ook gevonden zou hebben, door dat alle volgende differentiaalquotiënten, voor de bijzondere waarde van α verdwenen zouden zijn.

De voorgaande oplossing bevat alles wat men noodig heeft, om het vraagstuk op eenige bijzondere kromme lijn toe te passen. Wij zullen hiervan geene voorbeelden geven; maar liever de eenvoudige eigenschap der ellips, die wij in het laatste voorbeeld door de analyse gevonden hebben, en die welligt anders niet opgemerkt zoude zijn, uit eene figuur bewijzen.

Zij namelijk ACB (Fig. 164) de gegevene ellips, F en F′ tot brandpunten en O tot middelpunt hebbende, zoodat OA de halve groote, OC de halve kleine as is, dan zal, indien men op AB, ter wederzijde op gelijke afstanden van het middelpunt, twee punten D en D′ neemt, die binnen de brandpunten vallen, de som der afstanden DC en D′C een minimum zijn; en die som zal een maximum zijn, zoo D en D′ buiten de brandpunten genomen worden. Is echter OA de halve kleine en OC de halve groote as, dan is, zoo D en D′ op gelijke afstanden aan weerszijden van het middelpunt op de kleine as liggen, DC + D′C in allen gevalle een maximum.

Immers omdat in het eerste geval DC < FC is, zal men D en D′ als de brandpunten kunnen beschouwen van eene nieuwe ellips, die dezelfde kleine as heeft als de eerste, maar wier groote as kleiner dan AB is, en die dus geheel binnen de ellips ACB valt. Vereenigt men nu een willekeurig punt M der buitenste ellips met D en D′, en het snijpunt M′ b. v., van MD en de binnenste ellips, met D′, dan is:

$$DC + D'C = DM' + D'M',$$

maar $$DM' + D'M' < DM + D'M,$$

en dus $$DC + D'C < DM + D'M;$$

waar ook het punt M op de gegevene ellips genomen wordt.

Stelt men dat de binnenste ellips de gegevene ware, en F en F′ de twee punten, die buiten hare brandpunten D en D′ aan weerszijden op gelijke afstanden van het middelpunt liggen, zoo zal men, even als in het voorgaande geval, de waarheid van het tweede gezegde bevestigd zien.

Is eindelijk OC de halve groote as der gegevene ellips, zoo zal, omdat DC > OC is, de ellips die D en D′ tot brandpunten en OC tot kleine as heeft, altijd de gegevene ellips geheel om-

Digitized by Google

vatten, waardoor men verder gemakkelijk, op dezelfde wijze als voren, zal kunnen bewijzen, dat dan DC + D'C, hoe groot of klein de afstanden OD = OD' ook mogen zijn, altijd een maximum is.

CCXXXIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Indien $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 1$, *de vergelijking is van het oppervlak eener ellipsoïde, tusschen onderling regthoekige coördinaten, begeert men de lengte van de assen dier ellipsoïde, uit de coëfficiënten der vergelijking te berekenen.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer en W. van Haarst, Jr.

I. Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat de vergelijking dezer ellipsoïde, ten opzigte van hare assen als coördinaten-assen, voorgesteld worden door

$$Pt^2 + Qu^2 + Rv^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan zal de lengte harer assen dadelijk gevonden kunnen worden, zoodra men slechts de coëfficiënten P, Q en R kent; en het komt er dus voornamelijk op aan, de waarden dezer coëfficiënten uit de bekende coëfficiënten der opgegevene vergelijking af te leiden.

Daar zoo wel de gegevene vergelijking, als de vergelijking (1), geene eerstemagtstermen bevatten, en dus voor die beide vergelijkingen den oorsprong der coördinaten in het middelpunt der ellipsoïde valt, zal, volgens de bekende formulen ter verandering der coördinaten-assen in de ruimte, de vergelijking (1) in de gegevene moeten overgaan, door substitutie van:

$$t = x\,Cos.\,\alpha + y\,Cos.\,\beta + z\,Cos.\,\gamma,$$
$$u = x\,Cos.\,\alpha' + y\,Cos.\,\beta' + z\,Cos.\,\gamma',$$
$$v = x\,Cos.\,\alpha'' + y\,Cos.\,\beta'' + z\,Cos.\,\gamma'';$$

verbeeldende in deze formulen:

α, β en γ de hoeken van de as der t, met die der x, y en z,
α', β' » γ' » » » » » » u, » » » x, y » z,
α'', β'' » γ'' » » » » » » v, » » » x, y » z.

Kortheidshalve de cosinussen dezer hoeken door enkele letters voorstellende, hebben wij:

$$\left.\begin{aligned} t &= ax + by + cz, \\ u &= a'x + b'y + c'z, \\ v &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

terwijl tusschen die cosinussen de betrekkingen bestaan, aangeduid

Digitized by Google

door de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1,\\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0,\\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0,\\ a''a + b''b + c''c &= 0,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\ bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\ ca + c'a' + c''a'' &= 0,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waaruit nog kan afgeleid worden:

$$\left.\begin{aligned} a = b'c'' - b''c',\ a' = b''c - bc'',\ a'' = bc' - b'c,\\ b = c'a'' - c''a',\ b' = c''a - ca'',\ b'' = ca' - c'a,\\ c = a'b'' - a''b',\ c' = a''b - ab'',\ c'' = ab' - a'b;\end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

(zie *Verzam. van Wisk. Voorst.* 6de Deel, N°. 65 en N°. 103).

Substitueren wij nu de waarden (2) in de vergelijking (1), zoo komt er, na ontwikkeling,

$$\left.\begin{aligned} &(Pa^2 + Qa'^2 + Ra''^2)x^2\\ +\ &(Pb^2 + Qb'^2 + Rb''^2)y^2\\ +\ &(Pc^2 + Qc'^2 + Rc''^2)z^2\\ +\ &2(Pbc + Qb'c' + Rb''c'')yz\\ +\ &2(Pca + Qc'a' + Rc''a'')xz\\ +\ &2(Pab + Qa'b' + Ra''b'')xy\end{aligned}\right\} = 1;$$

en daar deze vergelijking identiek met de gegevene moet wezen, is dan:

$$\left.\begin{aligned} A &= Pa^2 + Qa'^2 + Ra''^2,\\ B &= Pb^2 + Qb'^2 + Rb''^2,\\ C &= Pc^2 + Qc'^2 + Rc''^2,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} D &= Pbc + Qb'c' + Rb''c''\\ E &= Pca + Qc'a' + Rc''a'',\\ F &= Pab + Qa'b' + Ra''b''.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De som der vergelijkingen (8) geeft, door middel van (3) terstond

$$P + Q + R = A + B + C. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Zoo wij de twee eerste der vergelijkingen (8) met elkander vermenigvuldigen, en het product met de tweede magt van de derde der vergelijkingen (9) verminderen, komt er:

Digitized by Google

$$AB - F^2 = \left\{\begin{array}{l} PQ(a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2aba'b') \\ + QR(a'^2b''^2 + a''^2b'^2 - 2a'b'a''b'') \\ + RP(a''^2b^2 + a^2b''^2 - 2aba''b'') \end{array}\right\},$$

dat is: $AB - F^2 = PQ(ab' - a'b)^2 + QR(a'b'' - a''b')^2 + RP(a''b - ab'')^2$, of door middel van (7)

$$AB - F^2 = PQc''^2 + QRc^2 + RPc'^2;$$

gelijkerwijze vindt men:

$$BC - D^2 = PQa''^2 + QRa^2 + RPa'^2,$$
$$CA - E^2 = PQb''^2 + QRb^2 + RPb'^2,$$

en de som der drie laatste vergelijkingen geeft dan, door middel van (3),

$$PQ + QR + RP = AB + BC + CA - (D^2 + E^2 + F^2) \ldots (11).$$

Uit de waarden (8) en (9) volgt verder:

$$DF - BE = \left\{\begin{array}{l} PQ(bca'b' + abb'c' - b^2a'a' - b'^2ca) \\ + QR(a'b'b''c'' + b'c'a''b'' - b'^2c''a'' - b''^2c'a') \\ + RP(b''c''ab + a''b''bc - b''^2ca - b^2c''a'') \end{array}\right\},$$

$$EF - AD = \left\{\begin{array}{l} PQ(caa'b' + c'a'ab - a^2b'c' - a'^2bc) \\ + QR(c'a'a''b'' + c''a''a'b' - a'^2b''c'' - a''^2b'c') \\ + RP(c''a''ab + caa''b'' - a''^2bc - a^2b''c'') \end{array}\right\},$$

dat is:

$$DF - BE = \left\{\begin{array}{l} PQ(ab' - a'b)(bc' - b'c) \\ + QR(a'b'' - a''b')(b'c'' - b''c') \\ + RP(a''b - ab'')(b''c - bc'') \end{array}\right\},$$

$$EF - AD = \left\{\begin{array}{l} PQ(ab' - a'b)(ca' - c'a) \\ + QR(a'b'' - a''b')(c'a'' - c''a') \\ + RP(a''b - ab'')(c''a - ca'') \end{array}\right\},$$

of door middel van (7)

$$DF - BE = PQc''a'' + QRca + RPc'a';$$

en

$$EF - AD = PQb''c'' + QRbc + RPb'c';$$

deze waarden respectievelijk vermenigvuldigende met de waarden van E en D volgens (9), komt er:

$$E(DF - BE) = \left\{\begin{array}{l} P(Q^2 + R^2)c'a'c''a'' \\ + Q(R^2 + P^2)c''a''ca \\ + R(P^2 + Q^2)cac'a' \\ + PQR(a^2c^2 + a'^2c'^2 + a''^2c''^2) \end{array}\right\},$$

$$D(EF - AD) = \left\{\begin{array}{l} P(Q^2 + R^2)c'b'c''b'' \\ + Q(R^2 + P^2)c''b''cb \\ + R(P^2 + Q^2)cbc'b' \\ + PQR(b^2c^2 + b'^2c'^2 + b''^2c''^2) \end{array}\right\},$$

en de boven reeds voor $AB - F^2$ gevondene waarde met de waarde van C volgens (8) vermenigvuldigende, vinden wij:

Digitized by Google

$$C(AB - F^2) = \left\{\begin{array}{l} P(Q^2 + R^2)\, c'^2 c''^2 \\ + Q(R^2 + P^2)\, c''^2 c^2 \\ + R(P^2 + Q^2)\, c^2 c'^2 \\ + PQR\,(c^4 + c'^4 + c''^4) \end{array}\right\};$$

tellen wij nu de drie laatste vergelijkingen bij elkander op, dan vinden wij voor de som der voorste leden:

$$ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2;$$

de sommen van de eerste termen, van de tweede termen, en van de derde termen der achterste leden, worden volgens (4):

$$\begin{aligned} P(Q^2 + R^2)\, c'c''(a'a'' + b'b'' + c'c'') &= 0, \\ Q(R^2 + P^2)\, c''c\,(a''a + b''b + c''c) &= 0, \\ R(P^2 + Q^2)\, cc'\,(aa' + bb' + cc') &= 0, \end{aligned}$$

en de som der achterste termen wordt, volgens (3) en (5),

$$PQR\{c^2(a^2+b^2+c^2) + c'^2(a'^2+b'^2+c'^2) + c''^2(a''^2+b''^2+c''^2)\}$$
$$= PQR\,(c^2 + c'^2 + c''^2) = PQR,$$

zoodat de genoemde optelling geeft

$$PQR = ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2. \quad . \quad . \quad (12)$$

Daar dan nu door de vergelijkingen (10), (11) en (12), van de drie grootheden P, Q en R bekend zijn geworden: de som, de som der producten twee aan twee, en het gedurig product, zoo zijn die drie grootheden de wortels der derdemagtsvergelijking

$$\left.\begin{array}{r} X^3 \\ - (A+B+C)\, X^2 \\ + (AB+BC+CA - D^2 - E^2 - F^2)\, X \\ - (ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) \end{array}\right\} = 0, \quad . \quad (13)$$

welker coëfficiënten op eene regelmatige wijze in de coëfficiënten der gegevene vergelijking uitgedrukt zijn.

De wortels dezer derdemagtsvergelijking kunnen dan door benadering gevonden worden; en zoo wij hen door X_1, X_2 en X_3 voorstellen, hebben wij:

$$P = X_1 \quad Q = X_2 \text{ en } R = X_3.$$

Stellen wij eindelijk, in de vergelijking (1) der ellipsoïde,

$$P = \frac{1}{p^2}, \; Q = \frac{1}{q^2} \text{ en } R = \frac{1}{r^2},$$

dan wordt zij $\quad \frac{t^2}{p^2} + \frac{u^2}{q^2} + \frac{v^2}{r^2} = 1,$

zoodat nu p, q en r de lengten van de halve assen voorstellen. De assen der ellipsoïde zijn derhalve:

$$2p = \frac{2}{\sqrt{X_1}}, \; 2q = \frac{2}{\sqrt{X_2}} \text{ en } 2r = \frac{2}{\sqrt{X_3}}.$$

Digitized by Google

De gegevene vergelijking zal alleen dan tot eene ellipsoïde kunnen behooren, wanneer de vergelijking (13) drie positieve wortels heeft. Mogt de vergelijking (13) twee positieve en een negatieven, of twee negatieve en een positieven wortel hebben, dan zou de gegevene vergelijking tot eene hyperboloïde met een of twee bladen behooren. In andere gevallen kan de gegevene vergelijking tot geen bestaanbaar oppervlak behooren.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Ten einde de omslagtige berekeningen te ontwijken, die uit het overgaan tot een ander regthoekig coördinatenstelsel voortvloeijen, zullen wij ter oplossing des voorstels eenen anderen weg inslaan, en volgen hetgeen daaromtrent in het voortreffelijke werk van M. F. le Roy; *Analyse appliquée à la Géometrie des trois dimensions*, gevonden wordt.

Laten de vergelijkingen eener lijn in de ruimte

$$x = mz + p \quad \text{en} \quad y = nz + q \ldots \quad (1)$$

zijn. Indien dan aangenomen wordt, dat m en n standvastig, doch p en q veranderlijk zijn, stellen deze vergelijkingen een stelsel van evenwijdige lijnen voor, die, voor zoo verre zij de ellipsoïde snijden, een stelsel van evenwijdige koorden vormen. Beginnen wij nu met de meetkunstige plaats van het midden van al die koorden te bepalen.

Brengen wij hiertoe de waarden van x en y volgens (1), in de gegevene vergelijking over, dan komt er

$$\left.\begin{array}{l}(Am^2 + Bn^2 + C + 2Dn + 2Em + 2Fmn)\,z^2 \\ +\,2(Amp + Bnq + Dq + Ep + Fmq + Fnp)\,z \\ +\,(Ap^2 + Bq^2 + 2Fpq - 1)\end{array}\right\} = 0; \ldots \quad (2)$$

voor elke bepaalde waarde van p en q zal deze vergelijking de twee waarden z_1 en z_2 doen kennen, van de punten in welke het oppervlak der ellipsoïde door eene der evenwijdige koorden (1) gesneden wordt; voor het midden van die koorde is dan $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$, en omdat nu de som van de wortels der vergelijking (2), gelijk is aan den coëfficiënt van z, gedeeld door dien van z^2, negatief genomen, zoo hebben wij, voor het midden der evenwijdige koorden,

$$\frac{Amp + Bnq + Dq + Ep + Fmq + Fnp}{Am^2 + Bn^2 + C + 2Dn + 2Em + 2Fmn}; \ldots \quad (3)$$

om dus de meetkunstige plaats van het midden van al de even-

Digitized by Google

wijdige koorden te vinden, moeten p en q tusschen de vergelijkingen (1) en (3) geëlimineerd worden; hiertoe uit (1) afleidende $p = x - ms$, $q = y - ns$, en deze waarden in (3) substituerende, komt er na herleiding

$$(Am+E+Fn)x+(Bn+D+Fm)y+(C+Dn+Em)z=0, \quad (4)$$

en die meetkunstige plaats is alzoo een plat vlak, dat door den oorsprong der coördinaten en derhalve door het middelpunt der ellipsoïde gaat. Wij zullen dit vlak, dat, even als de middellijnen in de kegelsneden, de eigenschap heeft dat het alle evenwijdige koorden middendoordeelt, een *middenvlak* noemen. Het spreekt van zelf dat in de ellipsoïde een oneindig aantal middenvlakken zijn, omdat men in de vergelijking (4) ook m en n zich als veranderlijk kan voorstellen.

Stellen wij ons nu voor m en n zoodanig te bepalen, dat het middenvlak het stelsel van evenwijdige koorden niet alleen middendoordeelt, maar ook regthoekig snijdt; alsdan gaat het middenvlak door twee van de assen der ellipsoïde, en snijdt haar oppervlak volgens eene hoofddoorsnede; terwijl de evenwijdige koorden, evenwijdig zullen loopen met de derde as, die zelve niets anders zijn zal dan een dier koorden, gaande door het middelpunt, en waarvan dan de lengte zal moeten berekend worden.

Hiertoe nu moeten de projectiën der evenwijdige koorden (1) loodregt staan op de doorgangen van het vlak (4) door de vlakken der xz en der yz. Maar de vergelijkingen van deze doorgangen zijn

$$(Am+E+Fn)x+(C+Dn+Em)z=0$$

en $$(Bn+D+Fm)y+(C+Dn+Em)z=0,$$

of wel

$$x=-\frac{C+Dn+Em}{Am+E+Fn}z \quad \text{en} \quad y=-\frac{C+Dn+Em}{Bn+D+Fm}z,$$

terwijl die der projectiën zijn

$$x = mz + p \quad \text{en} \quad y = nz + q;$$

tot den loodregten stand dezer lijnen wordt dus gevorderd, dat men hebbe

$$m=+\frac{Am+E+Fn}{C+Dn+Em} \quad \text{en} \quad n=+\frac{Bn+D+Fm}{C+Dn+Em},$$

uit welke vergelijkingen m en n door eene derdemagtsvergelijking kunnen worden opgelost.

Om deze oplossing gemakkelijker te maken, stellen wij nog $C+Dn+Em = s$ en wij hebben dan de drie vergelijkingen:

Digitized by Google

$$m(A-s)+E+Fn=0, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$n(B-s)+D+Fm=0, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$
$$C-s+Dn+Em=0; \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

vermenigvuldigen wij nu eerst (5) met $B-s$ en (6) met F, dan geeft het verschil dier producten

$$\{(A-s)(B-s)-F^2\}\,m+E(B-s)-FD=0; \quad \ldots (8)$$

vermenigvuldigen wij echter (6) met $A-s$, en (5) met F, dan komt er door aftrekking

$$\{(A-s)(B-s)-F^2\}\,n+D(A-s)-FE=0, \quad \ldots (9)$$

en brengen wij vervolgens de waarden van m en n, uit (8) en (9) afgeleid, in (7) over, dan verkrijgen wij

$$-(A-s)(B-s)(C-s)+D^2(A-s)+E^2(B-s)+F^2(C-s)-2DEF=0,$$

of na ontwikkeling

$$\left.\begin{array}{l} s^3-(A+B+C)s^2 \\ +(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)s \\ -(ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2) \end{array}\right\}=0, \quad \ldots (10)$$

welke vergelijking bij de ellipsoïde drie bestaanbare en positieve wortels moet hebben.

Om eindelijk de as te bepalen, die door het middenvlak wordt middendoorgedeeld, merken wij op, dat deze tot het stelsel der evenwijdige koorden (1) behoort, doch door den oorsprong gaat. Hare vergelijkingen zijn alzoo

$$x=mz \quad \text{en} \quad y=nz, \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

en om hare snijpunten met het oppervlak der ellipsoïde te vinden, hebben wij dus in (2) slechts $p=0$ en $q=0$ te stellen, waardoor wij verkrijgen

$$(Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn)\,z^2=1$$

$$\text{of} \quad z^2=\frac{1}{Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn}; \quad (12)$$

zij nu a de lengte van deze halve as, en laten x, y en z de coördinaten van haar uiteinde zijn, dan is

$$a^2=x^2+y^2+z^2,$$

of voor x en y de waarden (11) substituerende

$$a^2=(m^2+n^2+1)\,z^2,$$

en eindelijk door (12)

$$a^2=\frac{m^2+n^2+1}{Am^2+Bn^2+C+2Dn+2Em+2Fmn}. \quad (13)$$

Deze uitdrukking kan zeer vereenvoudigd worden, want de vergelijkingen (5), (6) en (7) geven, na de eerste met m en de

Digitized by Google

tweede met s vermenigvuldigd te hebben,

$$s^2 s = As^2 + Es + Fss,$$
$$s^2 s = Bs^2 + Ds + Fss,$$
$$s = C + Ds + Es,$$

en hieruit volgt door optelling

$(s^2 + s^2 + 1)s = As^2 + Bs^2 + C + 2Ds + 2Es + 2Fss$,

waardoor (13) geeft:

$$a^2 = \frac{1}{s},\quad a = \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ en } 2a = \frac{2}{\sqrt{s}} \ldots (14)$$

Omdat s in de vergelijking (10) drie waarden heeft, leert de laatstgevondene formule (14) de lengte van alle drie de assen der ellipsoïde kennen; en het berekenen van die assen, komt dus neder op het berekenen der waarden van s uit de vergelijking (10), na daarin voor A, B, C enz. de gegevene getallenwaarden gesubstitueerd te hebben.

CCXXXIV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer een drievlakkige hoek, welks gedaante onveranderlijk is, gelijktijdig om elk zijner ribben tracht te draaijen, met eene hoeksnelheid die voor elke ribbe afzonderlijk gegeven is, begeert men te vinden, welke beweging deze drievlakkige hoek werkelijk zal verkrijgen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Laat een ligchaam gelijktijdig trachten te draaijen, om twee elkander in O snijdende assen OA en OB (Fig. 165), respectievelijk met de hoeksnelheden a en b; en laten deze draaijende bewegingen plaats hebben in zoodanigen zin, als wij in de figuur aangewezen hebben door pijltjes, gesteld op perspectievisch afgebeelde kleine cilinders, die mede OA en OB tot assen hebben.

Beschouwen wij nu van het bedoelde ligchaam een punt P, binnen den hoek AOB, en in deszelfs vlak, zoodanig gelegen, dat de loodlijnen PQ en PR, uit dit punt op de assen OA en OB nedergelaten, omgekeerd evenredig zijn met de hoeksnelheden a en b, zoodat wij kunnen stellen $PQ = nb$ en $PR = na$; dan zal, gedurende een oneindig klein tijddeeltje t, de omdraaijing om de as OA ten gevolge hebben, dat het punt P eenen oneindig kleinen weg $at \times PQ$ aflegt, en wel uit P loodregt op het vlak AOB naar voren; en gedurende dat zelfde tijddeeltje t, zal de omdraaijing om de as OB ten gevolge hebben, dat het punt P

Digitized by Google

eenen oneindig kleinen weg $bt \times$ PR aflegt, mede uit P loodregt op het vlak AOB, maar naar achteren. Daar nu PQ $=$ *nb* en PR $=$ *na* is, worden deze afgelegde wegen beide door *nabt* uitgedrukt, en zij zijn dus even groot; maar de eene wordt naar voren, de andere naar achteren afgelegd: derhalve is, na verloop van het tijddeeltje *t*, het punt P volkomen op dezelfde plaats, waar het eerst was. Na verloop van een nieuw tijddeeltje *t* is desgelijks het punt P nogmaals op dezelfde plaats, en zoo vervolgens; waaruit blijkt, dat de gelijktijdige draaijende bewegingen om de assen OA en OB het punt P in rust laten blijven.

De meetkunstige plaats van alle punten P, die de eigenschap hebben, dat de loodlijnen PQ en PR omgekeerd evenredig zijn met *a* en *b*, is de verlengde diagonaal OM van een parallelogram, welks langs OA en OB liggende zijden OA′ en OB′ de betrekkelijke hoegrootheid der hoeksnelheden *a* en *b* voorstellen. Wanneer dus het ligchaam met die hoeksnelheden gelijktijdig om de assen OA en OB tracht te draaijen, zal het werkelijk om dien diagonaal OM als as draaijen; want deze beweging is de eenige mogelijke, waarbij al de punten van OM op hunne plaats blijven. De zin dezer omdraaijing is blijkbaar zoo, als wij die mede door een pijltje hebben aangewezen, op den perspectievisch afgebeelden kleinen cilinder, die OM tot as heeft; want alle punten van OA, die bij de wenteling om OA op hunne plaats blijven, bewegen zich, bij de wenteling om OB, naar achteren; terwijl de punten van OB zich, bij de wenteling om OA, naar voren bewegen, en bij de wenteling om OB niet van plaats veranderen. Er blijft dus nog over de hoeksnelheid te bepalen, waarmede de beweging om OM als as plaats heeft.

Omdat bij de wenteling van een ligchaam om eene as, alle punten op hetzelfde oogenblik ook dezelfde hoeksnelheid bezitten, beschouwen wij te dien einde een willekeurig punt R van de lijn OB, en laten wij uit dit punt loodlijnen RS en RT op OA en OM vallen. Het punt R van het bedoelde ligchaam, legt gedurende het tijddeeltje *t*, ten gevolge van de wenteling om OA, eenen oneindig kleinen weg *at* $\times$ RS af, terwijl het, ten gevolge van de wenteling om OB, niet van plaats verandert; de oneindig kleine weg *at* $\times$ RS, uit R loodregt op het vlak AOB naar voren afgelegd, is dus ook de weg dien het punt R, bij de wenteling om OM beschrijft; maar de hoeksnelheid dezer wenteling door *m* voorstellende, wordt die weg door *mt* $\times$ RT

Digitized by Google

uitgedrukt, zoodat wij hebben

$$mt \times RT = at \times RS \quad \text{of} \quad m = \frac{a \times RS}{RT};$$

daar voorts RS en RT loodlijnen zijn, uit eenig punt van de verlengde zijde eens parallelograms op de andere zijde en den diagonaal nedergelaten, zijn zij omgekeerd evenredig met die andere zijde en diagonaal, dat is, wij hebben

$$RS : RT = OM' : OA' \quad \text{en dus} \quad m = \frac{a \times OM'}{OA'};$$

en dewijl nu OA' de betrekkelijke grootte van a voorstelt, blijkt hieruit, dat ook OM' de betrekkelijke grootte van m is. De diagonaal van het parallellogram OA'M'B', wijst dus niet alleen de as, maar ook de hoeksnelheid der resulterende beweging aan.

Hoezeer deze waarde van m de hoeksnelheid gedurende het tijddeeltje t is, is het klaar, dat zij voor alle opvolgende tijddeeltjes dezelfde waarde zal blijven behouden, indien slechts a en b niet veranderen; en dat bijgevolg eenparige omwentelingen om OA en OB ook eene resulterende eenparige omwenteling om OM zullen opleveren.

Bij de voorgaande verklaringen hebben wij ondersteld, dat de draaijende bewegingen om OA en OB, uit O naar A en uit O naar B gezien, beide in dien zin plaats hadden, waarin wij gewoon zijn de wijzers dezer uurwerken te zien draaijen; dezen zin van omdraaijing positief noemende, hebben wij dan ook deze positieve resulterende beweging verkregen, zoodat die resulterende beweging, uit O naar M gezien, almede in dienzelfden zin plaats heeft.

Mogt echter een der gegevene bewegingen, b. v. die om OA, uit O naar A gezien, eenen negatieven zin hebben, zoo als in Fig. 166 is voorgesteld, dan zou zij uit O naar A' gezien, eenen positieven zin hebben, en de resulterende beweging zou dan blijkbaar, zoo wat hare as, haren zin, als hare hoeksnelheid betreft, aangewezen worden door den diagonaal OM' van een parallelogram, waarvan de zijden OA' en OB' wederom evenredig met de hoeksnelheden a en b zijn, maar waarvan de zijde OA' op het verlengde van OA in plaats van op OA zelve is uitgezet. Mogten de beide gegevene bewegingen eenen negatieven zin hebben, zoo als in Fig. 167, dan zou men de zijden OA' en OB', die de betrekkelijke grootte der hoeksnelheden a en b voorstellen, beide op de verlengden van OA en OB uitzetten, om den diagonaal OM'

Digitized by Google

te vinden, die de hoeksnelheid en de as der resulterende beweging doet kennen, welke dan altijd van O naar M' gezien, eenen positieven zin heeft.

Even als men nu twee draaijende bewegingen, om elkander snijdende assen, tot eene resulterende draaijende beweging om eene nieuwe as kan zamenstellen, zal men deze laatste weder kunnen zamenstellen met een derde draaijende beweging om eene as, die de laatste snijdt; en liggen deze assen, terwijl zij een gemeenschappelijk snijpunt hebben, twee aan twee in verschillende vlakken, dan zal de diagonaal, dien men bij de tweede zamenstelling verkrijgt, blijkbaar de diagonaal zijn van een parallelopipedum, welks ribben de betrekkelijke hoegrootheden voorstellen van de hoeksnelheden der drie zamenstellende bewegingen.

Hieruit volgt dan, dat de voorgestelde vraag op de volgende wijze opgelost wordt: Zet, van het hoekpunt des drievlakkigen hoeks af, op elke ribbe eene lijn uit, die de betrekkelijke grootte van de hoeksnelheid der draaijende beweging om die ribbe voorstelt; en wel op de ribbe zelve of op haar verlengde, naargelang zulks noodig is om te maken, dat de beweging om die ribbe eenen positieven zin heeft, wanneer zij uit het hoekpunt naar het andere uiteinde der uitgezette lijn gezien wordt; beschrijf op de alzoo uitgezette lijnen als ribben een parallelopipedum, en trek daarin uit het hoekpunt des drievlakkigen hoeks een diagonaal naar het overstaande hoekpunt; dan zal de werkelijke beweging, die de drievlakkige hoek verkrijgt, eene omwenteling om dien diagonaal als as zijn; de hoeksnelheid dier omwenteling zal in grootte door dien diagonaal worden voorgesteld; en den zin dier omwenteling zal, uit het hoekpunt des drievlakkigen hoeks naar het andere uiteinde dez diagonaals gezien, positief zijn.

Het zal wel onnoodig zijn te doen opmerken, dat deze zamenstelling van drie draaijende bewegingen om assen die door een zelfde punt gaan, geheel overeenkomt met de zamenstelling van drie krachten, die op een zelfde punt werken. Het snijpunt der assen komt dan overeen met het aangrijpingspunt der krachten, de rigting der assen met de rigting der krachten, en het draaijen in den eenen of anderen zin, met het trekken der krachten naar de eene of andere zijde.

CCXXXV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Hetzelfde als in het voorgaande voorstel wordt gevraagd,

Digitized by Google

ten aanzien van een driehoekig prisma, dat gelijktijdig om elk zijner drie evenwijdige ribben tracht te draaijen.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat een ligchaam gelijktijdig trachten te draaijen om twee evenwijdige assen AA′ en BB′ (Fig. 168), respectievelijk met de gegevene hoeksnelheden a en b, en beide in denzelfden zin, in de figuur even als bij de vorige oplossing door pijltjes aangeweren. Beschouwen wij dan weder een punt P des ligchaams, tusschen die evenwijdige assen en in haar vlak zoodanig gekozen, dat de loodlijnen PQ en PR, uit dit punt op de assen vallende, omgekeerd evenredig met a en b zijn, zoodat $PQ = nb$ en $PR = na$ kan gesteld worden, dan blijkt ook weder, even als in de voorgaande oplossing, dat het punt P, bij de gelijktijdige wenteling des ligchaams om de assen AA′ en BB′ niet van plaats verandert. Maar de meetkunstige plaats van alle punten P, die de eigenschap hebben, dat de loodlijnen PQ en PR omgekeerd evenredig met a en b zijn, is nu eene lijn MM′, evenwijdig met AA′ en BB′. Indien dus het ligchaam gelijktijdig om AA′ en BB′ tracht te draaijen, zal eene werkelijke wenteling om de lijn MM′ daarvan het gevolg zijn. Deze wenteling heeft blijkbaar denzelfden zin als die om de assen AA′ en BB′, en om hare hoeksnelheid m te vinden, kunnen wij wederom een willekeurig punt van een der eerste assen, b.v. het punt R van BB′, beschouwen.

Dit punt R legt bij de wenteling om AA′ gedurende het oneindig kleine tijddeeltje t eenen weg $at \times QR$, uit R loodregt op het vlak der assen, naar voren af, terwijl het bij de wenteling om BB′ niet van plaats verandert; die weg $at \times QR$ is dus de weg, dien het punt bij de resulterende wenteling aflegt, en wordt als zoodanig uitgedrukt door $mt \times PR$, zoodat wij hebben

$$mt \times PR = at \times QR = at \times (PR + PQ),$$

dat is: $$mt \times na = at \times (na + nb),$$

en deze vergelijking door nat deelende, komt er

$$m = a + b;$$

de hoeksnelheid der resulterende wenteling is dus de som der gegevene hoeksnelheden.

Hadden de gegevene draaijende bewegingen om de assen AA′ en BB′ eenen tegengestelden zin, zoo als in Fig. 169 is voorgesteld, dan zou een punt P, om bij die gelijktijdige bewegingen

Digitized by Google

in rust te blijven, buiten de evenwijdige lijnen in haar vlak moeten gekozen worden, zoodanig dat de loodlijnen PQ en PR op de assen nedergelaten wederom omgekeerd evenredig met a en b, dus $PQ = nb$ en $PR = na$, waren. Onderstellende dat $a > b$ is, zal $PR > PQ$ moeten zijn, en dus het punt P aan de zijde van AA', dat is aan de zijde van de as der grootste hoeksnelheid, buiten de evenwijdige assen moeten vallen; de resulterende beweging zal nu eene wenteling om de as MM' zijn, door het punt P evenwijdig met AA' en BB' getrokken. Zij heeft denzelfden zin als de beweging om AA', die de grootste der gegevene hoeksnelheden had; want naar den zin door de pijltjes aangeduid, zou BB', bij de wenteling om AA' alleen, zich achterwaarts bewegen, terwijl evenzoo, bij de wenteling om BB' alleen, AA' zich achterterwaarts bewegen zou. Voorts wordt nu hare hoeksnelheid, door wederom de beweging van het punt R te beschouwen, gevonden uit de vergelijking

$$mt \times PR = at \times QR = at \times (PR - PQ),$$

die dan geeft $m = a - b$,

zoodat deze hoeksnelheid nu het verschil der gegevene is.

Stelt men zich twee krachten voor, wier rigtingen langs AA' en BB' vallen, die in grootte door a en b worden voorgesteld, die in Fig. 168 naar denzelfden kant, maar in Fig. 169 (waar wij $a > b$ stellen) naar verschillende zijden werken, dan zal de resultant dezer krachten, in beide figuren langs MM' vallen; in Fig. 168 zal die resultant de som der krachten of $a + b$ zijn en naar denzelfden kant werken als a en b; in Fig. 169 echter zal die resultant het verschil der krachten of $a - b$ zijn, en naar denzelfden kant werken als de grootste kracht a. De bekende zamenstelling van evenwijdige krachten, verschaft dus dadelijk het middel, om twee draaijende bewegingen om evenwijdige assen, tot eene enkele draaijende beweging om eene nieuwe evenwijdige as zamen te stellen.

Even als men nu twee zulke bewegingen om evenwijdige assen tot ééne kan zamenstellen, zal men deze weder kunnen zamenstellen met eene derde, die mede om eene evenwijdige as plaats heeft. Hieruit volgt dan, dat de voorgestelde vraag op de volgende wijze opgelost wordt: Breng langs de drie evenwijdige ribben van het driehoekig prisma drie krachten aan, die in grootte met de gegevene hoeksnelheden overeenkomen, en die langs elke ribbe naar deze of gene zijde trekken, naargelang de omdraaijing om

Digitized by Google

die ribbe in dezen of genen zin ondersteld wordt plaats te hebben; en bepaal vervolgens de resultant dezer drie evenwijdige krachten. De beweging, die het prisma werkelijk verkrijgt, zal dan eene draaijende beweging zijn, om de lijn, waar langs die resultant valt, als omwentelings-as; de hoeksnelheid dezer resulterende beweging, zal in grootte met de genoemde resultant overeenkomen; en die beweging zal in dezen of genen zin plaats hebben, naargelang de resultant naar deze of gene zijde trekt.

Aanmerking. In Fig. 169 is

$$PQ = \frac{b}{a-b} \times QR \quad \text{en} \quad PR = \frac{a}{a-b} \times QR;$$

stelt men, altijd aan QR, of den afstand der assen AA′ en BB′, eenige waarde toekennende, $a = b$, dan wordt

$$PQ = \infty, \quad PR = \infty \quad \text{en} \quad m = a - b = 0;$$

de bewegingen om twee evenwijdige assen, met even groote hoeksnelheden in tegengestelden zin, levert dus tot resulterende beweging op eene omwenteling met de hoeksnelheid *nul* om eene as die *oneindig ver af* is. Zulk eene beweging kan niet anders dan eene regt voortgaande zijn, loodregt op het vlak der evenwijdige assen gerigt.

Was echter niet alleen $a = b$ maar tevens $QR = 0$, dan zou men hebben

$$PQ = \frac{0}{0}, \quad PR = \frac{0}{0} \quad \text{en} \quad m = 0;$$

twee tegengestelde bewegingen, met gelijke hoeksnelheden om eene zelfde as, geven dus tot resulterende beweging eene omwenteling met de snelheid *nul*, om eene as die *onbepaald* is, en dus ergens naar welgevallen kan genomen worden; dat is die twee tegengestelde bewegingen laten het ligchaam in rust.

CCXXXVI. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

De horizontale en verticale projectiën te construeren, van een regelmatig achtvlak, onderstellende, dat dit ligchaam met een zijner zijvlakken op het horizontale vlak ligt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., A. van Otterloo *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat de gelijkzijdige driehoek ABC (Fig. 170) het zijvlak zijn, waarmede het ligchaam op het horizontale vlak ligt, en dat wij dus als grondvlak aannemen. Indien wij dan op BC, CA en AB drie

Digitized by Google

gelijkzijdige driehoeken BCD, CAE en ABF beschrijven, stellen deze driehoeken wederom drie zijvlakken des ligchaams voor, die, respectievelijk om de ribben BC, CA en AB draaijende, op het horizontale vlak zijn neergeslagen. Worden deze neergeslagene zijvlakken weder in hunnen oorspronkelijken stand gebragt, dan zullen de horizontale projectiën der punten D, E en F in de loodlijnen Dd, Ee en Ff vallen, uit D, E en F op BC, CA en AB nedergelaten; terwijl die punten zelven even hoog boven het horizontale vlak zullen gekomen zijn, en dus de afstanden hunner projectiën gelijk aan hunne werkelijke afstanden zullen wezen. Maar die werkelijke afstanden zijn ribben van het ligchaam; indien dus D′, E′ en F′ de horizontale projectiën zijn, der in hunnen oorspronkelijken stand gebragte punten D, E en F, is D′E′F′ een gelijkzijdige driehoek, die gelijk en gelijkvormig met ABC is; terwijl verder de ligging der punten D′, E′ en F′ op de loodlijnen Dd, Ee en Ff blijkbaar ten gevolge heeft, dat de driehoeken ABC en D′E′F′ hetzelfde middelpunt en evenwijdige zijden hebben.

De hoogte, waarop het punt D boven het horizontale vlak is gekomen, zoodra het zich in D′ projecteert, is blijkbaar de regthoekszijde van een regthoekigen driehoek, die D′d tot andere regthoekszijde en Dd tot hypothenusa heeft; stellende dus uit D′ eene loodlijn op Dd, en beschrijvende uit d met Dd als straal een cirkelboogje, de genoemde loodlijn in d′ snijdende, zoo is D′d′ de hoogte boven het horizontale vlak, van de hoekpunten des ligchaams die zich in D′, E′ en F′ projecteren.

Uit dit alles volgt dan deze constructie:

Beschrijf om het gegevene grondvlak ABC (Fig. 171) eenen cirkel, deel daarvan de bogen BC, CA en AB middendoor in D′, E′ en F′ en trek de lijnen D′E′, E′F′, F′D′, AE′, AF′ BD′, BF′, CD′ en CE′, dan is ABCD′E′F′ de horizontale projectie van het regelmatig achtvlak. Trek AD′, die BC regthoekig in d zal snijden, stel Dd′ loodregt op D′d, en maak dd′ gelijk aan Ad. Neem vervolgens eene willekeurige lijn OX als as van projectie aan; laat uit de punten A, B en C loodlijnen AA″, BB″ en CC″ op die as vallen, en trek ook uit de punten D′, E′ en F′, regthoekig door de as, lijnen D′D″, E′E″ en F′F″, wier uiteinden D″, E″ en F″ zich ter hoogte D′d′ boven die as verheffen. Na dan A″ met E″ en F″, B″ met D″ en F″, en C″ met D″ en E″ vereenigd te hebben, alsmede E″F″D″ te hebben getrokken, zal A″B″C″D″E″F″ de verticale projectie van het regelmatig achtervlak zijn.

Digitized by Google

CCXXXVII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

De horizontale en verticale projectiën te construeren, van een regelmatig twaalfvlak; onderstellende dat dit ligchaam met een zijner zijvlakken op het horizontale vlak ligt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., A. van Otterloo *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat de regelmatige vijfhoek ABCDE (Fig. 172) het zijvlak zijn, dat wij als een op het horizontale vlak liggend grondvlak des ligchaams aannemen. Indien wij dan, op elke zijde van dezen vijfhoek, wederom een regelmatigen vijfhoek beschrijven, stellen deze nieuwe vijfhoeken vijf andere zijvlakken van het ligchaam voor, die, respectievelijk om de ribben AB, BC, CD, DE en EA draaijende, op het horizontale vlak zijn neergeslagen. Worden deze neergeslagen vlakken weder in hunnen oorspronkelijken stand gebragt, dan zullen de diagonalen FG, GH, HI, IK en KF almede eenen regelmatigen vijfhoek gaan vormen, wiens vlak en wiens zijden evenwijdig met het vlak en de zijden van den vijfhoek ABCDE loopen, en die zich dus in zijne werkelijke grootte op het horizontale vlak projecteert; zoodanig dat zijne projectie F'G'H'I'K' insgelijks een regelmatige vijfhoek is, die hetzelfde middelpunt heeft als de vijfhoek ABCDE, terwijl ook de zijden van F'G'H'I'K' evenwijdig met die van ABCDE loopen, en gelijk aan de diagonalen van ABCDE zijn. Hierdoor worden dus de horizontale projectiën gevonden van de vijf hoekpunten des ligchaams, die het naast bij het grondvlak gelegen zijn.

De hoekpunten L, M, N, O en P der neergeslagene zijvlakken, zullen, bij het brengen dier vlakken in hunnen oorspronkelijken stand, hunne horizontale projectiën verkrijgen in de loodlijnen, uit L op AB, uit M op BC, enz. neergelaten; en die punten zelven zullen even hoog boven het horizontale vlak komen. De lijnen, die dan L met M, M met N, enz. vereenigen, zullen zich dus weder in hare wezenlijke grootte op het horizontale vlak projecteren; maar die lijnen zijn wederom diagonalen van de zijvlakken des ligchaams, die aan de als neergeslagen afgebeelde zijvlakken sluiten, en zij zijn dus gelijk aan de diagonalen des vijfhoeks ABCDE, of aan de zijden des vijfhoeks F'G'H'I'K'. Indien dus L', M', N', O' en P' de horizontale projectiën zijn, der in hunnen oorspronkelijken stand gebragte punten L, M, N, O en P, zal ook L'M'N'O'P'

Digitized by Google

een regelmatige vijfhoek zijn, die met F'G'H'I'K' denzelfden omgeschreven cirkel heeft, zoodanig dat de hoekpunten dier beide vijfhoeken den omtrek van dien omgeschreven cirkel in tien gelijke deelen verdeelen. Hierdoor worden dan de horizontale projectiën van nog vijf andere hoekpunten des ligchaams gevonden.

Het bovenvlak des ligchaams eindelijk is ten aanzien van den vijfhoek, die L'M'N'O'P' tot projectie heeft, evenzoo gelegen als het grondvlak ten aanzien van den vijfhoek, wiens projectie F'G'H'I'K' is. Hieruit volgt dat de horizontale projectie van het bovenvlak een regelmatige vijfhoek Q'R'S'T'U' is, die denzelfden omgeschreven cirkel heeft als ABCDE, en wiens hoekpunten, met de hoekpunten van ABCDE, ook den omtrek van dien omgeschreven cirkel in tien gelijke deelen verdeelen. Weshalve dan nu de horizontale projectiën van al de hoekpunten des ligchaams gevonden zijn.

Beschrijft men, na LL'l en FF'f loodregt op AB getrokken te hebben, met Ll als schuine zijde en L'l als regthoekszijde, als ook met Ff als schuine zijde en F'f als regthoekszijde, regthoekige driehoeken LL'l en FF'f (Fig. 173), dan is LlL' of FfF' de standhoek, dien het zijvlak ABL (Fig. 172) in zijnen oorspronkelijken stand met het verlengde grondvlak ABCDE maakt; derhalve is FF' (Fig. 173) de hoogte, boven het horizontale vlak, van de punten die zich in F', G', enz. (Fig. 172) projecteren; evenzoo is LL' (Fig. 173) de hoogte der punten, die zich in L', M', enz. (Fig. 172) projecteren; terwijl de som dezer hoogten FF' en LL', blijkbaar de hoogte van het bovenvlak des ligchaams boven het horizontale vlak is.

Neemt men nu nog in aanmerking, dat de diagonaal eens vijfhoeks verkregen wordt, indien men zijne zijde, na die in de uiterste en middelste reden gedeeld te hebben, met het grootste stuk verlengt; dat dus ook de straal des cirkels, die den vijfhoek F'G'H'I'K' omvat, zal verkregen worden, indien men den straal des cirkels, om den vijfhoek ABCDE beschreven, in de genoemde reden deelt en met zijn grootste stuk verlengt; dan volgt uit al het voorgaande deze constructie:

Beschrijf om het gegeven grondvlak ABCDE (Fig. 174) eenen cirkel; deel de bogen AB, BC, CD, DE en EA van dien cirkel middendoor in Q', R', S', T' en U', en vereenig de deelpunten door de zijden des vijfhoeks Q'R'S'T'U'; trek, uit de hoekpunten der beide vijfhoeken ABCDE en Q'R'S'T'U', lijnen AK', Q'L', BF',

Digitized by Google

R'M', enz. die uit het middelpunt m naar buiten gerigt zijn, en wier lengte gelijk is aan het grootste stuk van den in de uiterste en middelste reden verdeelden straal mA; trek vervolgens de lijnen K'L', L'F', F'M', M'G', enz., die eenen regelmatigen tienhoek zullen vormen, dan zal ABCDEK'L'F'M'G'N'H'O'I'P'Q'R'S'T'U' de horizontale projectie van het regelmatige twaalfvlak zijn.

Neem verder, in het horizontale vlak, eene willekeurige lijn OX als as van projectie aan; trek uit de horizontale projectiën der hoekpunten lijnen regthoekig door die as; trek voorts evenwijdig met die as lijnen, die zich op zoodanige hoogten FF', LL' en FF' + LL' boven de as bevinden, als wij in Fig. 173 hebben leeren construeren, dan zullen deze lijnen, door hare snijding met de voorgaanden, de verticale projectiën der hoekpunten doen kennen. Vereenig dan eindelijk deze verticale projectiën behoorlijk twee aan twee; dan zal hierdoor ook de verticale projectie A"B"C"F"G"K"L"M"N"Q"R"S" van het twaalfvlak gevonden zijn.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De horizontale en verticale projectiën te construeren, van een regelmatig twintigvlak; onderstellende dat dit ligchaam met een zijner zijvlakken op het horizontale vlak ligt.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN; W. VAN HAARST, JR., A. VAN OTTERLOO *en* W. L. IVANGH.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De vijf gelijkzijdige driehoeken, die als zijvlakken van het regelmatig twintigvlak aan eenig hoekpunt van dat ligchaam zamenkomen, kunnen beschouwd worden als de opstaande zijvlakken van eene piramide, waarvan de bazis een regelmatige vijfhoek is, die vijf ribben des ligchaams tot zijden heeft. Hieruit volgt, dat van twee zijvlakken, die volgens eene ribbe des ligchaams aan elkander sluiten, de afstand der over die ribbe gelegene hoekpunten gelijk is aan den diagonaal des regelmatigen vijfhoeks, op de ribbe des ligchaams als zijde beschreven.

Indien dus ABC (Fig. 175) het grondvlak is, waarmede het ligchaam op het horizontale vlak rust, terwijl BCD, CAE en ABF de drie daaraan volgens de ribben BC, CA en AB sluitende zijvlakken, op het horizontale vlak nedergeslagen, verbeelden, zullen de punten D, E en F dier neergeslagen zijvlakken in hunnen oorspronkelijken stand van elkander verwijderd zijn op afstanden gelijk aan den genoemden diagonaal. Daar voorts de punten D,

Digitized by Google

E en F in hunnen oorspronkelijken stand even hoog boven het horizontale vlak liggen, zullen hunne horizontale projectiën even ver van elkander moeten zijn als zij zelven, terwijl die projectiën blijkbaar moeten vallen in de loodlijnen uit D, E en F op de zijden des driehoeks ABC neergelaten; indien dus D', E' en F' deze projectiën verbeelden, is D'E'F' een gelijkzijdige driehoek, welks zijden evenwijdig met de zijden des driehoeks ABC loopen en gelijk zijn aan den diagonaal des vijfhoeks op AB als zijde beschreven, terwijl bovendien de driehoeken ABC en D'E'F' hetzelfde middelpunt hebben. Hierdoor worden alzoo de horizontale projectiën gevonden van de drie hoekpunten des ligchaams, die het naast bij het grondvlak liggen.

Beschrijven wij, in het horizontale vlak, ook nog de gelijkzijdige driehoeken AEG, AFG, BFH, BDH, CDI en CEI; indien dan deze driehoeken, nadat de zijvlakken BCD, CAE en ABF in hunnen oorspronkelijken stand gekomen zijn, om de ribben waarmede zij aan de laatstgenoemden sluiten, worden gewenteld, totdat de punten G en G, H en H, I en I zamenvallen, zullen G, H en I wederom drie hoekpunten van het ligchaam worden; in dezen oorspronkelijken stand, zijn ook de afstanden dier hoekpunten gelijk aan den diagonaal des meergenoemden vijfhoeks, want, elke twee van die drie punten, zijn hoekpunten van twee nieuwe zijvlakken des ligchaams, die volgens eene overstaande gemeenschappelijke ribbe aan elkander sluiten; bovendien zijn de punten G, H en I in hunnen oorspronkelijken stand even hoog boven het horizontale vlak, terwijl blijkbaar hunne horizontale projectiën moeten gelegen zijn op de verlengde loodlijnen, die in den driehoek ABC uit zijne hoekpunten op de overstaande zijden kunnen worden neergelaten. Indien dus G', H' en I' deze horizontale projectiën zijn, is ook G'H'I' een gelijkzijdige driehoek, die den meergenoemden diagonaal tot zijde heeft; deze driehoek G'H'I' is dan gelijk en gelijkvormig met D'E'F', terwijl beide denzelfden omgeschreven cirkel hebben, en de omtrek van dien cirkel door hunne hoekpunten in zes gelijke deelen verdeeld wordt. Hierdoor worden alzoo de horizontale projectiën van nog drie andere hoekpunten des ligchaams gevonden.

Het bovenvlak des ligchaams is wijders ten aanzien van den driehoek, die G'H'I' tot projectie heeft, evenzoo gelegen als het grondvlak ten aanzien van den driehoek, die zich in D'E'F' projecteert. Hieruit volgt dat de horizontale projectie van het boven-

Digitized by Google

vlak, een gelijkzijdige driehoek K'L'M' is, die denzelfden omgeschreven cirkel heeft als de driehoek ABC, en wiens hoekpunten, met die van ABC, ook den omtrek van dezen cirkel in zes gelijke deelen verdeelen. Derhalve zijn dan nu de horizontale projectiën, van al de hoekpunten des ligchaams gevonden.

De hoogten der punten D en G boven het horizontale vlak, worden blijkbaar gevonden door het zamenstellen van twee regthoekige driehoeken DdD' en GAG' (Fig. 176), welker regthoekszijden D'd en G'A de lengten hebben zoo als die in Fig. 175 voorkomen, terwijl de schuine zijden Dd en GA respectievelijk gelijk zijn aan de hoogte en aan de zijde van den driehoek ABC. De hoek DdD' is dan de hoek, dien het zijvlak BCD met het verlengde grondvlak maakt, terwijl GAG' de hoek van ribbe AG met het grondvlak is. De hoogte der punten D, E en F is dus de in Fig. 176 gevondene lijn DD', de hoogte der punten G, H en I, is de aldaar gevondene lijn GG', terwijl de som dezer lijnen DD' + GG' de hoogte van het bovenvlak boven het grondvlak is.

Neemt men nu nog in aanmerking, dat tusschen de stralen der cirkels, die de driehoeken ABC en D'E'F' omvatten, even als in het voorgaande voorstel, dezelfde verhouding bestaat als tusschen de zijde en de diagonaal eens regelmatigen vijfhoeks, dan volgt uit het aangevoerde deze constructie:

Beschrijf om het gegeven grondvlak ABC (Fig. 177) eenen cirkel, deel de bogen AB, BC en CA middendoor in M', K' en L', en vereenig die deelpunten door de zijden des driehoeks K'L'M'; trek, uit de hoekpunten der beide driehoeken ABC en K'L'M', lijnen AG', M'F', BH', K'D', enz., die uit het middelpunt m naar buiten gerigt zijn, en wier lengte gelijk is aan het grootste stuk van den in de uiterste en middelste reden verdeelden straal mA; trek vervolgens de lijnen AE', AF', M'G', M'H', BF', BD', enz. alsmede de lijnen G'E', E'I', I'D' enz. die te zamen een regelmatigen zeshoek vormen, dan is ABCD'E'F'G'H'I'K'L'M' de horizontale projectie van het regelmatig twintigvlak.

Door eene willekeurige lijn OX als as van projectie aan te nemen, en even als in het voorgaande voorstel, uit de in Fig. 176 geconstrueerde hoogten der punten, en uit hunne horizontale projectiën, de verticale projectiën te bepalen, en deze door lijnen behoorlijk te vereenigen, zal men dan ook de verticale projectie A"B"C"D"E"F"G"H"I"K"L"M" des ligchaams bekomen.

Digitized by Google

CCXXXIX. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Van drie getallen is de som 100; *de som hunner derdemagten is* 160000; *terwijl de som hunner vierkanten* 26200 *minder is dan hun gedurig product. Welke zijn die getallen?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., L. Hoefnagel, A. van Otterloo *en* W. L. Ivanch.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij de begeerde getallen voor door $10x$, $10y$ en $10z$, dan is volgens de opgave

$$10x + 10y + 10z = 100,$$

$$1000x^3 + 1000y^3 + 1000z^3 = 160000,$$

en $100x^2 + 100y^2 + 100z^2 = 1000xyz - 26200$;

of wel $$x + y + z = 10, \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 160, \ldots\ldots\ldots (2)$$

en $$x^2 + y^2 + z^2 = 10xyz - 262 \ldots\ldots (3)$$

De vergelijking (1) in het vierkant brengende, en daarna (3) er aftrekkende, vindt men, na halvering,

$$xy + xz + yz = 181 - 5xyz; \ldots\ldots (4)$$

door de derdemagt van $x + y + z$ te ontwikkelen en te herleiden, vindt men gemakkelijk de identieke vergelijking

$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz) - 3xyz$,

en hierin de waarden (1) en (2) overbrengende, komt er

$$1000 = 160 + 30\,(xy + xz + yz) - 3xyz,$$

of na herleiding $10\,(xy + xz + yz) = 280 + xyz \ldots\ldots (5)$

Uit de vergelijkingen (4) en (5), die door $xy + xz + yz = p$ en $xyz = q$ te stellen, overgaan in

$$p = 181 - 5q \quad \text{en} \quad 10p = 280 + q,$$

vindt men dadelijk $p = 31$, $q = 30$, en derhalve is

$$xy + xz + yz = 31. \ldots\ldots\ldots (6)$$

en $$xyz = 30. \ldots\ldots\ldots (7)$$

Daar dan nu door (1), (6) en (7), van de drie onbekenden x, y en z, bekend zijn: de som, de som van de producten twee aan twee, en het gedurig product, zijn, volgens eene bekende eigenschap der hoogeremagtsvergelijkingen, de waarden van x, y en z geene andere, dan de wortels der derdemagtsvergelijking

$$u^3 - 10u^2 + 31u - 30 = 0. \ldots\ldots (8)$$

Maar de wortels dezer vergelijking zijn $u = 2$, $u = 3$ en $u = 5$; alzoo zijn ook 2, 3 en 5 de waarden van x, y en z, weshalve de begeerde getallen zijn 20, 30 en 50.

Digitized by Google

CCXL. Voorstel.

Door L. Hoefnagel.

Van drie getallen is de som 10; *de som hunner vierkanten is* 38; *terwijl de som der derdemagten van het eerste en derde* 133 *bedraagt. Welke zijn die getallen?*

Opgelost *door* L. Hoefnagel, W. van Haarst Jr., P. M. Lansberg, A. van Otterloo *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* L. Hoefnagel.

Laten de drie getallen voorgesteld worden door x, y en $10 - x - y$, dan is volgens de opgave

$$x^2 + y^2 + (10 - x - y)^2 = 38$$

en

$$x^3 + (10 - x - y)^3 = 133,$$

of na ontwikkeling en herleiding

$$x^2 + xy + y^2 - 10(x + y) + 31 = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

en $30(x^2+2xy+y^2)-300(x+y)-3xy(x+y)-y^3+867=0$. (2)

De vergelijking (1) met 30 vermenigvuldigende, en van het komende product de vergelijking (2) aftrekkende, vinden wij

$$-30xy + 3xy(x + y) + y^3 + 63 = 0$$

of

$$3xy(10 - x - y) = y^3 + 63; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

maar de vergelijking (1) kan gemakkelijk herleid worden tot

$$x(10 - x - y) = y^2 - 10y + 31, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en zoo wij dan (3) door (4) deelen verdwijnt x, terwijl wij verkrijgen

$$3y = \frac{y^3 + 63}{y^2 - 10y + 31},$$

of na herleiding

$$2y^3 - 30y^2 + 93y - 63 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

uit welke derdemagtsvergelijking als eenige bruikbare wortel gevonden wordt

$$y = 3.$$

Deze waarde van y in de vergelijking (1) substituerende, komt er

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = 2 \quad \text{of} \quad x = 5.$$

Nemen wij $x = 2$ dan is $10 - x - y = 5$; terwijl omgekeerd, zoo wij $x = 5$ nemen, $10 - x - y = 2$ wordt. Dienvolgens zijn dan 2, 3 en 5 de begeerde getallen.

CCXLI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Zoovele geheele getallen te vinden als men verkiest, onder

Digitized by Google

voorwaarde, dat de som hunner tweede magten eene derde magt, en de som hunner derde magten eene tweede magt is.

Opgelost *door* J. Bassan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Laten de begeerde getallen voorgesteld worden door px, qx, rx, sx, enz., dan kan men vooreerst stellen

$$p^2x^2 + q^2x^2 + r^2x^2 + s^2x^2 + enz. = m^2x^2,$$

waaruit men vindt

$$x = \frac{p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.}{m^2};$$

derhalve zijn dan

$$px = \frac{p(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m^2},$$

$$qx = \frac{q(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m^2},$$

$$rx = \frac{r(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m^2},$$

$$sx = \frac{s(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m^2},$$

enz.

getallen wier tweede magten eene derde magt tot som hebben.

De som van de derdemagten dezer getallen is

$$\frac{(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)^3}{m^6},$$

waarvoor men schrijven kan

$$\frac{(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)^2}{m^4} \times \frac{(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m};$$

zal nu deze uitdrukking eene tweedemagt zijn, zoo behoeft men, daar de eerste factor reeds eene tweedemagt is, slechts den laatsten factor tot eene tweedemagt te maken. Hiertoe stelle men slechts

$$\frac{(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)}{m} = n^2,$$

dan wordt

$$\frac{1}{m} = \frac{n^2}{(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)\,(p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + enz.)},$$

en bijgevolg:

Digitized by Google

$$px = \frac{pn^6}{(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^2},$$

$$qx = \frac{qn^6}{(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^2},$$

$$rx = \frac{rn^6}{(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^2},$$

$$sx = \frac{sn^6}{(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^2},$$

enz.

Om een antwoord in geheele getallen te verkrijgen, kunnen wij stellen

$n = (p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})$, dan is:

$px = p\,(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^4$,

$qx = q\,(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^4$,

$rx = r\,(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^4$,

$sx = s\,(p^3+q^3+r^3+s^3+\text{enz.})^3\,(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.})^4$,

enz.

en deze vormen stellen nu, voor alle mogelijke geheele getallenwaarden die men aan p, q, r, s, enz. verkiest te geven, geheele getallen voor, die aan de vraag voldoen.

Begeeren wij b.v. vier getallen, dan vinden wij, door $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$ en $s = 4$ te nemen,
810000000000, 1620000000000, 2430000000000, 3240000000000, van welke vier getallen de som der tweedemagten eene derdemagt, en de som der derdemagten eene tweedemagt is.

CCXLII. Voorstel.

Door J. Bassan.

In een driehoek is uit den top eene loodlijn op de basis nedergelaten. Zoo nu gegeven zijn de drie stukken, waarin deze loodlijn door den ingeschreven cirkel verdeeld wordt, vraagt men den driehoek, zoo door constructie als door berekening te bepalen.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. Bassan, W. van Haarst, Jr. en A. van Otterloo.

Oplossing van W. L. Ivangh.

Ten einde vooreerst den begeerden driehoek te construeren, stelle men, op eene onbepaaldelijk verlengde lijn PQ (Fig. 178), eene loodlijn CF, die gelijk is aan de som der drie gegevene

Digitized by Google

stukken CD $= a$, DE $= b$ en EF $= c$. Vervolgens beschrijve men eenen cirkel, die door de punten D en E gaat, en die tevens de lijn PQ raakt; hiertoe is het volgens eene bekende leerwijze slechts noodig, dat men eene middenevenredige tusschen FE en FD construeert, op PQ van het punt F af deze middenevenredige uitzet, en vervolgens door de punten D en G eenen cirkel brengt, die dan de lijn PQ in G zal raken. Eindelijk trekke men uit C twee raaklijnen aan dien cirkel, die men zoo ver verlengt, dat zij de lijn PQ in A en B ontmoeten, dan zal blijkbaar de driehoek ABC de begeerde zijn.

Uit deze constructie volgt nu gemakkelijk de berekening van de zijden des driehoeks. Volgens de eigenschappen des cirkels heeft men namelijk terstond:

$$CH = CI = \sqrt{CD \times CE} = \sqrt{a(a+b)}$$

en $$FG = \sqrt{FE \times FD} = \sqrt{c(c+b)};$$

stelt men voorts AF $= x$ en BF $= y$, dan is

$$AC^2 = x^2 + (a+b+c)^2$$

en $$BC^2 = y^2 + (a+b+c)^2;$$

maar ook is

$$AC = AH + CH = AG + CH = AF - FG + CH =$$
$$= x - \sqrt{c(c+b)} + \sqrt{a(a+b)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$BC = BI + CI = BG + CI = BF + FG + CI =$$
$$= y + \sqrt{c(c+b)} + \sqrt{a(a+b)}, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zoodat men heeft de vergelijkingen

$$x^2 + (a+b+c)^2 = \left\{x - \sqrt{c(c+b)} + \sqrt{a(a+b)}\right\}^2$$

en $$y^2 + (a+b+c)^2 = \left\{y + \sqrt{c(c+b)} + \sqrt{a(a+b)}\right\}^2,$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \frac{b(a+b+c) + 2ac + 2\sqrt{ac(a+b)(c+b)}}{2\left\{\sqrt{a(a+b)} - \sqrt{c(c+b)}\right\}}$$

en $$y = \frac{b(a+b+c) + 2ac - 2\sqrt{ac(a+b)(c+b)}}{2\left\{\sqrt{a(a+b)} + \sqrt{c(c+b)}\right\}}.$$

Zoo men, ter verdrijving van de wortelteekens uit de noemers dezer breuken, teller en noemer van de eerste met $\sqrt{a(a+b)} + \sqrt{c(c+b)}$, en teller en noemer van de tweede met $\sqrt{a(a+b)} - \sqrt{c(c+b)}$ vermenigvuldigt, zullen de komende tellers en noemers na herleiding door $a+b+c$ deelbaar zijn; hierdoor verkrijgt men de meer eenvoudige uitdrukkingen

Digitized by Google

$$x = \frac{(b + 2c)\sqrt{a}\,(a + b) + (b + 2a)\sqrt{c}\,(c + b)}{2\,(a - c)}$$

en $$y = \frac{(b + 2c)\sqrt{a}\,(a + b) - (b + 2a)\sqrt{c}\,(c + b)}{2\,(a - c)}.$$

Daar nu $AB = x + y$ is, vinden wij door optelling dadelijk

$$AB = \frac{b + 2c}{a - c}\sqrt{a}\,(a + b);$$

en zoo wij de waarden van x en y in de formulen (1) en (2) overbrengen, verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding,

$$AC = \frac{(b + 2a)\sqrt{a}\,(a + b) + (b + 2c)\sqrt{c}\,(c + b)}{2\,(a - c)}$$

en $$BC = \frac{(b + 2a)\sqrt{a}\,(a + b) - (b + 2c)\sqrt{c}\,(c + b)}{2\,(a - c)},$$

zoodat nu de drie zijden des driehoeks in de gegevens uitgedrukt zijn.

CCXLIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

In een driehoek is uit den top naar de basis eene lijn getrokken, die den tophoek middendoordeelt. Zoo nu de drie stukken gegeven zijn, waarin deze lijn door den ingeschreven cirkel verdeeld wordt, vraagt men hetzelfde als in de vorige opgaaf.

Opgelost *door* W. L. Ivangh, J. Bassan, W. van Haarst, Jr. *en* A. van Otterloo.

Oplossing *van* W. L. Ivangh.

Dewijl de lijn, die den tophoek middendoordeelt, door het middelpunt van den ingeschreven cirkel gaat, is het middelste der drie gegevene stukken juist de middellijn van dien cirkel. Worden dus (Fig. 178) de drie gegevene stukken $CL = a$, $LN = b$ en $NO = c$, in hunne behoorlijke volgorde op eene regte lijn CO uitgezet, dan behoeft men slechts op LN als middellijn eenen cirkel te beschrijven, daaraan uit het punt O één, en uit het punt C twee raaklijnen te trekken, om den begeerden driehoek ABC door constructie te verkrijgen.

Ten einde de zijden des driehoeks uit de gegevens te berekenen, laten wij uit het middelpunt M des ingeschreven cirkels, en uit den top C des driehoeks, loodlijnen MG en CF op de zijde AB vallen, waarvan de eerste haar voetpunt in het raakpunt G zal hebben, zoodat $MG = MN = \frac{1}{2}b$ is; voorts laten wij op CF ook nog eene loodlijn MK uit het middelpunt M neder; dan

Digitized by Google

volgt, uit de gelijkvormigheid der driehoeken COF, MOG en CMK,

$$CF : MG = CO : MO \quad \text{en} \quad KM : OG = CM : MO;$$

derhalve is

$$CF = \frac{CO \times MG}{MO} \quad \text{en} \quad KM = \frac{CM \times OG}{MO},$$

of daar $CO = a + b + c$, $MG = \frac{1}{2}b$, $MO = \frac{1}{2}b + c$, $CM = \frac{1}{2}b + a$, $OG = \sqrt{ON \times OL} = \sqrt{c\,(c+b)}$ en $KM = FG$ is,

$$CF = \frac{b\,(a+b+c)}{b+2c} = p \quad \text{en} \quad FG = \frac{b+2a}{b+2c}\sqrt{c\,(c+b)} = q,$$

terwijl verder uit de eigenschap des cirkels volgt

$$CH = CI = \sqrt{CL \times CN} = \sqrt{a\,(a+b)} = s;$$

zijnde hier slechts gemakshalve de drie laatstgevondene waarden door de enkele letters p, q en s voorgesteld.

Stellen wij nu $AF = x$ en $BF = y$, dan hebben wij:

$$AC^2 = x^2 + p^2,$$

$$BC^2 = y^2 + p^2,$$

$$AC = AH + CH = AG + CH = AF - FG + CH =$$
$$= x - q + s = x + (s - q),$$

$$BC = BI + CI = BG + CI = BF + FG + CI =$$
$$= y + q + s = y + (s + q),$$

derhalve is $x^2 + p^2 = \{x + (s - q)\}^2$

en $y^2 + p^2 = \{y + (s + q)\}^2$,

waaruit terstond gevonden wordt:

$$x = \frac{p^2}{2\,(s-q)} - \tfrac{1}{2}\,(s-q) = \frac{p^2\,(s+q)}{2\,(s^2-q^2)} - \tfrac{1}{2}\,(s-q),$$

$$y = \frac{p^2}{2\,(s+q)} - \tfrac{1}{2}\,(s+q) = \frac{p^2\,(s-q)}{2\,(s^2-q^2)} - \tfrac{1}{2}\,(s+q),$$

$$AB = x + y = \frac{p^2\,s}{s^2-q^2} - s = \left\{\frac{p^2}{s^2-q^2} - 1\right\}s,$$

$$AC = x + (s-q) = \frac{p^2\,(s+q)}{2\,(s^2-q^2)} + \tfrac{1}{2}\,(s-q),$$

en $$BC = y + (s+q) = \frac{p^2\,(s-q)}{2\,(s^2-q^2)} + \tfrac{1}{2}\,(s+q).$$

Door voor p, q en s hare waarden te substitueren, zal men vooreerst vinden

$$\frac{p^2}{s^2-q^2} = \frac{b^2\,(a+b+c)^2}{a(a+b)(b+2c)^2 - c(c+b)(b+2a)^2} = \frac{a+b+c}{a-c};$$

en dus verder $$AB = \frac{b+2c}{a-c}\sqrt{a\,(a+b)},$$

Digitized by Google

$$AC = \frac{b + 2a}{2(a-c)}\{\sqrt{a}(a+b) + \sqrt{c}(c+b)\},$$

$$BC = \frac{b + 2a}{2(a-c)}\{\sqrt{a}(a+b) - \sqrt{c}(c+b)\},$$

waardoor wederom de zijden des driehoeks in de gegevens uitgedrukt zijn.

CCXLIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

In een driehoek is uit den top eene lijn naar het midden der basis getrokken. Zoo nu de drie stukken gegeven zijn, waarin de ingeschreven cirkel ook deze lijn verdeelt, vraagt men hetzelfde als in de beide voorgaande opgaven.

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. VAN HAARST, JR., W. L. IVANGH *en* A. VAN OTTERLOO.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (Fig. 179) de bedoelde driehoek, welks zijden door den ingeschreven cirkel in D, E en F geraakt worden; indien dan uit den top B, naar het midden I der bazis, eene lijn BI getrokken is, die den cirkel in G en H snijdt, zijn onze gegevens

$$BG = a, \quad GH = b \quad \text{en} \quad HI = c;$$

stellen wij voorts ter bekorting $a+b+c = l$, $\sqrt{a}(a+b) = m$ en $\sqrt{c}(c+b) = n$, zoo hebben wij dadelijk:

$$BI = a + b + c = l,$$

$$BD = BF = \sqrt{BG \times BH} = \sqrt{a}(a+b) = m,$$

en $$IE = \sqrt{IH \times IG} = \sqrt{c}(c+b) = n.$$

Laat verder gesteld worden

$$AC = x, \quad AB = y \quad \text{en} \quad BC = z,$$

dan hebben wij

$$AE = \tfrac{1}{2}x + n, \quad EC = \tfrac{1}{2}x - n;$$

maar nu is

$$AB + BC = AF + CD + BF + BD = AE + EC + 2BD$$

en

$$AB - BC = AF - CD + BF - BD = AE - EC,$$

of wel $$y + z = x + 2m$$

en $$y - z = 2n,$$

waaruit terstond volgt

$$y = \tfrac{1}{2}x + m + n$$

en $$z = \tfrac{1}{2}x + m - n.$$

Volgens eene bekende eigenschap des driehoeks, is voorts

$$AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + 2AI^2,$$

Digitized by Google

of $$y^2 + z^2 = 2l^2 + \tfrac{1}{2}x^2;$$
hierin de bovenstaande waarden van y en z overbrengende, komt er $(\frac{1}{2}x + m + n)^2 + (\frac{1}{2}x + m - n)^2 = 2l^2 + \frac{1}{2}x^2$, waaruit men dadelijk vindt

$$x = \frac{l^2 - (m^2 + n^2)}{m};$$

en deze waarde van x, in de reeds voor y en z gevondene uitdrukkingen substituerende, komt er, na herleiding,

$$y = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{2m} + n$$

en $$z = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{2m} - n.$$

Hierin kan men nu voor l, m en n hare waarden overbrengen, en vindt dan, na herleiding,

$$x = \frac{ac + (a + b)(c + b)}{\sqrt{a(a + b)}},$$

$$y = \frac{(2a + b)(a + b + c) + 2\sqrt{ac(a + b)(c + b)}}{2\sqrt{a(a + b)}}$$

en $$z = \frac{(2a + b)(a + b + c) - 2\sqrt{ac(a + b)(c + b)}}{2\sqrt{a(a + b)}}$$

Om den begeerden driehoek te construeren, neme men, op eene regte lijn (Fig. 180), drie aan elkander sluitende stukken $BG = a$, $GH = b$ en $HI = c$; daarna beschrijve men op GH als middellijn eenen cirkel en trekke uit B en I raaklijnen BK en IL aan dien cirkel, dan is:

$$BI = a + b + c = l,$$
$$BK = \sqrt{a(a + b)} = m,$$
en $$IL = \sqrt{c(c + b)} = n.$$

Voorts neme men, op BI en haar verlengde, $IM = IN = IL = n$, brenge eenen cirkel door de punten K, M en N, en verlenge BK tot zij den omtrek des laatstbeschreven cirkels andermaal in P ontmoet, dan is

$BM = l - n$, $BN = l + n$ en $BM \times BN = l^2 - n^2$, en volgens eene eigenschap des cirkels $BM \times BN = BK \times BP$ zijnde, is dan

$$BP = \frac{BM \times BN}{BK} = \frac{l^2 - n^2}{m},$$

dus

$$KP = BP - BK = \frac{l^2 - n^2}{m} - m = \frac{l^2 - (m^2 + n^2)}{m} = x.$$

Digitized by Google

Deelt men eindelijk de koorde KP middendoor in Q, en neemt men daarop $QR = QS = IL = n$, dan is $KQ = PQ = \frac{1}{2}x$, dus

$$BR = KQ + BK + QR = \tfrac{1}{2}x + m + n = y,$$

en $$BS = KQ + BK - QS = \tfrac{1}{2}x + m - n = z.$$

Een driehoek, uit KP, BR en BS als zijden zamengesteld, zal dus de begeerde zijn.

CCXLV. Voorstel.

Door W. van Haarst, Jr.

Indien men de lijn CD (Fig. 181), *die den hoek* ACB *eens driehoeks* ABC *middendoordeelt en de zijde* AB *in* D *ontmoet, tot aan den omtrek des omgeschrevenen cirkels in* E *verlengt, en voorts in dien cirkel de middellijn* EF *trekt, hebben de volgende eigenschappen plaats, waarvan men het bewijs verlangt:*

a. *De middelpunten der beide cirkels, die om de driehoeken* ACD *en* BCD *kunnen beschreven worden, liggen op de koorden* AF *en* BF*; en de som hunner stralen is gelijk aan elk dier koorden.*

b. *Zoo men, uit de stralen der genoemde cirkels en den afstand hunner middelpunten, eenen driehoek zamenstelt, zal hij gelijkvormig met den driehoek* ABC *zijn.*

c. *De stralen der drie omgeschrevene cirkels zullen omgekeerd evenredig zijn met de deellijn* CD *en de beide zijden* AC *en* BC *des driehoeks, die om den gedeelden hoek liggen.*

d. *De drie middelpunten dezer cirkels zullen de hoekpunten zijn van een gelijkbeenigen driehoek, welks hoeken aan de basis te zamen genomen gelijk aan den gedeelden hoek des driehoeks* ABC *zijn.*

e. *De middellijn* EF *deelt dien gelijkbeenigen driehoek in twee deelen, welke ieder in het bijzonder gelijkvormig zijn met de deelen, waarin de driehoek* ABC *door de lijn* CD *verdeeld is.*

f. *De drie middelpunten en de punten* C *en* F *liggen op den omtrek eens cirkels.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. van Haarst, Jr., J. Bassan, A. van Otterloo *en* W. L. Ivangh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Uit de middendoordeeling van den hoek ACB door de lijn CE, volgt dadelijk, dat de boog AB in E is middendoorgedeeld, dat

Digitized by Google

dus de middellijn EF loodregt door het midden van AB gaat, zoodat AF = BF en dus AFB een gelijkbeenige driehoek is.

Stellen wij, in graden

$$Boog\ AF = Boog\ BF = 2\alpha,\ Boog\ CF = 2\beta,$$

dus ook $Boog\ AE = Boog\ BE = 180° - 2\alpha,$

dan volgt, uit de bekende meting van hoeken door cirkelbogen, dat, van de volgende in onze figuur voorkomende hoeken, de waarden zijn:

$$BAC = \alpha + \beta,\ ABC = \alpha - \beta,\ ACB = 180° - 2\alpha,$$

$$ACE = BCE = AFE = BFE = 90° - \alpha,$$

$$ADC = 90° - \beta,\ BDC = 90° + \beta,$$

en $$CEF = CAF = CBF = \beta.$$

Trekken wij verder, uit het middelpunt O des omgeschreven cirkels, loodlijnen op de zijden AC en BC, en vereenigen wij het punt C met de punten M en M', waarin de koorden AF en BF door de genoemde loodlijnen gesneden worden, dan is, daar die loodlijnen door het midden van AC en BC gaan, MC = AM en M'C = BM'; alzoo zijn AMC en BM'C gelijkbeenige driehoeken, waarin de hoeken aan de bazes allen gelijk β zijn, waaruit volgt

$$hoek\ AMC = hoek\ BM'C = 180° - 2\beta.$$

Na het opmaken dezer verschillende waarden, is het nu gemakkelijk, de opgegevene stellingen op de volgende manier te bewijzen:

a. Wanneer men uit M, met MA = MC als straal, op AC als koorde een cirkelsegment beschrijft, aan denzelfden kant van AC als waar het punt M ligt, zal dit segment grooter dan een halve cirkel zijn, en, omdat *hoek* AMC = $180° - 2\beta$ is, eenen *hoek* $90° - \beta$ bevatten; maar wij hebben ook *hoek* ADC = $90° - \beta$; bijgevolg ligt het punt D op den omtrek van dat segment, en derhalve is M het middelpunt van den cirkel om ADC beschreven.

Uit M', met M'B = M'C als straal, op BC als koorde een segment beschrijvende, aan den anderen kant van BC als waar het punt M' ligt, zal dat segment kleiner dan een halve cirkel zijn, terwijl het, omdat *hoek* BM'C = $180° - 2\beta$ is, eenen boog van $180° - 2\beta$ zal hebben en dus eenen hoek $90° + \beta$ zal bevatten; maar wij hebben *hoek* BDC = $90° + \beta$; dus ligt weder het punt D op den omtrek van het segment, en alzoo is ook M' het middelpunt van den cirkel om BDC beschreven.

Trekken wij verder MD en M'D, dan zijn AM en MD als stra-

Digitized by Google

len van den cirkel om ADC, BM′ en M′D als stralen van den cirkel om BDC, onderling gelijk; alzoo zijn AMD en BM′D gelijkbeenige driehoeken, die ieder met den gelijkbeenigen driehoek AFB eenen hoek aan de bazis gemeen hebben, en dus zoo met elkander als met AFB gelijkvormig zijn. Dus is MD met FB, en M′D met FA evenwijdig, waaruit volgt dat FMDM′ een parallelogram is, en dit geeft terstond

$$MD + MD' = AM + FM = AF = BF.$$

b. Trekken wij MM′, dan is MDM′ een driehoek, uit de stralen der om ADC en BDC beschrevene cirkels en den afstand hunner middelpunten, zamengesteld. Daar AMC en BM′C gelijkbeenige driehoeken met gelijke tophoeken zijn, zijn zij gelijkvormig; dus is

$$AM : BM' = AC : BC \text{ of } DM : DM' = AC : BC;$$

maar ook is, omdat FMDM′ een parallelogram is,

$$\textit{hoek } MDM' = \textit{hoek } MFM' = \textit{hoek } ACB;$$

de driehoeken MDM′ en ACB hebben dus een gelijken hoek en om dien hoek evenredige zijden, weshalve zij met elkander gelijkvormig zijn.

c. Trekken wij nog de koorden AE en BE, dan zijn ACD en ECB gelijkvormige driehoeken, omdat *hoek* ACD = *hoek* ECB en *hoek* CAD = *hoek* CEB is, wordende deze hoeken door gelijke bogen van den cirkel om ABC gemeten. Van deze driehoeken zijn dus de gelijkstandige zijden evenredig met de stralen hunner omgeschrevene cirkels, en wij hebben

$$MD : OE = CD : BC = \frac{1}{BC} : \frac{1}{CD};$$

evenzeer zijn BCD en ECA gelijkvormige driehoeken, die de evenredigheid

$$M'D : OE = CD : AC = \frac{1}{AC} : \frac{1}{CD}$$

opleveren. Deze evenredigheden verbindende, hebben wij de aaneengeschakelde

$$MD : M'D : OE = \frac{1}{BC} : \frac{1}{AC} : \frac{1}{CD}.$$

d. Omdat CM = DM en CM′ = DM′ is, gaat MM′ regthoekig door het midden van CD, terwijl MO regthoekig door het midden van AC, en M′O regthoekig door het midden van BC gaat. De beenen van den hoek M′MO staan dus loodregt op die van den hoek ACD, en de beenen van den hoek MM′O loodregt op die

Digitized by Google

van den hoek BCD; waaruit volgt

hoek M'MO = *hoek* ACD = ½ *hoek* ACB

en *hoek* MM'O = *hoek* BCD = ½ *hoek* ACB.

De driehoek MOM' is dus gelijkbeenig, en de som zijner hoeken aan de bazis is gelijk aan *hoek* ACB.

e. De lijnen EF en MM', die elkander in N snijden, staan ieder in het bijzonder loodregt op de lijnen AB en CE, die elkander in D snijden; die snijdingen hebben dus onder gelijke hoeken plaats, zoodat men heeft

hoek MNO = *hoek* ADC en *hoek* M'NO = *hoek* BDC;

maar ook is, volgens het sub *d* bewezene,

hoek NMO = *hoek* ACD en *hoek* NM'O = *hoek* BCD;

alzoo zijn de driehoeken NMO en ACD met elkander gelijkvormig, en desgelijks de driehoeken NM'O en BCD, omdat van elk paar driehoeken bewezen is, dat twee hoeken van den eenen ieder in 't bijzonder gelijk zijn aan twee hoeken van den anderen.

f. Omdat CM = DM en CM' = DM' is, is *hoek* MDM' = *hoek* MCM', en daar FMDM' een parallelogram is, is *hoek* MDM' = *hoek* MFM'; hieruit volgt

hoek MCM' = *hoek* MFM',

weshalve een cirkel, om den driehoek MFM' beschreven, ook door het punt C zal gaan. Maar uit hetgeen sub *d* ten aanzien van den gelijkbeenigen driehoek MOM' bewezen is, volgt onmiddellijk

hoek MOM' = 180° — *hoek* ACB = 180° — *hoek* MFM';

in den vierhoek OMFM' zijn dus de overstaande hoeken MOM' en MFM' elkanders supplementen, zoodat een cirkel om den driehoek MFM' beschreven, ook door het punt O gaan zal. Derhalve liggen dan de punten O, M, M', C en F, op den omtrek van een zelfden cirkel.

Aanmerking. Trekt men CO, dan is COE, even als AMC en BM'C, een gelijkbeenige driehoek welks hoeken aan de bazis β zijn. De driehoeken AMC, BM'C en COE zijn dus gelijkvormig, en wij hebben nog de evenredigheid

MD : M'D : OE = AC : BC : CE.

Brengt men deze evenredigheid in verband met de sub *c* bewezene, dan geraakt men tot de vergelijking

AC × BC = CE × CD,

die ook onmiddellijk uit de gelijkvormigheid der driehoeken ACD en ECB, of BCD en ECA kan afgeleid worden.

Digitized by Google

CCXLVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Te integreren

$$\partial y = \frac{\partial x}{x\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz, J. Bassan, W. van Haarst, Jr., W. L. Ivangh *en* W. C. Verseput.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Men stelle

$$x = Cos.\,\phi,$$

dan is

$1-x^2 = Sin.^2\phi$, $\sqrt{(1-x^2)} = Sin.\,\phi$ en $\partial x = -Sin.\,\phi\partial\phi$, zoodat de opgegeven differentiaalvorm overgaat in

$$\partial y = -\frac{\partial\phi}{Sin.^4\,\phi\;Cos.\,\phi},$$

waarvan de integraal voorkomt in de *Diff. en Int.-Rek.* van I. R. Schmidt, 2e druk, bl. 339; wij hebben dienvolgens

$$y = \frac{1}{3\;Sin.^3\,\phi} + \frac{1}{Sin.\,\phi} - Nep.\;Log.\;Tang.\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\phi),$$

of wel

$$y = \frac{1}{3\;Sin.^3\,\phi} + \frac{1}{Sin.\,\phi} - Nep.\;Log.\,\sqrt{\frac{1+Sin.\,\phi}{1-Sin.\,\phi}}.$$

Hierin weder $Sin.\,\phi = \sqrt{(1-x^2)}$ substituerende, komt er

$$y = \frac{1}{3(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} - Nep.Log.\sqrt{\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{1-\sqrt{(1-x^2)}}},$$

of na behoorlijke herleiding

$$y = \frac{4-3x^2}{3(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} - Nep.\;Log.\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}.$$

CCXLVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Het moment van traagheid te vinden, van eene gelijkslachtige omwentelingsparaboloïde, die om hare as wentelt.

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz, W. L. Ivangh *en* W. C. Verseput.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Laat AOB (Fig. 182) de omwentelingsparaboloïde voorstellen, bepaald door hare hoogte OC $= h$, en door de vergelijking $y^2 = px$ der parabool OA, wier wenteling om de as der x, het genoemde ligchaam heeft voortgebragt, dan kan het begeerde moment van traagheid, omdat de paraboloïde gelijkslachtig is, gevonden worden door toepassing der algemeene formule (zie

Digitized by Google

I. R. Schmidt, *Dynamica*, bl. 310, § 368)

$$\Sigma(m^2M) = \tfrac{1}{2}P \times \frac{\int y^4 \partial x}{\int y^2 \partial x},$$

waarin P de massa van het ligchaam voorstelt.

Hier hebben wij dan, omdat $y^2 \doteq px$ is en de integralen van $x = 0$ tot $x = h$ moeten worden genomen,

$$\Sigma(m^2M) = \tfrac{1}{2}P \times \frac{\int_0^h p^2x^2\partial x}{\int_0^h px\partial x} = \tfrac{1}{2}P \times \frac{\frac{1}{3}p^2h^3}{\frac{1}{2}ph^2} = \tfrac{1}{3}ph \times P;$$

is nu ook nog de straal $AC = r$ des grondvlaks gegeven, dan is $r^2 = ph$, en wij hebben

$$\Sigma(m^2M) = \tfrac{1}{3}r^2 \times P,$$

voor het gevraagde moment van traagheid.

CCXLVIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer men een getal A *door een kleiner getal* B *deelt, verkrijgt men tot quotiënt een geheel getal* Q, *met nog een gebroken* $\frac{R}{B}$, *waarin* $R < B$ *is. Laat men van de getallen* A *en* B *evenveel achterste cijfers weg, en gaan zij hierdoor over in* a *en* b, *dan zal de deeling van* a *door* b *almede tot quotiënt geven een geheel getal* q, *met nog een gebroken* $\frac{r}{b}$, *waarin* $r < b$ *is. Men begeert nu:* 1°. *te bewijzen, dat* q *niet kleiner dan* Q *kan wezen; en* 2°. *te onderzoeken, hoeveel eenheden* q, *ten hoogste,* Q *zal kunnen overtreffen.*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* W. van Haarst, Jr.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Indien A en B, door weglating van de n achterste cijfers, in a en b overgaan, en men dan de waarden der weggelatene vakken, als getallen op zich zelven beschouwd, door c en d voorstelt, is

$$A = 10^n a + c \quad \text{en} \quad B = 10^n b + d,$$

en daarin is zeker

$$c < 10^n \quad \text{en} \quad d < 10^n.$$

Voorts is, volgens de opgaaf,

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

Digitized by Google

waarin $R < B$; $r < b$ is; kunnende R en r ook beide of een van beide nul zijn, hetgeen zal plaats hebben indien de deelingen van A door B, en van a door b, beide of een van beide opgaan.

Uit de bovenstaande vergelijkingen, kan men dadelijk afleiden

$$a = bq + r,$$

$$Q + \frac{R}{B} = \frac{A}{B} = \frac{10^n a + c}{10^n b + d} = \frac{10^n (bq + r) + c}{10^n b + d},$$

of, den laatsten term tot een gemengden vorm herleidende,

$$Q + \frac{R}{B} = q + \frac{10^n r + c - qd}{10^n b + d}; \ldots . \quad (\alpha)$$

kunnende de teller $10^n r + c - qd$, naargelang van de waarden der daarin voorkomende grootheden, positief, negatief, of ook nul zijn; dat is men kan hebben $qd < 10^n r + c$, $qd = 10^n r + c$ of $qd > 10^n r + c$.

Daar b ten minste één eenheid grooter dan r moet wezen, heeft men

$$b - r = \text{of} > 1;$$

maar ook is

$$10^n > c,$$

en door vermenigvuldiging blijkt dus, dat men ook heeft

$$10^n (b - r) > c;$$

zooveel te meer is dan

$$10^n (b - r) + d(q + 1) > c,$$

of

$$10^n b + d > 10^n r + c - qd;$$

onderstellen wij dus, dat $qd < 10^n r + c$ is, dan is in (α) niet alleen $\frac{R}{B}$, maar ook $\frac{10^n r + c - qd}{10^n b + d}$ een positief gebroken kleiner dan de eenheid; daar Q en q geheele getallen verbeelden, moeten derhalve in (α) de beide breuken aan elkander gelijk, en dus ook $q = Q$ zijn.

Onderstellen wij, dat $qd = 10^n r + c$ en dus $10^n r + c - qd = 0$ is, dan moet volgens (α) noodzakelijk ook $R = 0$ zijn, en wij hebben wederom $q = Q$.

Onderstellen wij echter, dat $qd > 10^n r + c$ is, en schrijven wij de vergelijking (α) in de gedaante

$$q - Q = \frac{R}{B} + \frac{qd - (10^n r + c)}{10^n b + d}, \ldots . \quad (\beta)$$

dan zien wij dadelijk, dat, in deze onderstelling, $q - Q$ noch negatief, noch nul kan wezen, en dat dus noodzakelijk $q > Q$ moet zijn.

De eenige mogelijke gevallen zijn derhalve $q = Q$ en $q > Q$,

Digitized by Google

weshalve nimmer $q < Q$ kan wezen, zoodat nu aan het eerste gedeelte der vraag voldaan is.

Geeft men aan de zes grootheden b, c, d, n, q en r willekeurige waarden, mits binnen zoodanige grenzen als met den aard der zaak overeenkomen, dan zal men eerst de overeenkomstige waarden van $a = bq + r$, $A = 10^n a + c$ en $B = 10^n b + d$, en daarna ook die van Q en R kunnen berekenen. Om dus te onderzoeken, wat de grootste overmaat van q boven Q is, zal men blijkens (β), daar $\frac{R}{B} < 1$ is, slechts hebben na te gaan, welke waarden men aan b, c, d, n, q en r geven moet, opdat het positieve gebroken

$$G = \frac{qd - (10^n r + c)}{10^n b + d}$$

zoo groot mogelijk worde; maar door q groot genoeg te nemen, kan men het gebroken G en dus ook $q - Q$ zoo groot laten worden als men goedvindt, en er bestaat dus geene limiet voor de overmaat die q boven Q hebben kan.

Wil men b.v. dat $q - Q = 1000$ zij, dan zal volgens (β)

$$1000 = \frac{R}{B} + \frac{qd - (10^n r + c)}{10^n b + d}$$

moeten wezen; neemt men nu naar welgevallen $n = 3$, $b = 2$, $c = 112$, $d = 127$ en $r = 1$, waardoor de voorwaarden $c < 10^n$, $d < 10^n$ en $r < b$ vervuld zijn, dan heeft men dadelijk $B = 2127$, en

$$1000 = \frac{R}{2127} + \frac{127q - 1112}{2127};$$

hieruit volgt, omdat $\frac{R}{2127}$ positief en kleiner dan 1 is,

$$1000 > \frac{127q - 1112}{2127} \text{ en } 1000 < 1 + \frac{127q - 1112}{2127},$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$q < 16756\frac{100}{127} \text{ en } q > 16740\frac{5}{127},$$

neemt men nu nog voor q een geheel getal binnen deze grenzen, dan zal $q - Q = 1000$ zijn.

Zoo heeft men: voor $q = 16756$, $a = bq + r = 33513$ en $A = 10^n a + c = 33513112$, waardoor men voor de twee quotiënten heeft

Digitized by Google

$\frac{A = 33513112}{B = 2127} = 15756\frac{100}{2127}$, $\frac{a = 33513}{b = 2} = 16756\frac{1}{2}$;

voor $q = 16741$ heeft men desgelijks, $a = 33483$, $A = 33483112$,

$\frac{A = 33483112}{B = 2127} = 15741\frac{2005}{2127}$, $\frac{a = 33483}{b = 2} = 16741\frac{1}{2}$;

zoodat in beide gevallen de geheelen van het laatste quotiënt die van het eerste met 1000 eenheden overtreffen.

Begeert men echter de grootste overmaat van q boven Q te vinden, wanneer er slechts getallen A en B beschouwd worden wier quotiënt kleiner dan 10 is, hetgeen zijne toepassing bij de gewone bewerking der deeling vindt, dan heeft men nog

$$Q + \frac{R}{B} < 10,$$

en dus volgens (β) ook

$$q - \frac{qd - (10^n r + c)}{10^n b + d} < 10 \text{ of } q - G < 10, \quad . \quad (\gamma)$$

zoodat men nu aan b, c, d, n, q en r waarden zal moeten geven, die het gebroken G zoo groot mogelijk maken, en tevens aan de voorwaarde (γ) voldoen.

Om de breuk G zoo groot mogelijk te maken, zal men q zoo groot mogelijk, doch r en c zoo klein mogelijk moeten nemen; en schrijft men de voorwaarde (γ) in den vorm

$$\frac{10^n bq}{10^n b + d} < 10 - \frac{10^n r + c}{10^n b + d},$$

dan ziet men duidelijk dat zij voor de kleinstmogelijke waarden van r en c de grootstmogelijke waarde van q toelaat. Derhalve nemen wij voor r en c de kleinstmogelijke waarden, namelijk $r = 0$ en $c = 0$; hierdoor wordt dan

$$G = \frac{qd}{10^n b + d},$$

terwijl de voorwaarde (γ) na herleiding overgaat in

$$q < 10 + \frac{d}{10^n} \times \frac{10}{b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma')$$

Alsnu ziet men weder dadelijk, dat men voor b de kleinstmogelijke waarde $b = 1$ moet nemen, opdat gelijktijdig de voorwaarde (γ') eene grootere waarde voor q toelaten moge en de breuk G zoo groot mogelijk worde; wij nemen dus $b = 1$, en hebben dan

$$G = \frac{qd}{10^n + d} = \frac{q}{\frac{10^n}{d} + 1},$$

Digitized by Google

en $$q < 10\left\{1 + \frac{d}{10^n}\right\} \ldots\ldots\ldots (\gamma'')$$

Daar $d < 10^n$ is, zal $\frac{d}{10^n}$ de grootstmogelijke waarde verkrijgen, indien men $d = 10^n - 1$ neemt; maar opdat gelijktijdig weder de voorwaarde (γ'') de grootstmogelijke waarde voor q moge toelaten en G zoo groot mogelijk worde, zal men blijkbaar aan $\frac{d}{10^n}$ de grootstmogelijke waarde moeten geven; wij nemen dus $d = 10^n - 1$, en hebben dan

$$G = \frac{q\,(10^n - 1)}{2.10^n - 1},$$

en $$q < 20 - \frac{1}{10^n - 1}; \ldots\ldots\ldots (\gamma''')$$

alsmede $$B = 10^n b + d = 2.10^n - 1.$$

Opdat eindelijk de voorwaarde (γ''') de grootstmogelijke waarde van q moge toelaten, zal men daar q een geheel getal voorstelt, slechts $n > 1$ behoeven te nemen; die grootstmogelijke waarde van q is dan $q = 19$, en wij hebben

$$G = \frac{19\,(10^n - 1)}{2.10^n - 1},$$

terwijl volgens (β)

$$q - Q = \frac{R}{2.10^n - 1} + G$$

is, waarin R blijkbaar van n afhangt.

Naargelang men n grooter neemt, zal ook $G = \frac{19(10^n - 1)}{2.10^n - 1}$ grooter worden; maar voor $n = 2$ is $G = 9\frac{90}{199}$, en voor $n = \infty$ is $G = 9\frac{1}{2}$, zoodat welke waarde men ook voor n neemt, mits slechts $n > 1$, altijd de waarde van G tusschen 9 en 10 zal vallen en dus $q - Q = 10$ zal wezen, omdat $q - Q$ een geheel getal is.

Uit dit alles volgt dan, dat zoo $\frac{A}{B} < 10$ is, q ten hoogste Q met 10 eenheden kan overtreffen; en dat de getallen A en B, waarbij dit plaats heeft, verkregen worden, door in de gestelde vormen $r = 0$, $c = 0$, $b = 1$, $q = 19$, $d = 10^n - 1$ en $n > 1$ te nemen. Zoo hebben wij: voor $n = 2$ en dus $d = 99$,

Digitized by Google

$a = bq + r = 19$, $A = 10^n a + c = 1900$, $B = 10^n b + d = 199$, en dan is

$$\frac{A = 1900}{B = 199} = 9\,\frac{109}{199},\ \frac{a = 19}{b = 1} = 19;$$

voor $n = 3$ en dus $d = 999$, $a = 19$, $A = 10^n a + c = 19000$, $B = 10^n b + d = 1999$ en dan is

$$\frac{A = 19000}{B = 1999} = 9\,\frac{1009}{1999},\ \frac{a = 19}{b = 1} = 19;$$

voor $n = 4$ en dus $d = 9999$

$$\frac{A = 190000}{B = 19999} = 9\,\frac{10009}{19999},\ \frac{a = 19}{b = 1} = 19,$$

en zoo vervolgens; zijnde altijd de geheelen van het tweede quotiënt, 10 eenheden grooter dan die van het eerste.

Indien men begeerde dat r niet gelijk nul ware, zou men, even als boven redenerende, vinden, dat men om $q - Q$ zoo groot mogelijk te maken, moet nemen $r = 1$, $c = 0$, $b = 2$, $q = 14$, $d = 10^n - 1$ en $n > 1$, waarmede $q - Q = 5$ zal overeenstemmen; voor $n = 2$ en dus $d = 99$, heeft men dan $a = bq + r = 29$, $A = 10^n a + c = 2900$, $B = 10^n b + d = 299$, en dan is

$$\frac{A = 2900}{B = 299} = 9\,\frac{209}{299}\ \text{en}\ \frac{a = 29}{b = 2} = 14\tfrac{1}{2},$$

waarvan nu het laatste quotiënt 5 eenheden meer bevat dan het eerste.

CCXLIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Twee regthoeken, wier zijden gegeven zijn, zijn in evenwijdige vlakken op eene gegevene hoogte boven elkander geplaatst, zoodanig dat ook de zijden van den eenen regthoek evenwijdig loopen met die van den anderen. Brengt men nu vlakken: 1°. *door de voorzijde van den ondersten en de achterzijde van den bovensten regthoek;* 2°. *door de achterzijde van den ondersten en de voorzijde van den bovensten;* 3°. *door de linkerzijde van den ondersten en de regterzijde van den bovensten; en* 4°. *door de regterzijde van den ondersten en de linkerzijde van den bovensten regthoek; dan zal tusschen deze vier vlakken eene ligchamelijke ruimte begrepen zijn, die van onder en van boven door de genoemde regthoeken begrensd wordt. Men begeert den inhoud dier ligchamelijke ruimte, uit de gegevens te berekenen.*

Oplost *door* J. Badon Ghijben *en* W. van Haarst, Jr.

Digitized by Google

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten ABCD en A′B′C′D′ (Fig. 183) de genoemde regthoeken zijn, dan zullen de vier vlakken, die men op de aangewezene wijze door hunne zijden brengt, elkander twee aan twee snijden. De doorsneden der vlakken, die door twee aan elkander sluitende zijden der regthoeken gaan, zijn de lijnen AA′, BB′, CC′ en DD′, die uit de hoekpunten van den ondersten regthoek naar de tegengestelde hoekpunten van den bovensten loopen; de doorsneden echter der vlakken, die door twee overstaande zijden der regthoeken gaan, zijn lijnen EF en GH evenwijdig met die zijden. Hieruit ziet men, dat de ligchamelijke ruimte, door de genoemde vier vlakken en de beide regthoeken ingesloten, uit drie onderscheidene ligchamen is zamengesteld; namelijk: een afgeknot driehoekig prisma, waarvan AB, CD en EF de evenwijdige ribben zijn; een dergelijk prisma, dat A′D′, B′C′ en GH tot evenwijdige ribben heeft; benevens eene driehoekige piramide EFGH, waarvan de ribben EF en GH elkander regthoekig kruisen. Het komt er dus op aan, den inhoud van elk dezer drie ligchamen te berekenen, als wanneer hunne som den gevraagden inhoud zal opleveren. Hiertoe zullen wij vooreerst de ribbe EF en hare hoogte boven het grondvlak, gelijk mede de ribbe GH en hare diepte beneden het bovenvlak berekenen indien $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $A'B' = C'D' = a'$, $B'C' = A'D' = b'$, benevens de hoogte h, van het bovenvlak boven het grondvlak, gegeven zijn.

Stellen wij dat EF op den afstand x van het grondvlak, GH op den afstand y van het bovenvlak ligt, dan ligt EF op den afstand $h - x$ van het bovenvlak, en GH op den afstand $h - y$ van het grondvlak; wij hebben derhalve blijkbaar de evenredigheden

$AE : A'E = x : h - x$ en $AG : A'G = h - y : y$;

maar uit de gelijkvormige driehoeken der figuur volgt ook

$AE : A'E = b : b'$ en $AG : A'G = a : a'$;

derhalve is dan

$$x : h - x = b : b', \quad h - y : y = a : a',$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \frac{bh}{b + b'}, y = \frac{a'h}{a + a'} \text{ en } h - x - y = \frac{(ab' - a'b)h}{(a + a')(b + b')};$$

zijnde $h - x - y$ klaarblijkelijk de kortste afstand der elkander regthoekig kruisende lijnen EF en GH.

Voorts is almede blijkbaar

$$AG : EG = h - y : h - x - y, \quad A'E : EG = h - x : h - x - y,$$

Digitized by Google

terwijl uit de gelijkvormige driehoeken der figuur volgt

$$AG : EG = a : EF, \quad A'E : EG = b' : GH;$$

derhalve is

$$h - y : h - x - y = a : EF, \quad h - x : h - x - y = b' : GH,$$

waaruit gevonden wordt

$$EF = \frac{a\,(h - x - y)}{h - y}, \quad GH = \frac{b'\,(h - x - y)}{h - x},$$

of, na voor x en y de reeds gevondene waarden gesubstituëerd te hebben, $EF = \frac{ab' - a'b}{b + b'}$ en $GH = \frac{ab' - a'b}{a + a'}$.

De doorsnede van het prisma AF, loodregt op drie evenwijdige ribben genomen, is een driehoek, waarvan de hoogte gelijk aan den afstand x en de bazis gelijk aan de zijde BC of AD des regthoeks ABCD is, en die driehoek heeft dus tot inhoud

$$\tfrac{1}{2}\,bx = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b^2 h}{b + b'};$$

de som der drie evenwijdige ribben van hetzelfde prisma, is

$$2a + EF = 2a + \frac{ab' - a'b}{b + b'} = \frac{2ab + 3ab' - a'b}{b + b'};$$

en volgens eene bekende stelling is dus

$$\textit{Prism.}\ AF = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{b^2 h\,(2ab + 3ab' - a'b)}{(b + b')^2}.$$

Het prisma A'H door een vlak loodregt op de drie evenwijdige ribben snijdende, is de doorsnede een driehoek, waarvan de hoogte gelijk aan den afstand y, en de bazis gelijk aan de zijde A'B' of C'D' des regthoeks A'B'C'D' is; de inhoud dier doorsnede is dus

$$\tfrac{1}{2}\,a'y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a'^2 h}{a + a'},$$

terwijl de som der drie evenwijdige ribben is

$$2b' + GH = 2b' + \frac{ab' - a'b}{a + a'} = \frac{2a'b' + 3ab' - a'b}{a + a'},$$

zoodat wij hebben

$$\textit{Prism.}\ A'H = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'^2 h\,(2a'b' + 3ab' - a'b)}{(a + a')^2}.$$

De inhoud der piramide EFGH, wier ribben EF en GH elkander regthoekig kruisen, kan onmiddellijk gevonden worden uit de bekende stelling, dat zoodanige inhoud het $\frac{1}{3}$ gedeelte is van het product der elkander regthoekig kruisende ribben en haren kortsten afstand. Alzoo is

$$\textit{Pir.}\ EFGH = \tfrac{1}{3}\,EF \times GH \times (h - x - y),$$

Digitized by Google

of, voor EF, GH en $h - x - y$ de berekende waarden inbrengende,

$$Pir.\ EFGH = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{h\,(ab' - a'b)^3}{(a + a')^2\,(b + b')^2}.$$

Door nu de som dezer drie inhouden te nemen, verkrijgen wij voor den gevraagden inhoud

$$I = \tfrac{1}{6}h\left\{\frac{b^2\,(2ab + 3ab' - a'b)}{(b + b')^2} + \frac{a'^2\,(2a'b' + 3ab' - a'b)}{(a + a')^2} + \frac{(ab' - a'b)^3}{(a + a')^2\,(b + b')^2}\right\}.$$

Deze uitdrukking kan eene opmerkelijke herleiding ondergaan. Men heeft namelijk

$$ab' - a'b = a(b + b') - b(a + a');$$

ontwikkelt men nu de derde magt van het tweede lid, dan verkrijgt men

$$a^3(b + b')^3 - 3a^2b(b + b')^2\,(a + a') + 3ab^2(b + b')\,(a + a')^2 - b^3(a + a')^3$$

of, de twee eerste en de twee laatste termen vereenigende,

$$a^2(b + b')^2\,\{a(b + b') - 3b(a + a')\} + b^2(a + a')^2\,\{3a(b + b') - b(a + a')\},$$

dat is $$-a^2(b + b')^2\,\{2ab + 3a'b - ab'\} + b^2(a + a')^2\,\{2ab + 3ab' - a'b\};$$

deelt men dan verder deze waarde van $(ab' - a'b)^3$, door het product $(a + a')^2\,(b + b')^2$, zoo vindt men

$$\frac{(ab' - a'b)^3}{(a + a')^2\,(b + b')^2} = -\frac{a^2\,(2ab + 3a'b - ab')}{(a + a')^2} + \frac{b^2\,(2ab + 3ab' - a'b)}{(b + b')^2},$$

waaruit volgt $$\frac{b^2\,(2ab + 3ab' - a'b)}{(b + b')^2} = \frac{a^2\,(2ab + 3a'b - ab')}{(a + a')^2} + \frac{(ab' - a'b)^3}{(a + a')^2\,(b + b')^2}.$$

Brengt men vervolgens, in de voor I gevondene formule, deze waarde voor den eersten term over, zoo komt er

$$I = \tfrac{1}{6}h\left\{\frac{a^2\,(2ab + 3a'b - ab') + a'^2\,(2a'b' + 3ab' - a'b)}{(a + a')^2} + \frac{2\,(ab' - a'b)^3}{(a + a')^2\,(b + b')^2}\right\},$$

Digitized by Google

en dan zal men bevinden, dat de teller van het eerste gebroken door $(a + a')^2$ deelbaar is; deze deeling geeft tot quotiënt

$$2ab + 2a'b' - ab' - a'b,$$

en dus is dan

$$I = \tfrac{1}{6}h\left\{2ab + 2a'b' - ab' - a'b + \frac{2(ab' - a'b)^2}{(a + a')^2(b + b')^2}\right\},$$

waarvoor men ook nog kan schrijven

$$I = \tfrac{1}{6}h\left\{ab + a'b' + (a - a')(b - b') + \frac{2(ab' - a'b)^2}{(a + a')^2(b + b')^2}\right\},$$

Aanmerkingen. 1°. Indien grond- en bovenvlak gelijkvormige regthoeken zijn, verandert ons ligchaam in een zamenstel van twee vierhoekige piramiden, die met de toppen tegen elkander staan; vallende dan de punten E, F, G en H in den gemeenen top te zamen, zoodat de piramide EFGH verdwijnt. In dit geval is dan ook

$a : b = a' : b'$, dus $ab' = a'b$ of $ab' - a'b = 0$,

waardoor de gevonden inhoud overgaat in

$$I' = \tfrac{1}{6}h(2ab + 2a'b' - ab' - a'b);$$

stellen wij nu $ab = G$, $a'b' = B$, dan is niet alleen $aa'bb' = GB$, maar wegens $ab' = a'b$ ook $(ab')^2 = (a'b)^2 = GB$ of $ab' = a'b = \sqrt{GB}$, zoodat wij verkrijgen

$$I' = \tfrac{1}{3}h\left\{G + B - \sqrt{GB}\right\},$$

welke formule, op het teeken van de wortelgrootheid na, dezelfde is als die, waardoor de inhoud eener afgeknotte piramide gevonden wordt.

2°. Zoo wij den inhoud der piramide EFGH door P voorstellen, is zoo als wij vonden

$$P = \tfrac{1}{6}h\,\frac{(ab' - a'b)^2}{(a + a')^2(b + b')^2};$$

trekken wij het dubbel van dezen inhoud, af van den gevonden inhoud I, dan komt er onmiddellijk

$$I - 2P = \tfrac{1}{6}h(2ab + 2a'b' - ab' - a'b).$$

Daar $I - P$ de som der twee afgeknotte prisma's AF en A'H voorstelt, is $I - 2P$ blijkbaar hetgeen er overblijft, wanneer van de som der prisma's AF en A'H, de piramide EFGH wordt afgetrokken; de uitdrukking

$$U = \tfrac{1}{6}h(2ab + 2a'b' - ab' - a'b)$$

stelt dus analytisch de som der drie genoemde ligchamen, of den begeerden inhoud voor, mits men het gedeelte van dien inhoud,

Digitized by Google

hetwelk zich tusschen de lijnen EF en GH bevindt, als negatief beschouwt.

3°. Snijdt men het ligchaam door een vlak evenwijdig aan het grondvlak, en daarvan op eenigen afstand u verwijderd, zoo zal men bevinden, dat de inhoud dier doorsnede eene functie van u is, die den vorm $F(u) = \alpha + \beta u + \gamma u^2$ heeft. Voor $u < x$ valt die doorsnede in het prisma AF, voor $u > h - y$ valt zij in het prisma A'H, terwijl zij, voor eene waarde van u, tusschen $u = x$ en $u = h - y$, binnen de piramide EFGH valt.

Omdat deze functie den genoemden vorm heeft, zou het schijnen, dat de gevraagde ligchamelijke inhoud in eens gevonden kon worden, door de merkwaardige leerwijze, welke door den Heer Lobatto is verklaard en bewezen in eene *Bijdrage tot de Stereometrie*, te vinden in de *Nieuwe Wis- en Natuurkundige Verhandelingen* des Genootschaps, 2de Deel, 1ste Stuk, bladz. 123. Dit is echter het geval niet. Neemt men namelijk in de formule

$$V = \tfrac{1}{6} h (G + 4M + B),$$

voor G den inhoud des regthoeks ABCD, voor B den inhoud des regthoeks A'B'C'D', en voor M den inhoud des regthoeks, die de doorsnede is van ons ligchaam met een vlak midden tusschen grond- en bovenvlak genomen, dan heeft men vooreerst $G = ab$ en $B = a'b'$. Het genoemde middenvlak snijdt blijkbaar, naargelang $a >$ of $< a'$ is, óf den driehoek ABG volgens eene lijn wier lengte is $\frac{1}{2}(a - a')$, óf den driehoek A'B'G volgens eene lijn die $\frac{1}{2}(a' - a)$ tot lengte heeft; datzelfde middenvlak snijdt even zoo, naargelang $b >$ of $< b'$ is, óf den driehoek BCF volgens eene lijn $\frac{1}{2}(b - b')$, óf den driehoek B'C'F volgens eene lijn $\frac{1}{2}(b' - b)$; de lengte en breedte der middendoorsnede zijn dus $\pm \frac{1}{2}(a - a')$ en $\pm \frac{1}{2}(b - b')$, waaruit voor den inhoud altijd volgt $M = \frac{1}{4}(a - a')(b - b')$. Deze waarden van G, B en M geven dan,

$$V = \tfrac{1}{3} h \left\{ ab + a'b + (a - a')(b - b') \right\}$$

of $$V = \tfrac{1}{3} h \left\{ 2ab + 2a'b' - ab' - a'b \right\};$$

hetgeen naar behooren strookt met de uitkomst, door den Heer Lobatto in § 18 der aangehaalde *Bijdrage* gevonden, want aldaar heeft men

$$V = \tfrac{1}{3} h \left\{ 2ab + 2a'b' + (ab' + a'b) \cos. \phi \right\},$$

en door $\phi = 180°$ te nemen, komt men op de hovenstaande waarde van V terug. Die waarde van V is dan, blijkens het

Digitized by Google

voorgaande, niet de begeerde inhoud, maar de overmaat der prisma's AF en A'H boven de piramide EFGH.

4°. De reden, waarom de formule $V = \frac{1}{6} h (G + 4M + B)$ niet de *som* der drie gedeeltelijke ligchamen, maar het *verschil* van de som der prisma's, en de tusschen liggende piramide geeft, ligt voor de hand. Immers voor de bedoelde functie van u, zal men gemakkelijk vinden

$$F(u) = (a - \frac{a + a'}{h} u)(b - \frac{b + b'}{h} u);$$

zijnde hierbij ondersteld, dat de doorsnede beneden EF viel. Stelt men hierin $u = 0$, $u = \frac{1}{2} h$, $u = h$, $u = x = \frac{bh}{b + b'}$, $u = h - y = h - \frac{a'h}{a + a'} = \frac{ah}{a + a'}$, dan komt er naar behooren

$$F(0) = ab,\ F(\tfrac{1}{2} h) = \tfrac{1}{4}(a - a')(b - b'),\ F(h) = a'b'$$
$$F(x) = 0 \text{ en } F(h - y) = 0.$$

De beide factoren van $F(u)$ kunnen niet gelijktijdig nul worden, tenzij gelijktijdig

$$u = \frac{ah}{a + a'} \text{ en } u = \frac{bh}{b + b'}$$

kan wezen; hieruit zou dan volgen

$$\frac{a}{a + a'} = \frac{b}{b + b'}$$

of
$$ab' = a'b;$$

dat is, de grond- en bovenvlakken zouden gelijkvormig zijn, en wij zouden in het bijzondere geval verkeeren, dat sub 1°. beschouwd is. In dit bijzondere geval verdwijnt de piramide EFGH, en dus zal dan de formule $V = \frac{1}{6} h (G + 4M + B)$ de begeerde uitkomst geven; maar daar de factoren van u dan gelijktijdig nul worden, zullen zij ook gelijktijdig van den positieven tot den negatieven toestand overgaan, en dus zal $F(u)$ voortdurend positief blijven.

Verkeeren wij echter niet in dit bijzondere geval, dan zullen de factoren van $F(u)$ niet gelijktijdig, maar voor verschillende waarden van u, van den positieven tot den negatieven toestand overgaan; bij den eenen factor zal dit plaats hebben indien $u = \frac{bh}{b + b'}$ is, en dus de doorsnede, wier inhoud door $F(u)$

Digitized by Google

is voorgesteld, in de enkele lijn EF overgaat; bij den anderen factor zal dit gebeuren indien $u = h - y = \frac{ah}{a + a'}$, is, en dus de doorsnede in de enkele lijn GH overgaat. Derhalve zal, wanneer de doorsnede tusschen de lijnen EF en GH valt, $F(u)$ negatief zijn, en hieruit volgt onmiddellijk, dat de formule $V = \frac{1}{6} h (G + 4M + B)$ ook het gedeelte van den inhoud, dat tusschen de lijnen EF en GH valt, als eenen negatieven inhoud in rekening brengt.

Wil men dus bij de berekening van eenen inhoud, werkelijk de *som* der deelen vinden, zonder dat daarbij deelen in aanmerking mogen komen, die negatieve of af te trekkene inhouden zouden hebben, dan wordt tot de toepasselijkheid der formule $V = \frac{1}{6} h (G + 4M + B)$, behalve het kenmerk in § 3 der aangehaalde *Bijdrage* opgegeven, ook nog gevorderd, dat de inhoud Y eener willekeurige doorsnede, evenwijdig met grond- en bovenvlak genomen, niet van den positieven tot den negatieven toestand mag overgaan, gedurende dat Y van G tot B verandert.

CCL. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men vraagt de vergelijking van de ontwondene der gewone epicycloïde te vinden, door toepassing der algemeene formules, voorkomende in de Diff. en Int.-Rek. ***van*** I. R. SCHMIDT, **§ 161.**

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, W. VAN HAARST, JR. *en* W. L. IVANGH.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De genoemde algemeene formules zijn:

$$Tang.(\mu - \phi) = \frac{\gamma\ Cos.\ \psi}{s - \gamma\ Sin.\ \psi} \quad \ldots \quad (1)$$

en $$u = \sqrt{(s^2 + \gamma^2 - 2s\gamma\ Sin.\ \psi)}; \quad \ldots \quad (2)$$

hierin beteekenen ϕ en s de pool-coördinaten van een onbepaald punt eener kromme lijn, μ en u de pool-coördinaten van een overeenkomstig punt der ontwondene kromme, terwijl ψ de hoek is, in het onbepaalde punt der eerste kromme door raaklijn en voerstraal gevormd, en γ de kromtestraal dier kromme in dat punt; worden de ψ en γ bepaald door de differentiaal-vergelijkingen

$$Tang.\ \psi = \frac{s\partial\phi}{\partial s},\ t = \frac{s^2\partial\phi}{\sqrt{(\partial s^2 + s^2\partial\phi^2)}} \text{ en } \gamma = \frac{s\partial s}{\partial t}.$$

Voor een willekeurig punt P de gewone epicycloïde, in Fig. 184

Digitized by Google

voorgesteld, waarbij *hoek* XOP $= \phi$ en OP $= s$ is, hebben wij (zie bij I. R. Schmidt, § 162)

$s = 4a\ Sin.^2\ \frac{1}{2}\phi$, $\psi = \frac{1}{2}\phi$ en $\gamma = \frac{3}{2}a\ Sin.\ \frac{1}{2}\phi$;

deze waarden in (1) en (2) overbrengende, hebben wij dan na herleiding

$$Tang.\ (\mu - \phi) = 2\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\phi \quad \ldots\ldots\ (3)$$

en $$u = \tfrac{1}{2}a\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\phi\ \sqrt{(4 - 3\ Sin.^2\ \tfrac{1}{2}\phi)} \quad \ldots\ (4)$$

waarin *hoek* XOP′ $= \mu$ en OP′ $= u$ de coördinaten van het punt P′ der ontwondene zijn, dat tot het punt P der epicycloïde behoort. De vergelijking der ontwondene zal dus gevonden worden, door ϕ tusschen de vergelijkingen (3) en (4) te elimineren.

Tot het verrigten dezer eliminatie, hebben wij vooreerst de identieke vergelijking

$$\sqrt{(4-3Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi)} = \sqrt{\{4(Cos.^2\tfrac{1}{2}\phi + Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi) - 3\ Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi\}} =$$
$$= \sqrt{(4\ Cos.^2\tfrac{1}{2}\phi + Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi)} = 2\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi\sqrt{\{1 + (\tfrac{1}{2}\ Tang.\tfrac{1}{2}\phi)^2\}},$$

en hierin, de uit (3) voortvloeijende waarde $\frac{1}{2}\ Tang.\frac{1}{2}\phi = Cot.(\mu - \phi)$, substituerende, komt er

$$\sqrt{(4-3Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi)} = 2Cos.\tfrac{1}{2}\phi\sqrt{\{1 + Cot.^2(\mu-\phi)\}} = \frac{2\ Cos.\frac{1}{2}\phi}{Sin\ (\mu - \phi)},$$

waardoor (4) overgaat in

$$u = \frac{\frac{3}{2}a\ Sin.\ \frac{1}{2}\phi\ Cos.\ \frac{1}{2}\phi}{Sin.\ (\mu - \phi)} = \frac{4a\ Sin.\ \phi}{3\ Sin.\ (\mu - \phi)} =$$
$$= \frac{4a\ Sin.\ \phi}{3\ Sin.\ \mu\ Cos.\ \phi - 3\ Cos.\ \mu\ Sin.\ \phi} = \frac{4a}{3\ Sin.\ \mu\ Cot.\ \phi - 3\ Cos.\ \mu};$$

hieruit volgt dan

$$3u\ Sin.\ \mu\ Cot.\ \phi - 3u\ Cos.\ \mu = 4a$$

of $$Cot.\ \phi = \frac{4a + 3u\ Cos.\ \mu}{3u\ Sin\ \mu} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

Verder hebben wij de identieke vergelijkingen

$$Tang.(\mu - \phi) = \frac{Cot.\phi\ Cot.\mu + 1}{Cot.\phi - Cot.\mu} \text{ en } Cot.\tfrac{1}{2}\phi = Cot.\phi + \sqrt{(1 + Cot.^2\phi)};$$

dus is volgens (3)

$$\frac{Cot.\ \phi\ Cot.\ \mu + 1}{Cot.\ \phi - Cot.\ \mu} = 2\ Cot.\ \phi + 2\ \sqrt{(1 + Cot.^2\ \phi)},$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$Cot.^2\phi Cot.\mu + \tfrac{1}{2}(Cot\ \phi + Cot.\mu) + (Cot\ \phi Cot.\mu + 1)\sqrt{(1 + Cot.^2\phi)} = 0;$$

hierin vervolgens voor $Cot.\ \phi$ de waarde (5) overbrengende, verdwijnt ϕ, en wij verkrijgen, na behoorlijke herleiding,

$$\left.\begin{array}{l}(16a^2 + 24au\ Cos.\ \mu + 9u^2)\ Cos.\ \mu + 6au\ Sin.^2\mu \\ + (4a\ Cos.\ \mu + 3u)\sqrt{(16a^2 + 24au\ Cos.\ \mu + 9u^2)}\end{array}\right\} = 0, \quad \ldots\ (6)$$

Digitized by Google

hetgeen dan de vergelijking van de ontwondene is.

Deze vergelijking kan door verplaatsing der pool zeer vereenvoudigd worden. Nemen wij namelijk $OO' = \frac{4}{3}a$, en stellen wij *hoek* $X'O'P' = \phi'$, $O'P' = s'$ alsmede $\frac{4}{3}a = a'$ zoodat $OO' = 4a'$ is, dan hebben wij in den driehoek $O'OP'$, *hoek* $O'OP' = 180° - \mu$, *hoek* $OO'P' = 180° - \phi'$ en *hoek* $OP'O' = \mu + \phi' - 180°$; die driehoek verschaft al dadelijk de vergelijking

$$O'P' = \sqrt{(OO'^2 + OP'^2 - 2OO' \times OP' \; Cos. \; O'OP)}$$

of $$s' = \sqrt{\{(\frac{4}{3}a)^2 + u^2 + \frac{8}{3} au \; Cos. \; \mu\}},$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{(16a^2 + 24au \; Cos. \; \mu + 9u^2)} &= 3s' \\ \text{en} \qquad 16a^2 + 24au \; Cos. \; \mu + 9u^2 &= 9s'^2 \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad (7)$$

hierdoor gaat dan (6) vooreerst over in

$$3s'^2 \; Cos. \; \mu + 2au \; Sin.^2 \; \mu + s'(4a \; Cos. \; \mu + 3u) = 0,$$

of daar $u = 3a'$ gesteld is, in

$$s'^2 \; Cos. \; \mu + 2a'u \; Sin.^2 \; \mu + s'(4a' \; Cos. \; \mu + u) = 0. \quad . \quad (8)$$

Uit den driehoek $O'OP$ volgt ook nog

$$OP' : O'P' = Sin. \; OO'P' : Sin. \; O'OP'$$

of $$u : s' = \phi' : Sin \; \mu,$$

dat is $$u \; Sin. \; \mu = s' \; Sin. \; \phi'$$

en $$u^2 \; Sin.^2 \; \mu = s'^2 \; Sin.^2 \; \phi' \Big\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

indien wij dus, na de vergelijking (8) met u vermenigvuldigd te hebben, deze waarde van $u^2 \; Sin.^2 \; \mu$ in den tweeden term overbrengen, hebben wij, na deeling door s',

$$s'u \; Cos. \; \mu + 2a's' \; Sin.^2 \; \phi' + 4a'u \; Cos. \; \mu + u^2 = 0; \quad . \quad (10)$$

en zoo wij in de vergelijking (7) $a = 3a'$ stellen, geeft zij

$$u^2 = s'^2 - 8a'u \; Cos. \; \mu - 16a'^2,$$

waardoor (10) overgaat in

$$s'^2 - 16a'^2 + (s' - 4a')u \; Cos. \; \mu + 2a's' \; Sin.^2 \; \phi' = 0. \quad (11)$$

Eindelijk is nog, uit denzelfden driehoek $O'OP'$

$$OP' : OO' = Sin. \; OO'P' : Sin. \; OP'O',$$

of $u : 4a' = Sin.(180° - \phi') : Sin.(\mu + \phi' - 180°) = Sin.\phi' : -Sin.(\mu + \phi')$;

hieruit volgt $$-u \; Sin.(\mu + \phi') = 4a' \; Sin. \; \phi',$$

$$-u \; Sin. \; \mu \; Cos. \; \phi' - u \; Cos. \; \mu \; Sin. \; \phi' = 4a' \; Sin. \; \phi',$$

welke vergelijking door middel van (9) overgaat in

$$-s' \; Sin. \; \phi' \; Cos. \; \phi' - u \; Cos. \; \mu \; Sin. \; \phi' = 4a' \; Sin. \; \phi'$$

en dan geeft $$u \; Cos. \; \mu = -(s' \; Cos. \; \phi' + 4a'); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

deze waarde van $u \; Cos. \; \mu$ in (11) overbrengende, komt er

$$s'^2 - 16a'^2 - (s' - 4a')(s' \; Cos. \; \phi' + 4a') + 2a's' \; Sin.^2 \; \phi' = 0,$$

Digitized by Google

dat is, na ontwikkeling en na $1 - Cos.^2 \phi'$ in plaats van $Sin.^2 \phi'$ geschreven te hebben,

$s'^2 - 16a'^2 - s'^2 Cos.\phi' - 4a's' + 4a's' Cos\,\phi' + 16a'^2 + 2a'^2(1 - Cos.^2\phi') = 0$

of, na vereeniging van termen en deeling door s',

$$s'(1 - Cos.\,\phi') - 2a'(1 - 2\,Cos.\,\phi' + Cos.^2\,\phi') = 0,$$

dat is $$s'(1 - Cos.\,\phi') = 2a'(1 - Cos.\,\phi')^2,$$

of $$s' = 2a'(1 - Cos.\,\phi'),$$

en eindelijk $$s' = 4a'\,Sin.^2\,\tfrac{1}{2}\phi' \ldots\ldots\ldots (13)$$

Dit is nu de poolvergelijking der ontwondene, indien O′ als pool en O′X′ als oorsprong der hoeken is aangenomen. Uit die vergelijking blijkt, dat deze ontwondene wederom eene gewone epicycloïde is, wier afmetingen het ¼ gedeelte van die der oorspronkelijke epicycloïde zijn, en wier stand met betrekking tot de oorspronkelijke zoodanig is, als wij die in de figuur hebben aangewezen.

Om de vergelijking (13) uit de vergelijking (6) af te leiden, zou het genoegzaam zijn, uit de vergelijkingen (9) en (12), in verband met de identieke vergelijking $Sin.^2\,\mu + Cos.^2\,\mu = 1$, de waarden van u, $Sin.\,\mu$, en $Cos.\,\mu$ op te lossen, en de daardoor verkregene waarden in (6) te substitueren. Hierbij zal men dan echter vrij omslagtige herleidingen te verrigten hebben, die wij door den boven gevolgden weg hebben ontweken.

De vergelijking van de ontwondene der epicycloïde kan echter nog veel korter gevonden worden. Hierbij neemt men dan dadelijk O′, op den afstand $OO' = \tfrac{1}{4}a = 4a'$ van O gelegen als pool, en O′X′ als oorsprong der hoeken aan.

Immers daar $PP' = \gamma$ de kromtestraal van het punt P is, is de hoek P′PO het complement van den hoek ψ, door de raaklijn en den voerstraal van het punt P gevormd; zoo men dus P′Q en O′R loodregt op OP trekt, is *hoek* $PP'Q = \psi$. Uit de driehoeken PP′Q en OO′R volgt derhalve

$P'Q = PP'\,Cos.\,PP'Q = \gamma\,Cos.\psi = \tfrac{1}{4}a\,Sin.\tfrac{1}{2}\phi\,Cos.\tfrac{1}{2}\phi = 4a'\,Sin.\phi,$

en $OR = OO'\,Sin.\,O'OR = \tfrac{1}{4}a\,Sin.\,\phi = 4a'\,Sin.\,\phi$;

zoodat de lijnen P′Q en OR, die wegens haren loodregten stand op OP evenwijdig loopen, onderling gelijk zijn, waaruit verder de gelijkheid en evenwijdigheid der lijnen O′P′ en QR volgt. Alzoo is dan

$$\phi' = hoek\ X'O'P' = 180° - hoek\ XOP = 180° - \phi,$$

$$\tfrac{1}{2}\phi' = 90° - \tfrac{1}{2}\phi \quad \text{en} \quad Sin.\tfrac{1}{2}\phi' = Cos.\tfrac{1}{2}\phi.$$

Digitized by Google

Uit de figuur heeft men nu onmiddellijk

$O'P' = OP - OR - PQ = OP - OO' \cos. O'OR - PP' \sin. PP'Q$,

dat is $s' = s + 4a' \cos. \phi - \gamma \sin. \psi$;

hierin voor s, γ en ψ de bekende waarden stellende en herleidende, komt er achtervolgens:

$s' = 4a \sin.^2 \frac{1}{2}\phi + 4a' \cos. \phi - \frac{8}{3}a \sin.^2 \frac{1}{2}\phi$

$= 12a' \sin.^2 \frac{1}{2}\phi + 4a' (\cos.^2 \frac{1}{2}\phi - \sin.^2 \frac{1}{2}\phi) - 8a' \sin.^2 \frac{1}{2}\phi$

$= 4a' \cos.^2 \frac{1}{2}\phi$,

of, omdat $\cos. \frac{1}{2}\phi = \sin. \frac{1}{2}\phi'$ gevonden is,

$s' = 4a' \sin.^2 \frac{1}{2}\phi'$.

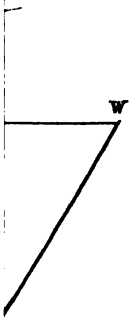
Het verdient opmerking, dat de voerstralen OP en O'P', tot twee overeenkomstige punten van de epicycloïde en hare ontwondene behoorende, evenwijdig loopen.

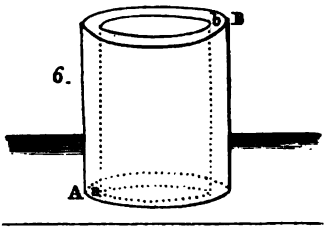
EINDE VAN HET EERSTE DEEL.

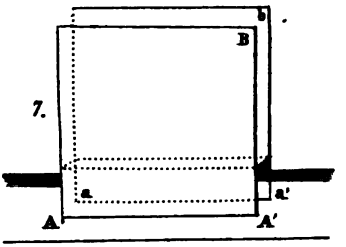
MAR 17 1921

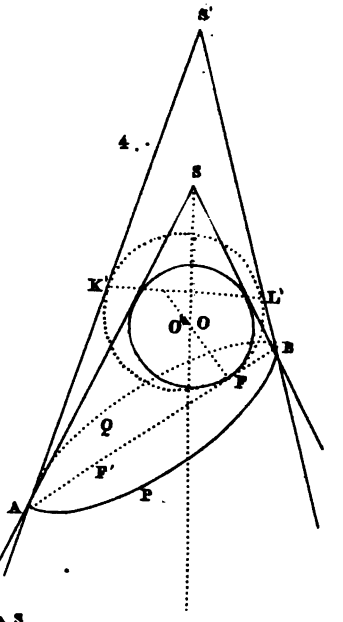
Digitized by Google

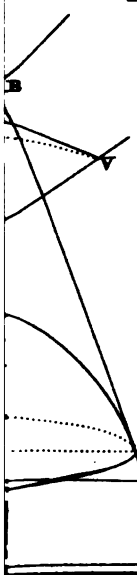
Digitized by Google

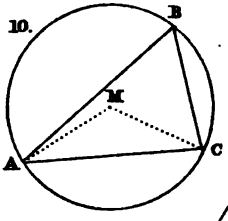


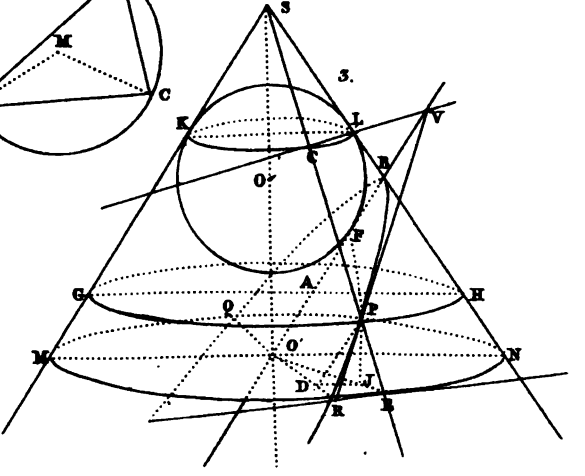






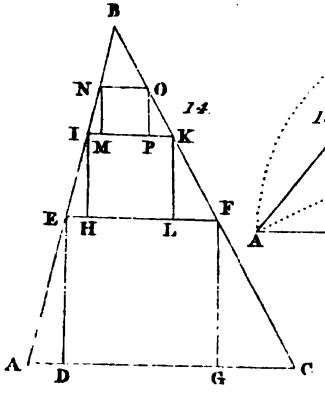


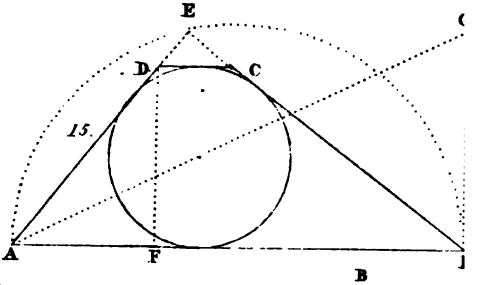


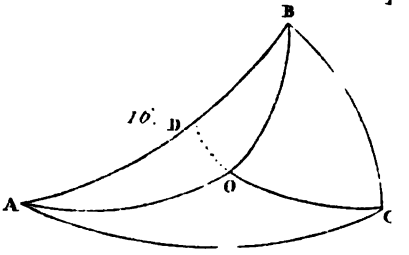


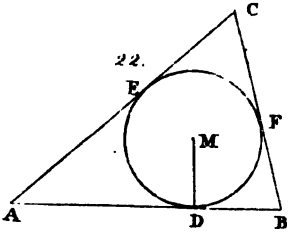
Digitized by Google

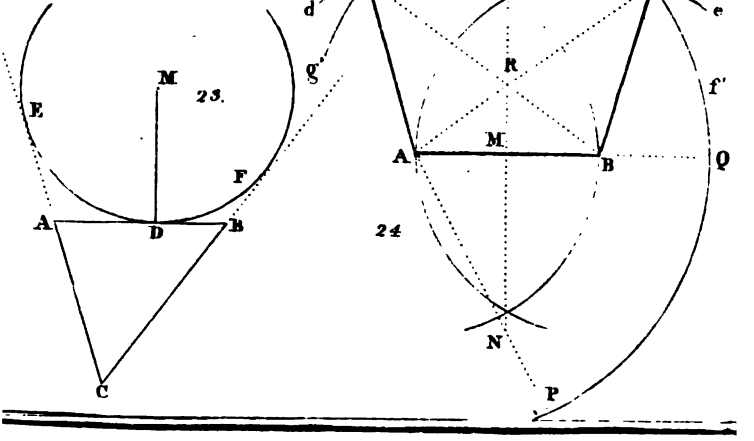
Digitized by Google





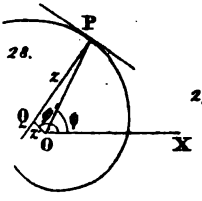


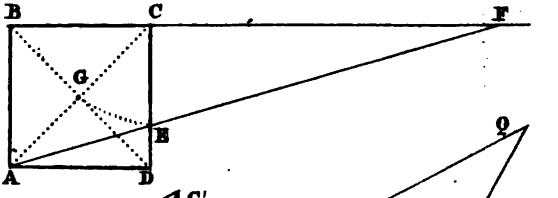


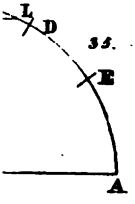


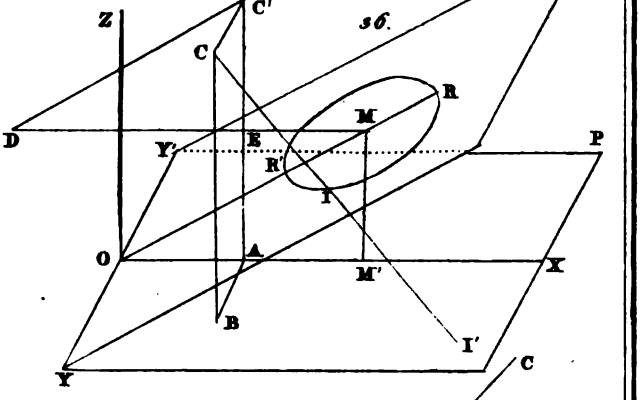
Digitized by Google

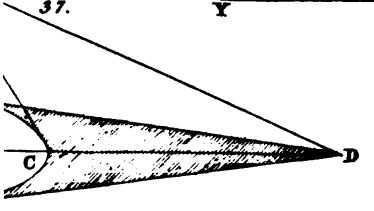
Digitized by Google

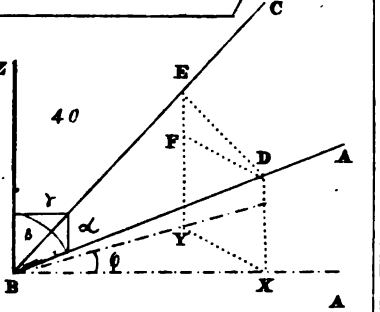


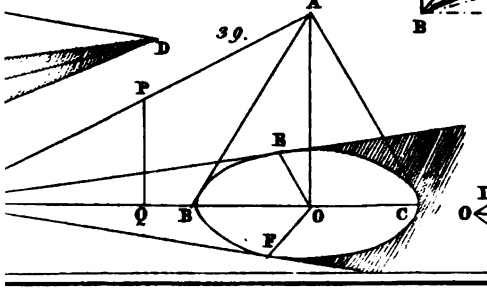


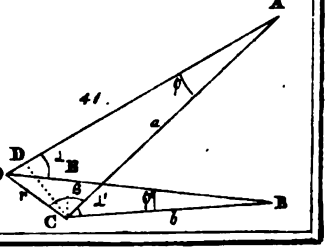






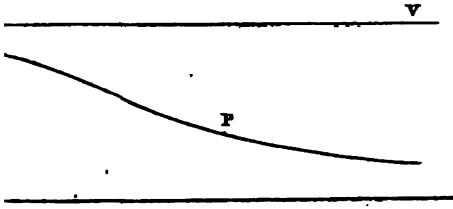


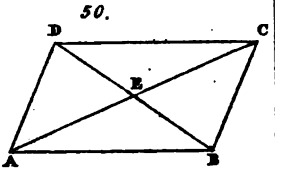


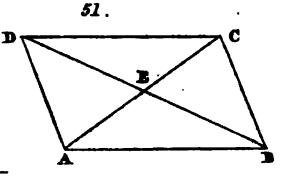


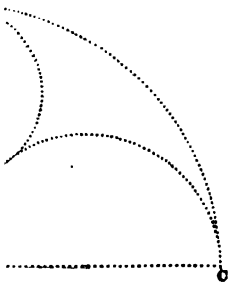
Digitized by Google

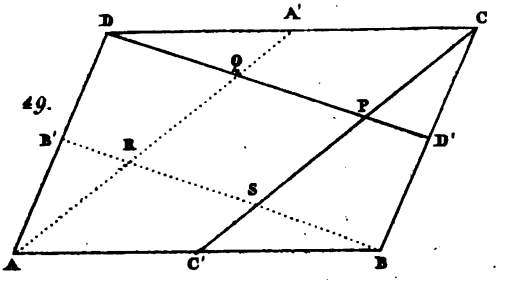
Digitized by Google

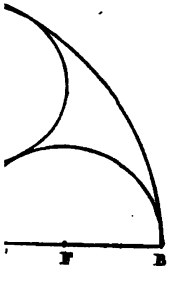


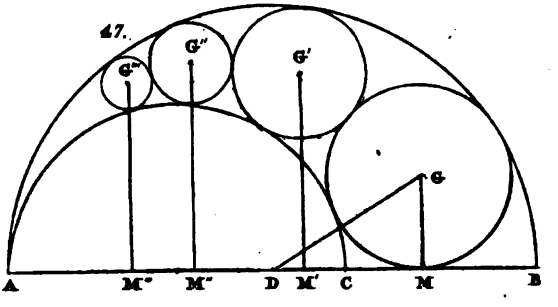






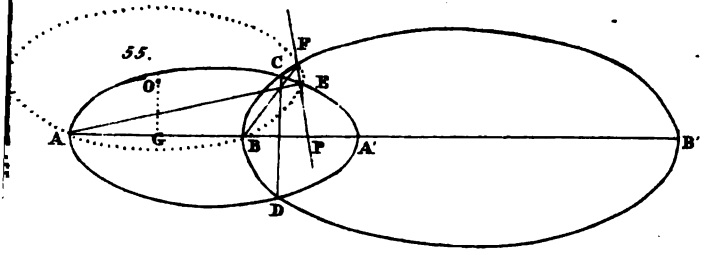


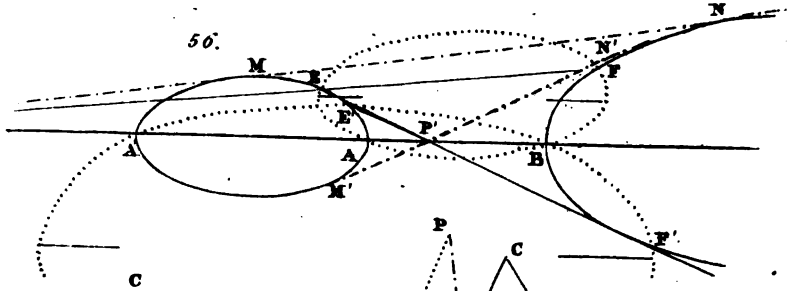


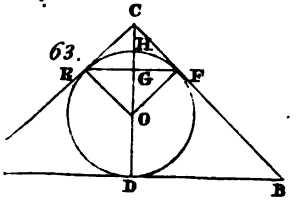


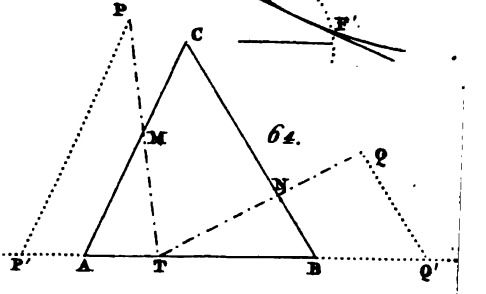
Digitized by Google

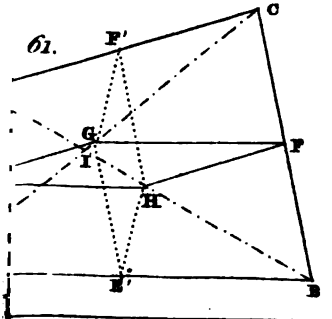
Digitized by Google

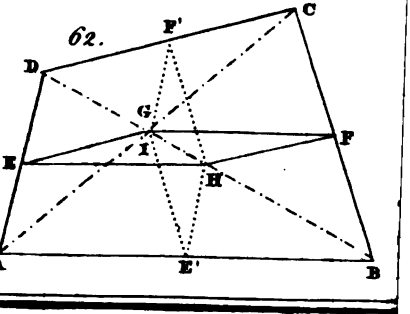






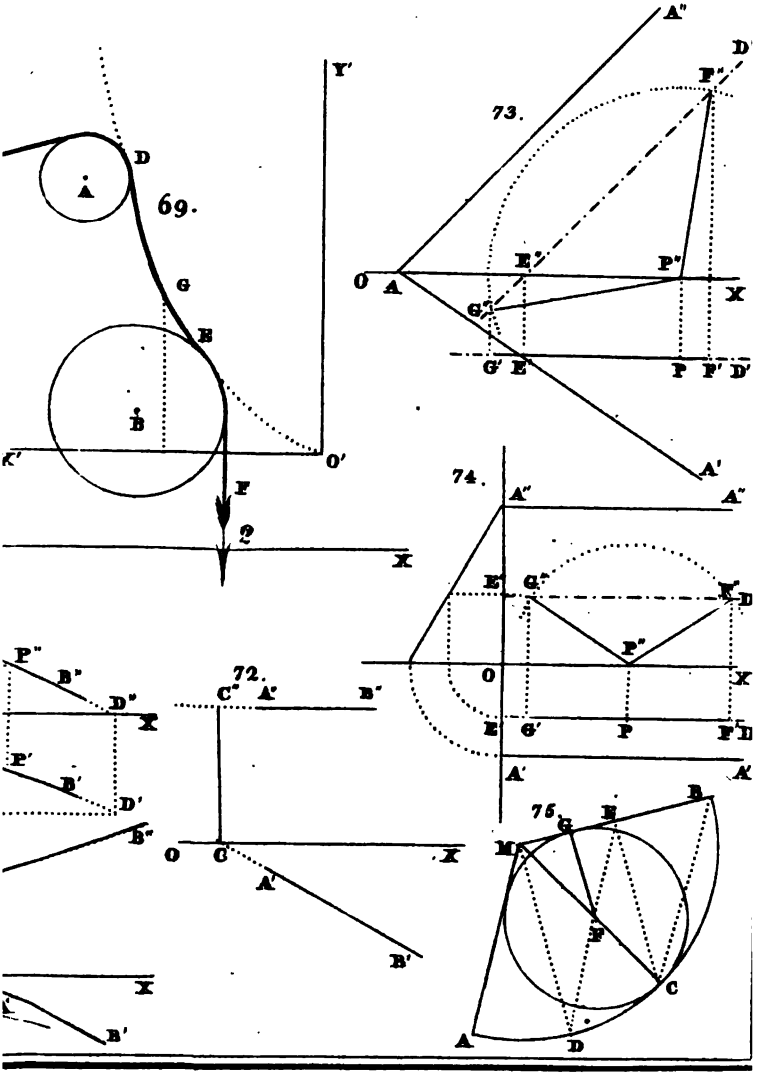






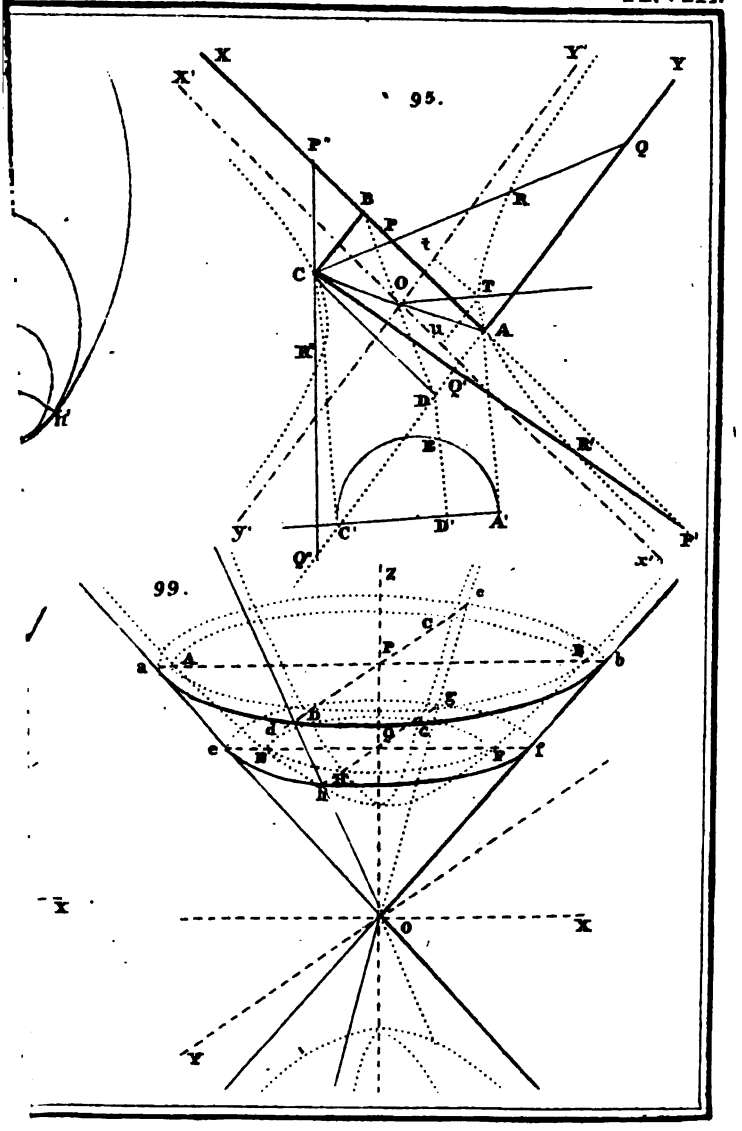
Digitized by Google

Digitized by Google



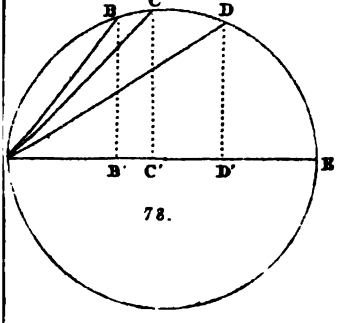
Digitized by Google

Digitized by Google

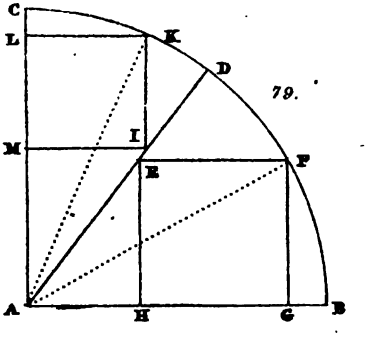


Digitized by Google

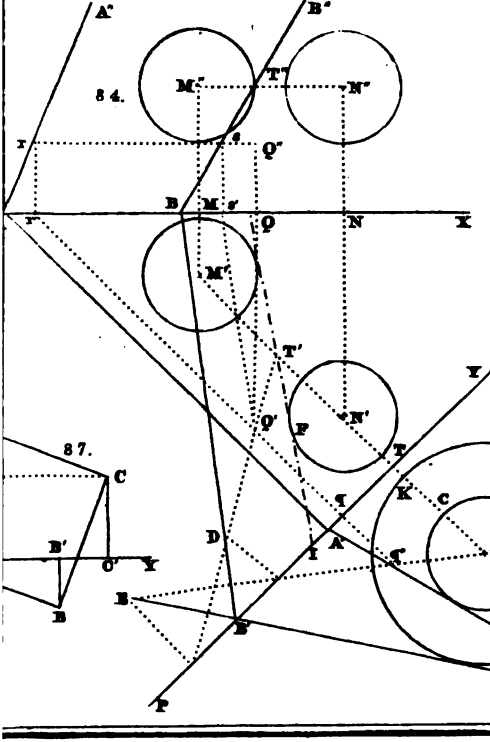
Digitized by Google



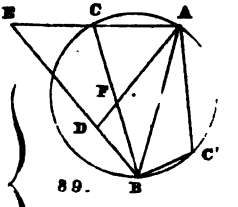
78.



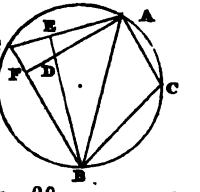
79.

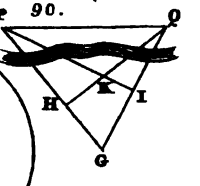


84.



89.



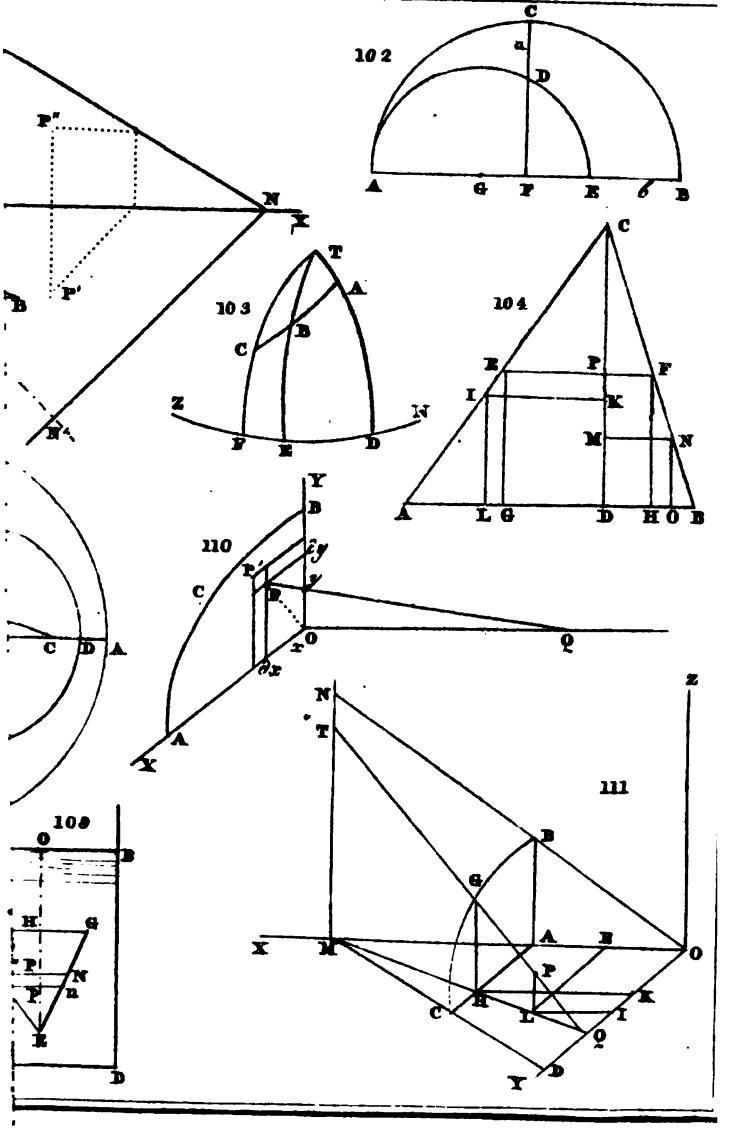


90.

87.

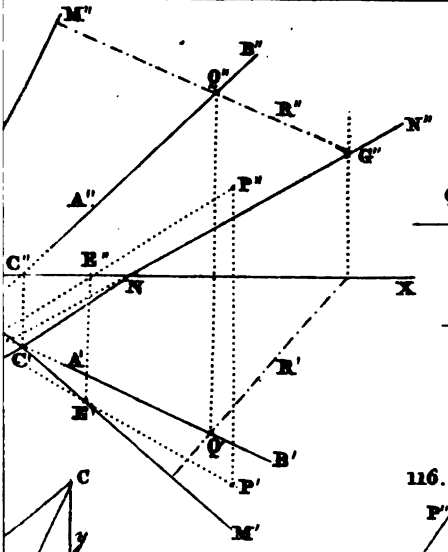
Digitized by Google

Digitized by Google

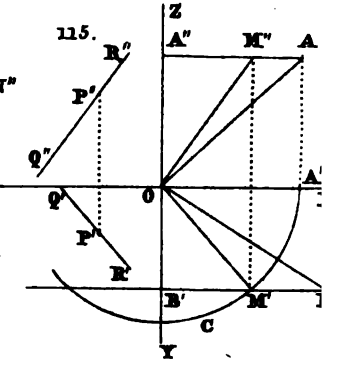


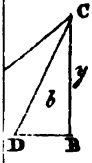
Digitized by Google

Digitized by Google

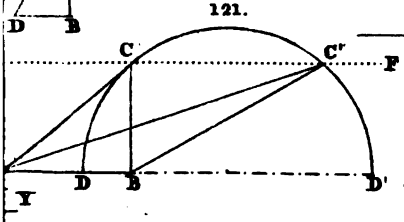


115.

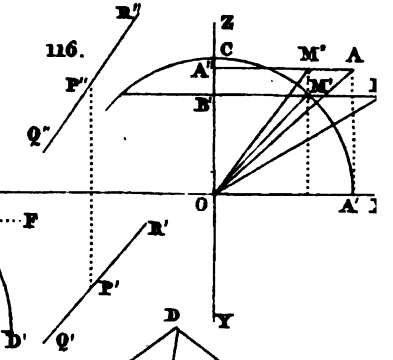


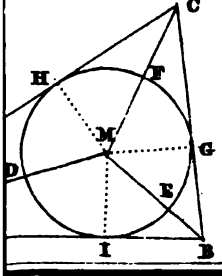


121.

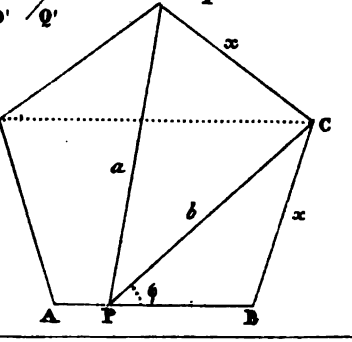


116.



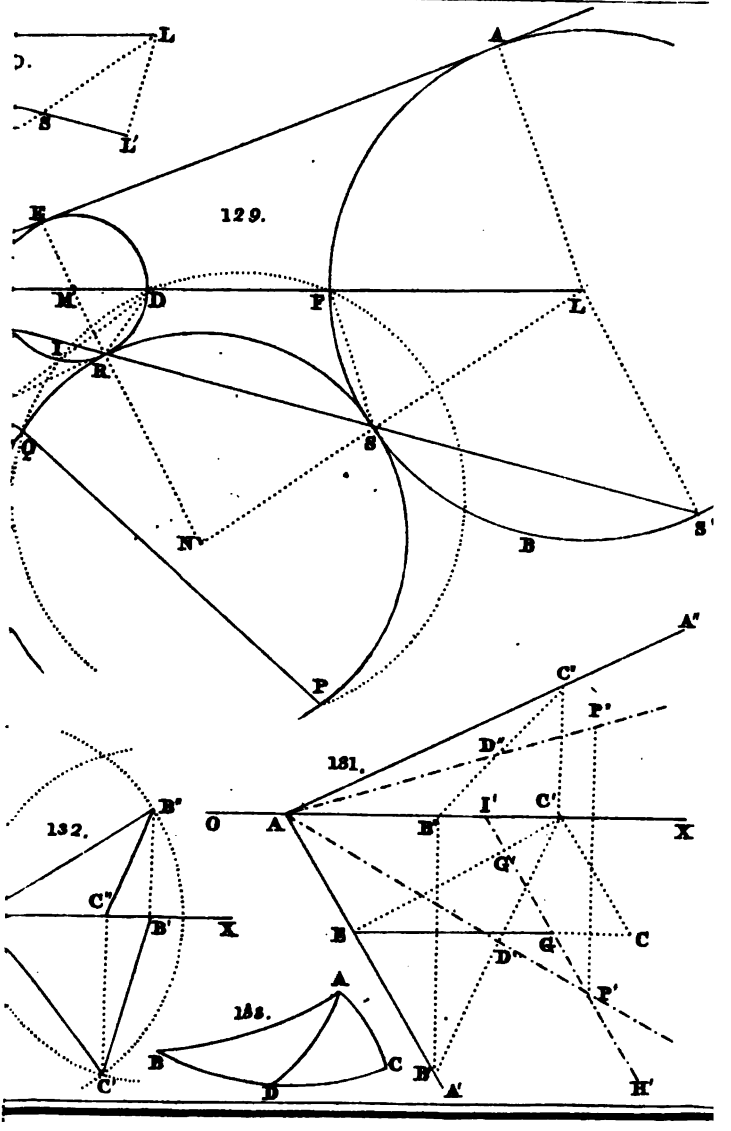


126.



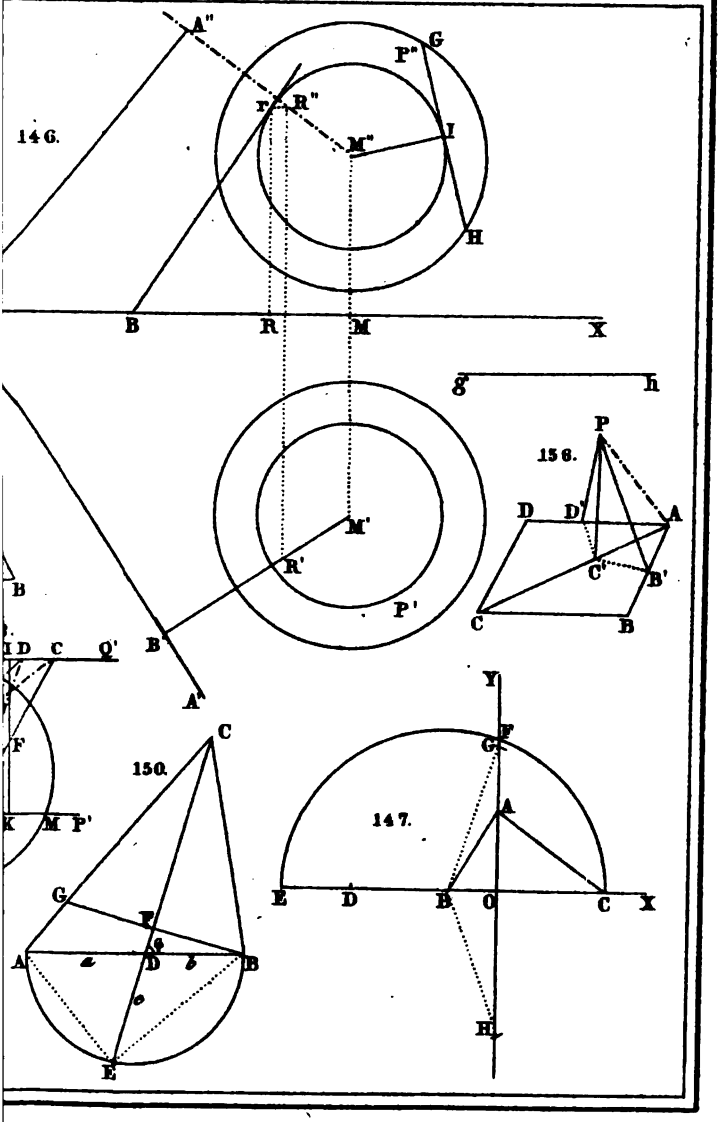
Digitized by Google

Digitized by Google



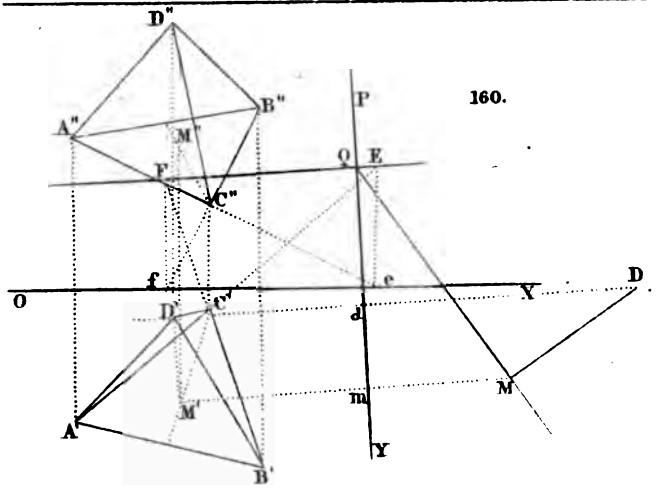
Digitized by Google

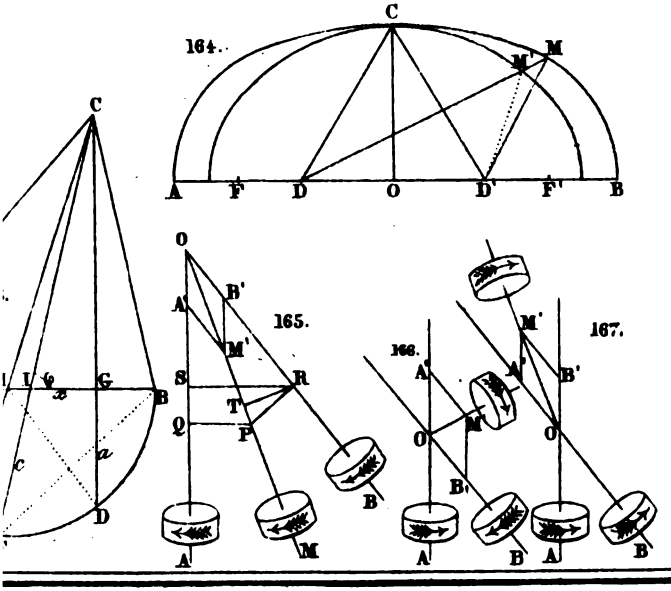
Digitized by Google



Digitized by Google

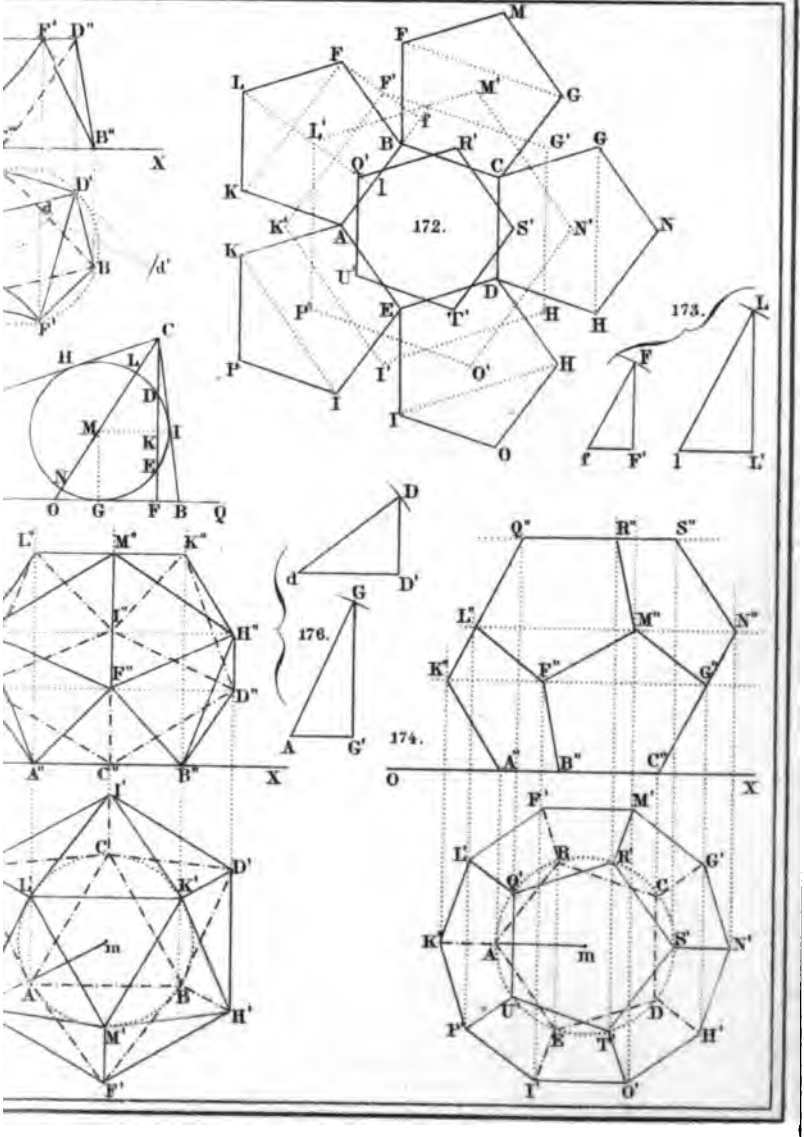
Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

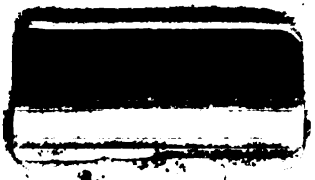
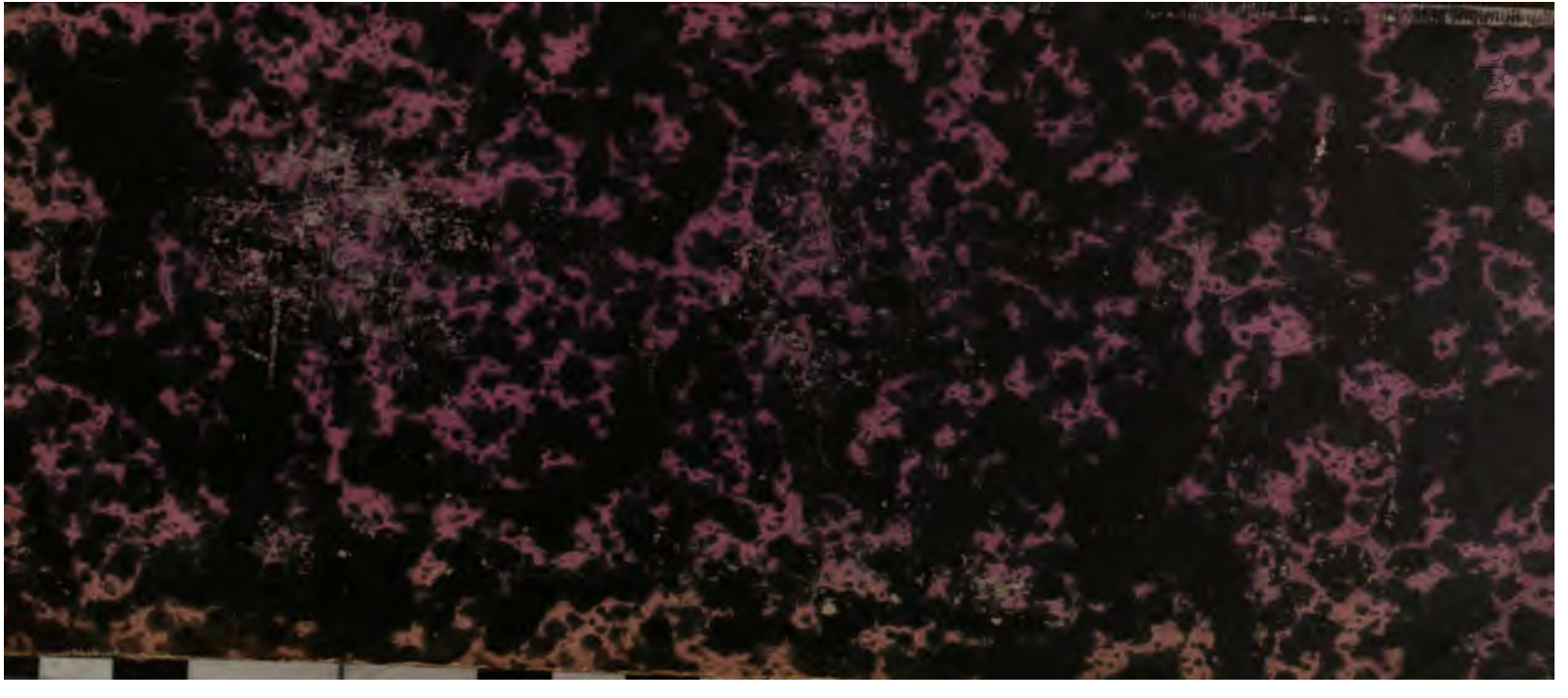
Digitized by Google

Digitized by Google

For Room Use Only

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06818 3014



Digitized by Google